Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(7), 813-817
Published Online September 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.97107

A Class of Univalent Close-to-Convex Harmonic Mapping

Jinjing Qiao*, Xiaoyu Zhai

College of Mathematics and Information Science, Hebei University, Baoding Hebei
Email: mathqiao@126.com

Received: Aug. 19th, 2019; accepted: Sep. 9th, 2019; published: Sep. 16th, 2019

Abstract

This paper investigates a class of univalent close-to-convex harmonic mappings, which is the generalization of analytic functions whose derivatives have positive real parts. We discuss the following properties of functions in this class: deviation theorem, the radius of convexity, close-to-convexity of partial sums, extremal functions, and we also study the subclass of functions with initial zero coefficients.

Keywords

Univalent Harmonic Mapping, Deviation Theorem, Radius of Convexity, Partial Sum, Extremal Function

一类单叶接近凸调和映射

乔金静*，翟小雨

河北大学数学与信息科学学院，河北 保定
Email: mathqiao@126.com

收稿日期：2019年8月19日；录用日期：2019年9月9日；发布日期：2019年9月16日

摘 要

作为导数实部大于零的解析函数类的推广，本文介绍了一类单叶接近凸调和映射，讨论了此类映射的如下性质：偏差定理、凸半径、部分和的接近凸性、极值函数，且也研究了幂级数展开式中除首项外前有限项系数为零的子类。

*第一作者。

文章引用: 乔金静, 翟小雨. 一类单叶接近凸调和映射[J]. 理论数学, 2019, 9(7): 813-817.
DOI: 10.12677/pm.2019.97107

关键词

单叶调和映射，偏差定理，凸半径，部分和，极值函数

1. 预备知识

设 H_0 是单位圆盘 $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 上的复值调和映射 $f=h+\overline{g}$ 组成的函数类，其中 h 和 g 是 D 上的解析函数，分别称为 f 的解析部分和反解析部分，$h(0)=g(0)=0$，$h'(0)=1$。h 和 g 有级数表示

$$h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n, g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n, z\in D.$$

调和映射 $f=h+\overline{g}\in H_0$ 的 Jacobian 矩阵为 $J_f(z)=|h'(z)|^2-|g'(z)|^2$。如果对任意 $z\in D$，都有 $J_f(z)>0$，则称 f 在 D 中是保向的[1]。由 Lewy [2]的结果，可得 $J_f(z)>0$ 是 f 局部单叶并且保向的一个充分必要条件。而 $f\in H_0$ 在 D 中保向当且仅当 $g'(z)=\omega(z)h'(z)$，其中 ω 在 D 中解析，且 $|\omega(z)|<1$。称函数 ω 为 f 的解析伸缩。

条件 $\operatorname{Re}f'(z)>0$ 是凸区域上的解析函数 f 单叶的充分条件，参见([3]定理 2.16)。对满足条件 $\operatorname{Re}f'(z)>0$ 的函数 f 的最早的研究是 Alexander 的论文[4]。Alexander 证明了：如果 f 在 D 中是解析的且 f' 将 D 映射到边界为一条通过原点的直线的半平面，那么 f 就是单叶的。Noshiro ([5], p. 151)和 Warschawski ([6], p. 312)分别证明了 $\operatorname{Re}f'(z)>0$ 是 f 在任意凸区域内单叶性的一个充分条件。事实上满足条件 $\operatorname{Re}f'(z)>0$ 的函数是接近凸的([3], p. 46)。

令 R 表示 D 中满足条件 $\operatorname{Re}f'(z)>0$ 的解析函数类，且满足规范化条件 $f(0)=0$ 和 $f'(0)=1$。由 Noshiro 和 Warschawski 的结果，R 中的每一个函数都是单叶的[4]。在文献[7]中，作者研究了函数类

$$\mathfrak{R}=\left\{f(z)=z+\sum\nolimits_{n=2}^{\infty}a_nz^n: 对某一个\theta_0\in[0,2\pi], \operatorname{Re}e^{i\theta_0}f'(z)>0, z\in D\right\}.$$

显然 R 是 $\mathfrak{R}$ 的子类。文献[7]主要讨论了 $\mathfrak{R}$ 中函数的如下性质：偏差定理，凸半径，部分和的接近凸性，极值函数，幂级数展开式中除首项外前有限项系数为零的子类。本论的目的是把文献[7]中的结果推广到调和映射。

函数类 $\mathfrak{R}$ 到调和映射的一个自然的推广是类

$$H:=\left\{f=h+\overline{g}\in H_0: 对某个\theta_0\in[0,2\pi], \operatorname{Re}e^{i\theta_0}h'(z)>|g'(z)|, z\in D\right\}.$$

如果 $f=h+\overline{g}\in H$，即存在 $\theta_0\in[0,2\pi]$，使得 $\operatorname{Re}e^{i\theta_0}h'(z)>|g'(z)|$，则称 θ_0 为 f 对应的旋转角。如果 $f=h+\overline{g}\in H$，显然有 $h\in\mathfrak{R}$ 并且对每一个 $\theta\in[0,2\pi]\in D$，$h+e^{i(\theta-\theta_0)}g\in\mathfrak{R}$。利用上述性质，本文讨论 H 中映射的如下性质：偏差定理，凸半径，部分和的接近凸性，极值函数，幂级数展开式中除首项外前有限项系数为零的子类。

2. 偏差定理

定理 2.1 如果 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=2}^{\infty}\overline{b_n}\overline{z}^n\in H$，且对应的旋转角为 $\theta_0\in[0,2\pi]$，那么

$$
\begin{gathered}
|a_n|+|b_n|\le\frac{2}{n}\cos\theta_0, n=2,3,\cdots,\\
|h'(z)|+|g'(z)|\le\cos\theta_0\frac{1+|z|}{1-|z|}+|\sin\theta_0|,\\
\operatorname{Re}e^{i\theta_0}h'(z)\ge\cos\theta_0\frac{1-|z|}{1+|z|}+|g'(z)|,\\
\big||h(z)|-|g(z)|\big|\le|h(z)|+|g(z)|\le\cos\theta_0\left[-|z|-2\log(1-|z|)\right]+|\sin\theta_0||z|,\\
\big||h(z)|-|g(z)|\big|\ge\cos\theta_0\left[-|z|+2\log(1+|z|)\right].
\end{gathered}
\tag{1}
$$

证明： 因为 $f=h+\overline{g}\in H$，且对应的旋转角 $\theta_0\in[0,2\pi]$，即在 D 中 $\operatorname{Re}e^{i\theta_0}h'(z)>|g'(z)|$，这等价于对每一个 $\theta\in[0,2\pi]$ 有 $\operatorname{Re}\left(e^{i\theta_0}h'(z)+e^{i\theta}g'(z)\right)>0$，也就是 $\operatorname{Re}e^{i\theta_0}\left(h'(z)+e^{i(\theta-\theta_0)}g'(z)\right)>0$。由文献[7]中的定理 1.1，有

$$
\begin{gathered}
\left|a_n+e^{i(\theta-\theta_0)}b_n\right|\le\frac{2}{n}\cos\theta_0, n=2,3,\cdots,\\
\left|h'(z)+e^{i(\theta-\theta_0)}g'(z)\right|\le\cos\theta_0\frac{1+|z|}{1-|z|}+|\sin\theta_0|,\\
\operatorname{Re}e^{i\theta_0}\left(h'(z)+e^{i(\theta-\theta_0)}g'(z)\right)>\cos\theta_0\frac{1-|z|}{1+|z|},\\
\left|h(z)+e^{i(\theta-\theta_0)}g(z)\right|\le\cos\theta_0\left[-|z|-2\log(1-|z|)\right]+|\sin\theta_0||z|,\\
\left|h(z)+e^{i(\theta-\theta_0)}g(z)\right|\ge\cos\theta_0\left[-|z|+2\log(1+|z|)\right].
\end{gathered}
$$

因此

$$
\begin{gathered}
|a_n|+|b_n|\le\frac{2}{n}\cos\theta_0, n=2,3,\cdots,\\
|h'(z)|+|g'(z)|\le\cos\theta_0\frac{1+|z|}{1-|z|}+|\sin\theta_0|,\\
\operatorname{Re}e^{i\theta_0}h'(z)\ge\cos\theta_0\frac{1-|z|}{1+|z|}+|g'(z)|,\\
\big||h(z)|-|g(z)|\big|\le|h(z)|+|g(z)|\le\cos\theta_0\left[-|z|-2\log(1-|z|)\right]+|\sin\theta_0||z|,\\
\big||h(z)|-|g(z)|\big|\ge\cos\theta_0\left[-|z|+2\log(1-|z|)\right].
\end{gathered}
$$

通过考虑函数 $f_0(z)=-z-2\log(1-z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)z^n\in H$，可知定理中的所有估计都是强的。

下面的结果利用估计(1)得到。

推论 2.1 调和映射 $f=h+\overline{g}\in H$ 将单位圆盘 D 映到包含圆盘 $|\omega|<(2\log 2-1)\cos\theta_0$ 的区域上，其中 $\theta_0\in[0,2\pi]$ 是 f 对应的旋转角。

3. 凸半径

本节首先介绍一个引理，这个引理为([1], p. 38)中的定理。

引理 3.1 设 $f=h+\overline{g}$ 在 D 中调和并且局部单叶。那么 f 是单叶的并且它的象域是凸的当且仅当对每一个 $\alpha(0\le\alpha<2\pi)$，解析函数 $f_\alpha=\mathrm{e}^{i\alpha}h-\mathrm{e}^{-i\alpha}g$ 是单叶的，并且它的象域在水平方向是凸的。

定理 3.1 调和映射 $f=h+\overline{g}\in H$，将 $|z|<\sqrt{2}-1$ 映到一个凸区域上。

证明：假设 $f=h+\overline{g}\in H$，且对应的旋转角 $\theta_0\in[0,2\pi]$。设 $f_\theta(z)=h(z)+\mathrm{e}^{i\theta}g(z)$，这里 $\theta\in[0,2\pi]$。显然有 $f_\theta\in\Re$。由([7]定理 2.1)，$f_\theta(z)$ 将 $|z|<\sqrt{2}-1$ 映射到一个凸区域上。$f_\theta\left(\left(\sqrt{2}-1\right)z\right)$ 是 D 上的凸函数，由引理 3.1，$f\left(\left(\sqrt{2}-1\right)z\right)$ 是 D 上的凸调和映射，即调和映射 f 将 $|z|<\sqrt{2}-1$ 映到一个凸区域上。

对于函数 $f_0(z)=-z-2\log(1-z)\in H$，有

$$zf_0''(z)/f_0''(z)+1=\left(1+2z-z^2\right)/\left(1-z^2\right),$$

式子右端当 $z=1-\sqrt{2}$ 是为 0。因此，这个函数不会把比 $|z|<\sqrt{2}-1$ 大的一个圆盘 $|z|<r$ 映到一个凸区域上。

4. 部分和的接近凸性

定理 4.1 设调和映射 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=2}^{\infty}\overline{b_n}\overline{z}^n\in H$，$f_n(z)=h_n(z)+\overline{g_n(z)}=z+\sum_{k=2}^{n}a_kz^k+\sum_{k=2}^{n}\overline{b_k}\overline{z}^k$，那么 $f_n(z)$ 在 $|z|<\frac{1}{2}$ 中是接近凸的，其中 $n=2,3,\cdots$。这个结果是强的。

证明：假设 $f=h+\overline{g}\in H$，且对应的旋转角 $\theta_0\in[0,2\pi]$，那么对每一个 θ，

$$f_\theta(z)=h(z)+\mathrm{e}^{i(\theta-\theta_0)}g(z)\in\Re。$$

由([7]定理 3.1)，可得在 $|z|<\frac{1}{2}$ 中有 $\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\theta_0}h_n'(z)+\mathrm{e}^{i\theta}g_n'(z)\right)>0$，这就蕴含了

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{i\theta_0}h_n'(z)>|g_n'(z)|,$$

所以 f_n 在 $|z|<\frac{1}{2}$ 中就是接近凸的。

5. 极值性质

设 $\theta_0=[0,2\pi]$，$H_{\theta_0}=\left\{f\in H:\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{i\theta_0}h'(z)>|g'(z)|\right\}$。

定理 5.1 设 $0<r<1$ 且 $\theta_0\in[0,2\pi]$。$|z|<r$ 在 H_{θ_0} 中函数的象域面积的最大值由解析函数 $f_0(z)=-z-2\log(1-z)$ 取得。

证明：假设 $f=h+\overline{g}\in H$ 且 $0<r<1$，那么 $h\in\Re$。设 $A_r(f)$ ($A_r(f)$，$A_r(f_0)$)分别是 $|z|<r$ 在 f(或 h，或 f_0)下的象。由([7]定理 5.1)的证明，我们有

$$\begin{aligned}A_r(f)&=\iint_D J_f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(|h'(z)|^2-|g'(z)|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\le\iint_D|h'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A_r(h)\le A_r\left(f_{\theta_0}\right)\le A_r(f_0).\end{aligned}$$

定理证毕。

6. 幂级数展开式中除首项外前有限项系数为零的调和映射

定理 6.1 设 $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum_{k=n}^{\infty}a_k z^k+\sum_{k=n}^{\infty}\overline{b_k}\overline{z}^k\in H$，且对应的旋转角 $\theta_0\in[0,2\pi]$，那么

$$\left|h'(z)\right|+\left|g'(z)\right|\le\cos\theta_0\frac{1+|z|^{k-1}}{1-|z|^{k-1}}+\left|\sin\theta_0\right|,$$

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{i\theta_0}h'(z)\ge\cos\theta_0\frac{1-|z|^{k-1}}{1+|z|^{k-1}}+\left|g'(z)\right|,$$

$$\left|h(z)\right|+\left|g(z)\right|\le\int_0^{|z|}\left(\cos\theta_0\frac{1+t^{k-1}}{1-t^{k-1}}+\left|\sin\theta_0\right|\right)\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$\left|\left|h(z)\right|-\left|g(z)\right|\right|\ge\int_0^{|z|}\cos\theta_0\frac{1-t^{k-1}}{1+t^{k-1}}\mathrm{d}t. \tag{3}$$

证明：假设 $f=h+\overline{g}\in H$，且对应的旋转角 $\theta_0\in[0,2\pi]$，那么对于任意的 θ，$\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{i\theta_0}\left(h'(z)+\mathrm{e}^{i(\theta-\theta_0)}g'(z)\right)>0$。由([7]定理 5.1)，定理得证。

应用定理 6.1，对 H 中满足 $a_2=b_2=0$ 的调和映射，从(2)和(3)可得

$$\cos\theta_0\left[-|z|+2\arctan|z|\right]\le\left|f(z)\right|\le\cos\theta_0\left[-|z|+\log\left(1+|z|\right)/\left(1-|z|\right)\right]+\left|\sin\theta_0\right||z|.$$

由上式的下确界可得如下结果。

推论 6.1 如果 $f=h+\overline{g}\in H$，对应的旋转角 $\theta_0\in[0,2\pi]$，且满足 $h''(0)=g''(0)=0$，那么其象域覆盖圆盘 $|\omega|<(\pi/2-1)\cos\theta_0$。

下面这个结果是定理 5.1 和([7]定理 5.2)的推广。

定理 6.2 设 $0<r<1$ 和 $\theta_0\in[0,2\pi]$。$|z|<r$ 在 H_{θ_0} 中函数映射下的象域的面积最大值由 $f_0(z)$ 取到。函数 $f_{k,\theta_0}(z)=\mathrm{e}^{-i\theta_0}\left\{\int_0^z\left[\left(\left(1+\sigma^{k-1}\right)/\left(1-\sigma^{k-1}\right)\right)\cos\theta_0+i\sin\theta_0\right]\mathrm{d}\sigma\right\}$ 取到 $|z|=r$ 在 H_{θ_0} 中函数的映射下象的长度的最大值。

基金项目

本论文由河北省自然科学基金(No. A2018201033)支持。

参考文献

[1] Duren, P. (2004) Harmonic Mappings in the Plane. Cambridge University Press, Cambridge, 20. https://doi.org/10.1017/CBO9780511546600

[2] Lewy, H. (1936) On the Non-Vanishing of the Jacobian in Certain One-to-One Mappings. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **42**, 689-692. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1936-06397-4

[3] Duren, P. (1982) Univalent Functions. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 47.

[4] Alexander, J.W. (1915) Functions Which Map the Interior of the Unit Circle upon Simple Regions. *Annals of Mathematics*, **17**, 12-22. https://doi.org/10.2307/2007212

[5] Noshiro, K. (1934) On the Theory of Schlicht Functions. *Journal of Faculty of Science*, *Hokkaido Imperial University. Series I. Mathematics*, **2**, 129-155. https://doi.org/10.14492/hokmj/1531209828

[6] Warschawski, S. (1935) On the Higher Derivatives at the Boundary in Conformal Mappings. *Transactions of the American Mathematical Society*, **38**, 310-340. https://doi.org/10.2307/1989685

[7] 乔金静, 黄苗苗, 郭倩南. 一类接近凸解析函数的性质[J]. 河北大学学报自然科学版, 2018, 38(6): 567-571.