Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(7), 836-842
Published Online September 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.97109

The λ-Radical and Regular Radical in Normal Classes of Complete Pointwise Algebra

Zongwen Yang, Qinghai He

Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming Yunnan
Email: zwyang@ynu.edu.cn, heqh@ynu.edu.cn

Received: Aug. 29th, 2019; accepted: Sep. 18th, 2019; published: Sep. 25th, 2019

Abstract

Two equivalent conditions of radical class are given, and two kinds of algebras of λ-algebra and regular algebra in normal class of pointwise complete algebra are defined. It is proved that class λ of λ-algebra and class ν of regular algebras are all radical classes.

Keywords

Normal Classes of Complete Pointwise Algebras, λ-Algebras, λ-Radical, Regular Algebras, Regular Radical

点态化完备代数正规类中的λ-根和正则根

杨宗文，何青海

云南大学，数学系，云南　昆明
Email: zwyang@ynu.edu.cn, heqh@ynu.edu.cn

收稿日期：2019年8月29日；录用日期：2019年9月18日；发布日期：2019年9月25日

摘　要

给出了根类的判别的2组等价条件，定义了点态化完备代数正规类中的λ-代数与正则代数2类代数，并证明了λ-代数类λ与正则代数类ν都是根类。

关键词

点态化完备代数正规类，λ-代数，λ-根，正则代数，正则根

文章引用: 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的 λ-根和正则根[J]. 理论数学, 2019, 9(7): 836-842.
DOI: 10.12677/pm.2019.97109

1. 引言

环及其它代数系统根理论的统一研究促使一般代数正规类根理论的建立[1]-[15]，为了能在一般代数正规类中进一步统一的研究根性质，文献[16]-[23]分别引入了可积代数正规类、完备代数正规类，对特殊根等进行了研究，并对一类特殊的半环——大半环(可做单侧减法的半环)建立了相应的根理论；文献[24] [25]对完备代数正规类进行了点态化，研究了点态化完备代数正规类中的亚直既约代数类确定的上根——反单根、遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根、诣零根的结构性质。

本文在文献[24] [25]建立的点态化完备代数正规类概念基础上，进一步加强了点态化完备代数正规类的公理，给出了根类的判别的 2 组等价条件，研究了点态化完备代数正规类中的 λ-根和正则根性质。

2. 预备知识及基本引理

点态化完备代数正规类的相关概念及性质参见文献[24] [25]。

定义 2.1 [12]：$\mathscr{A}$ 是一个代数类，$\mathrm{R} \subseteq \mathscr{A}$，如果 R 满足：

a) $\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，如果 $a \in \mathrm{R}$，则 $a/i \in \mathrm{R}$ (即 R 商闭)；

b) $\forall a \in \mathscr{A}$，$a$ 有一个最大的 R-理想(记为 $\mathrm{R}(a)$)，称 a 的 R-根；

c) $\forall a \in \mathscr{A}$，有 $\mathrm{R}(a/\mathrm{R}(a)) = 0$。

则称 R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类，简称根。

定义 2.2 [12]：$\mathscr{A}$ 是一个代数类，$\mathrm{R} \subseteq \mathscr{A}$ 是一个根类，$\mathscr{A}$ 中代数类 $\mathrm{PR} = \{a \mid \mathrm{R}(a) = 0\}$ 称为 R 的半单类，PR 中元素称为 R-半单代数。

引理 2.3 [15]：$\mathscr{A}$ 是一个完备代数正规类，则：

1) 如果 $i, j \lhd a$，则 $ij \leqslant i \wedge j$，特别 $ii \leqslant i$；

2) 如果 $i, j \lhd a$，则 $ij \lhd a$；

3) n 是正整数，如果 $i_1, i_2, \cdots, i_n \lhd a$，则 $i_1 i_2 \cdots i_n \lhd a$。

引理 2.4 [13] [14]：$\mathscr{A}$ 是一个完备代数正规类，R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类，$a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$。如果 $a/i \in \mathrm{PR}$，则 $\mathrm{R}(a) \leqslant i$。

引理 2.5 [15]：$\mathscr{A}$ 是一个完备代数正规类，K 为 $\mathscr{A}$ 的一个子类，K 中每个代数的理想都在 K 中(即 K 对理想封闭)。则 $\mathrm{R} = \{a \in A \mid \forall i \lhd a, 0 \neq a/i \notin \mathrm{K}\}$ 是一个根类(称由 K 确定的上根，记为 UK)，且 $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{PR}$。进一步有：如果 R_1 是一个根类，且 $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{PR}_1$，则 $\mathrm{R}_1 \subseteq \mathrm{R}$，记为根类 $\mathrm{R}_1 \leqslant \mathrm{R}$。

引理 2.6 [15]：$\mathscr{A}$ 是一个完备代数正规类，$\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，$k \lhd i$，$\bar{k}$ 是 a 的包含 k 的最小理想。则 $\bar{k} = k \vee ak \vee ka \vee aka$，且 $\bar{k}^3 \leqslant k$。

引理 2.7 [24] [25]：设 $a \in \mathscr{A}$ 是一个非零代数，$\phi_a : L_a^s \to P(S_a)$ 是完备代数正规类中 L_a^s 到 $P(S_a)$ 的映射。则 $\forall i, j \in L_a^s$ 有：

$i \leqslant j$ 当且仅当 $\phi_a(i) \subseteq \phi_a(j)$。

引理 2.8 [24] [25]：设 $a \in \mathscr{A}$ 是一个非零代数，$\phi_a : L_a^s \to P(S_a)$ 是完备代数正规类中 L_a^s 到 $P(S_a)$ 的映射，$0 \neq t \in S_a$，$\varnothing \neq A \subseteq S_a$。则：

1) 存在 a 的一个最大的理想 i_t，使得 $t \notin \phi_a(i_t)$；

2) 分别存在 a 的一个最小的在 ϕ_a 下的像包含 t 的子代数 $\langle t\rangle$、右理想 $\langle t)$、左理想 $(t\rangle$、理想 (t)，且

$$\langle t\rangle=\wedge\left\{b\in L_a^s \mid t\in\phi_a(b)\right\},\quad \langle t)=\wedge\left\{b\in L_a^r \mid t\in\phi_a(b)\right\},$$

$$(t\rangle=\wedge\left\{b\in L_a^l \mid t\in\phi_a(b)\right\},\quad (t)=\wedge\left\{b\in L_a \mid t\in\phi_a(b)\right\},$$

分别称 t 生成的主子代数 $\langle t\rangle$、主右理想 $\langle t)$、主左理想 $(t\rangle$ 及主理想 (t)；

3) 分别存在 a 的一个最小的 ϕ_a 下的像包含 A 的子代数 $\langle A\rangle$、右理想 $\langle A)$、左理想 $(A\rangle$、理想 (A)，且

$$\langle A\rangle=\wedge\left\{b\in L_a^s \mid A\in\phi_a(b)\right\},\quad \langle A)=\wedge\left\{b\in L_a^r \mid A\subseteq\phi_a(b)\right\},$$

$$(A\rangle=\wedge\left\{b\in L_a^l \mid A\in\phi_a(b)\right\},\quad (t)=\wedge\left\{b\in L_a \mid A\in\phi_a(b)\right\},$$

分别称 A 生成的子代数 $\langle A\rangle$、右理想 $\langle A)$、左理想 $(A\rangle$ 及理想 (A)；

4) $\forall i\in L_a^s$，$i=\vee\left\{\langle t\rangle \mid t\in\phi_a(i)\right\}$；$\forall i\in L_a^r$，$i=\vee\left\{\langle t) \mid t\in\phi_a(i)\right\}$；$\forall i\in L_a^l$，$i=\vee\left\{(t\rangle \mid t\in\phi_a(i)\right\}$；$\forall i\in L_a$，$i=\vee\left\{(t) \mid t\in\phi_a(i)\right\}$；

5) $\forall i\in L_a, t\in S_a$，则 $i\wedge\langle t\rangle=\langle t\rangle$ 当且仅当 $t\in\phi_a(i)$。

注 1 引理 2.8 中性质(5)在文献[24] [25]中由于笔误写成了“$i\vee\langle t\rangle=\langle t\rangle$ 当且仅当 $t\in\phi_a(i)$”。

根类的判别经常可用以下 2 组条件。

定理 2.9: $\mathscr{A}$ 是一个代数类，$\mathrm{R}\subseteq\mathscr{A}$，R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类 $\Leftrightarrow$ R 满足以下 3 个条件：

a) $\forall a\in\mathscr{A}$，$i\lhd a$，如果 $a\in\mathrm{R}$，则 $a/i\in\mathrm{R}$ (即 R 商闭)；

b) $\forall a\in\mathscr{A}$，a 有一个最大的 R-理想(记为 R(a))；

$\overline{\mathrm{c}}$) $\forall a\in\mathscr{A}$，$i\lhd a$，如果 $i, a/i\in\mathrm{R}$，则有 $a\in\mathrm{R}$ (称 R 扩张闭)。

证明 “$\Rightarrow$”此处只需证明由条件(a), (b), (c)可推出条件($\overline{\mathrm{c}}$)。$\forall a\in\mathscr{A}$，$i\lhd a$，$i, a/i\in\mathrm{R}$，如果 $a\notin\mathrm{R}$，则由条件(b), (c)有 $\mathrm{R}(a/\mathrm{R}(a))=0$，$a/\mathrm{R}(a)\neq 0$。又由条件(b)有 $i\le\mathrm{R}(a)$，所以 $a/\mathrm{R}(a)\sim(a/i)/(\mathrm{R}(a)/i)$，由 $a/i\in\mathrm{R}$ 及性质(a)有 $a/\mathrm{R}(a)\in\mathrm{R}$，即 $\mathrm{R}(a/\mathrm{R}(a))=a/\mathrm{R}(a)$，矛盾。所以 $a\in\mathrm{R}$，即条件($\overline{\mathrm{c}}$)成立；

“$\Leftarrow$”此处只需证明由条件(a), (b), ($\overline{\mathrm{c}}$)可推出条件(c)。$\forall a\in\mathscr{A}$，有 $\mathrm{R}(a/\mathrm{R}(a))=i/\mathrm{R}(a)$，$i\lhd a$，$i\ge\mathrm{R}(a)$，则由条件($\overline{\mathrm{c}}$)及 $i/\mathrm{R}(a)$，$\mathrm{R}(a)\in\mathrm{R}$ 有 $i\in\mathrm{R}$，即 i 是 a 的 R-理想，由条件(b)有 $i\le\mathrm{R}(a)$，所以 $\mathrm{R}(a/\mathrm{R}(a))=i/\mathrm{R}(a)=0$，即条件(c)成立。证毕。

定理 2.10: $\mathscr{A}$ 是一个代数类，$\mathrm{R}\subseteq\mathscr{A}$，R 为 $\mathscr{A}$ 中的一个根类 $\Leftrightarrow$ R 满足以下 3 个条件：

a) $\forall a\in\mathscr{A}$，$i\lhd a$，如果 $a\in\mathrm{R}$，则 $a/i\in\mathrm{R}$ (即 R 商闭)；

$\overline{\mathrm{b}}$) $\forall a\in\mathscr{A}$，如果 $i_1\lhd i_2\lhd\cdots\lhd i_\mu\lhd\cdots$ 是 a 的 R-理想升链(即 $\forall\mu, i_\mu\in\mathrm{R}$)，则理想 $\underset{\mu}{\vee} i_\mu\in\mathrm{R}$ (称 R 有归纳性质)；

$\overline{\mathrm{c}}$) $\forall a\in\mathscr{A}$，$i\lhd a$，如果 $i, a/i\in\mathrm{R}$，则有 $a\in\mathrm{R}$ (称 R 扩张闭)。

证明 “$\Rightarrow$”此处只需证明由条件(a), (b), ($\overline{\mathrm{c}}$)可推出条件($\overline{\mathrm{b}}$)。$\forall a\in\mathscr{A}$，由条件(a), (b), (c)有 $\mathrm{R}(a)=\left\{\underset{\mu}{\vee} i_\mu \mid i_\mu\lhd a, i_\mu\in\mathrm{R}\right\}$。如果 $i_1\lhd i_2\lhd\cdots\lhd i_\mu\lhd\cdots$ 是 a 的 R-理想升链，取 $b=\vee i_\mu\lhd a$，从而 $i_1\lhd i_2\lhd\cdots\lhd i_\mu\lhd\cdots$ 是 b 的 R-理想升链，则 $\mathrm{R}(b)=\left\{\underset{\nu}{\vee} j_\nu \mid j_\nu\lhd b, j_\nu\in\mathrm{R}\right\}\ge\underset{\mu}{\vee} i_\mu=b$，即 $b=\vee i_\mu\in\mathrm{R}$，故条件($\overline{\mathrm{b}}$)成立；

“$\Leftarrow$”此处只需证明由条件(a), ($\overline{\mathrm{b}}$), ($\overline{\mathrm{c}}$)可推出条件(b)。$\forall a\in\mathscr{A}$，由条件($\overline{\mathrm{b}}$)及 Zorn 引理 a 有极大 R-理想 b。对 a 的任意 R-理想 k，考虑 $(b\vee k)/k\sim b/(b\wedge k)\in\mathrm{R}$，$k\in\mathrm{R}$，从而由条件($\overline{\mathrm{c}}$)有 $b\vee k\in\mathrm{R}$，由 b 的极大性有 $b\vee k=b$，所以 $b=\left\{\underset{\mu}{\vee} i_\mu \mid i_\mu\lhd a, i_\mu\in\mathrm{R}\right\}$ 是 a 的最大 R-理想，即条件(b)成立。证毕。

3. 点态化完备代数正规类

$\mathscr{A}$ 是一个完备代数正规类，$\phi_a : L_a^s \to P(S_a)$ 是完备代数正规类中 L_a^s 到 $P(S_a)$ 的映射[24] [25]。

则有：

引理 3.1: 设 0 是 $\mathscr{A}$ 的零代数，则 $\forall s \in L_a^s$，有 $0s = s0 = 0$。

证明 $\forall s \in L_a^s$，$0 \in L_a$，有 $0a, a0 \le 0$，故 $0s, s0 \le 0$，所以 $0s = s0 = 0$。证毕。

引理 3.2: 设 $a \in \mathscr{A}$，$0 \in L_a^s$ 是 a 的零子代数，$s \in L_a^s$ 是 a 的任意子代数，单点集 $\phi_a(0) = S_0 = \{0'\}$，则：

1) $0' \in \phi_a(s)$，$\langle \phi_a(s) \rangle = s$；

2) $\langle 0' \rangle = \langle 0' \rangle = (0' \rangle = (0') = 0$。

今后都记为 $0 \in \phi_a(s)$，$\langle 0 \rangle = \langle 0) = (0 \rangle = (0) = 0$。

证明 1) $\phi_a(0) = S_0 = \{0'\}$，$0 \leqslant s$，所以 $\{0'\} = \phi_a(0) \subseteq \phi_a(s)$，即 $0' \in \phi_a(s)$。$0 \leqslant s$，所以 $\{0'\} = \phi_a(0) \subseteq \phi_a(s)$，即 $0' \in \phi_a(s)$；

2) 此处只需证明 $\langle 0' \rangle = 0$。因为 $\phi_a(0) = S_0 = \{0'\}$，即 0 是 a 的使得 $0' \in \phi_a(0)$ 一个子代数，故 $0 = \langle 0' \rangle = \wedge \left\{ s \in L_a^s \mid 0' \in \phi_a(s) \right\}$。证毕。

引理 3.3: 设 $a \in \mathscr{A}$，$x \in S_a$，则 $\langle x \rangle = 0$ 当且仅当 $x = 0$。

证明 由引理 3.2，此处只需证明 $\langle x \rangle = 0$ 时有 $x = 0$。如果 $x \ne 0$，说明 $\phi_a(\langle x \rangle)$ 有 2 个以上元素，从而不是单点集，因此 $\langle x \rangle \ne 0$，矛盾。所以 $x = 0$。证毕。

在 ϕ_a 定义中取 $x \in S_a, A = \{x\}$，有：

引理 3.4: 设 $a \in \mathscr{A}$，$\forall i \lhd a$，满射 $\gamma_i : S_\alpha \to S_{\alpha/i}$ 是完备代数正规类中定义的映射[24] [25]，$x \in S_a$，则 $\langle \gamma_i(x) \rangle = (\langle x \rangle \vee i) / i$。

引理 3.5: 设 $a \in \mathscr{A}$，$\forall i \lhd a$，$s \le a$，则 $\gamma_i(\phi_a(s)) = (s \vee i) / i$。

证明 由 ϕ_a 定义条件(4)，有 $\gamma_i(\phi_a(s)) = (\langle \phi_a(s) \rangle \vee i) / i = (s \vee i) / i$。证毕。

设 $\mathscr{A}$ 是一个完备代数正规类，$\forall a \in \mathscr{A}$，非空集 S_a 和一个单射 $\phi_a : L_a^s \to P(S_a)$ 如前定义。如果对正整数 n，$\forall x \in S_a$，存在一个 $y_s \subseteq \langle x \rangle^n$，$y_r, y_l, y \in S_a$，使得 $\langle x \rangle^{n+1} = \langle x \rangle \langle y_s \rangle = \langle y_s \rangle \langle x \rangle$，$\langle x)^n = (y_r)$，$(x \rangle^n = (y_l)$，$\langle x \rangle^n = (y)$；对正整数 n，S_a 的非空有限子集或可数子集 A，存在有限子集 $A'_s \subseteq \langle A \rangle^n$，$A'_r, A'_l, A' \subseteq S_a$，使得 $\langle A \rangle^{n+1} = \langle A \rangle \langle A'_s \rangle = \langle A'_s \rangle \langle A \rangle$，$\langle A)^n = \langle A'_r)$，$(A \rangle^n = (A'_l \rangle$，$(A)^n = (A')$，则称 $\mathscr{A}$ 是一个点态化完备代数正规类。$\forall x \in S_a$，称 x 是 a 的一个点。

设 S 是一个非空集，S 上的点乘积定义为 S 上一个满足以下条件的二元运算'$\cdot$'：

1) $\forall x, y \in S$，都有 $x \cdot y \in S$ （$x \cdot y$ 记为 xy）；

2) $\forall x, y, z \in S$，有 $(xy)z = x(yz)$ （记为 xyz）；

3) 存在唯一的单点 $0' \in S$ （$0'$ 也记为 0），满足：$\forall x \in S$，有 $0x = x0 = 0$。

S 是一个带乘积的集合，$A, B \subseteq S$，则定义：$AB = \{ xy \mid x \in A, y \in B \}$。

为了更方便的刻画幂零性，对带点乘积的点态化完备代数正规类进行一点加强：

定义 3.6: 设 $\mathscr{A}$ 是一个点态化完备代数正规类，如果 $\mathscr{A}$ 满足点乘积公理：

A9 (点乘积公理). $\forall a \in \mathscr{A}$，$S_a$ 是一个带乘积的集合。

且 $\forall x, y \in S_a$，$i \lhd a$，$s_1, s_2, \cdots, s_k \le a$，正整数 n，$\phi_a(\langle x \rangle \langle y \rangle) = \phi_a(\langle x \rangle) \phi_a(\langle y \rangle)$，$\langle x \rangle^n \le \langle x^n \rangle$，$\forall i \lhd a$，对满射 $\gamma_i : S_\alpha \to S_{\alpha/i}$，满足 $\gamma_i(xy) = \gamma_i(x)\gamma_i(y)$，且 $x \in \phi_a(s_1 \vee s_2 \vee \cdots \vee s_k)$，则存在 $x_i \in \phi_a(s_i)$ （$i = 1, 2, \cdots, k$），使得

$$x \in \phi_a(\langle x_1 \rangle \vee \langle x_2 \rangle \vee \cdots \vee \langle x_k \rangle),$$

$$x_i \in \phi_a(\langle x\rangle \vee \langle x_1\rangle \vee \cdots \vee \langle x_{i-1}\rangle \vee \langle x_{i+1}\rangle \vee \cdots \vee \langle x_k\rangle)\text{，}\quad i=1,2,\cdots,k\text{。}$$

则称 $\mathscr{S}$ 是一个带点乘积的点态化完备代数正规类，简称点态化完备代数正规类。

注 2 本文对点态化完备代数正规类乘积性质相对文献[24] [25]进行了一些加强。

文中后面所称点态化完备代数正规类都是指带点乘积的点态化完备代数正规类。

根据点态化完备代数正规类定义可知，点态化完备代数正规类是完备代数正规类及可积代数正规类，从而参考文献中关于完备代数正规类及可积代数正规类的结论在点态化完备代数正规类中都成立。从而结合环类 $\mathscr{R}$ 和大半环类 $\mathcal{S}_B$ 都是点态化完备代数正规类。

引理 3.7: 设 $a\in\mathscr{S}$， $x,y\in S_a$。

1) $xy\in\phi_a(\langle x\rangle\langle y\rangle)$，从而 $\forall s\le a,x,y\in S$，有 $xy\in\phi_a(s)$；

2) n 是正整数，则 $x^n\in\phi_a(\langle x\rangle^n)$，$\langle x\rangle^n=\langle x^n\rangle$；

3) x 是幂零元当且仅当存在正整数 n，使得 $x^n=0$。

证明 1) 因为 $x\in\phi_a(\langle x\rangle),y\in\phi_a(\langle y\rangle)$，所以 $xy\in\phi_a(\langle x\rangle)\phi_a(\langle y\rangle)=\phi_a(\langle x\rangle\langle y\rangle)$；

2) $n=1$ 时有 $x\in\phi_a(\langle x\rangle)$，$\langle x\rangle=\langle x\rangle$；$n=2$ 时有 $x^2=xx\in\phi_a(\langle x\rangle\langle x\rangle)=\phi_a(\langle x\rangle^2)$，所以 $\langle x^2\rangle\le\langle x\rangle^2$；又因为 $\langle x\rangle^2\le\langle x^2\rangle$，所以 $\langle x\rangle^2=\langle x^2\rangle$。即 $n=1$，2 时结论成立。

设 $n=k-1$ 时 $x^{k-1}\in\phi_a(\langle x\rangle^{k-1})$，$\langle x\rangle^{k-1}=\langle x^{k-1}\rangle$ 结论成立，则 n=k 时有

$$x^k=x^{k-1}x\in\phi_a(\langle x^{k-1}\rangle\langle x\rangle)=\phi_a(\langle x^{k-1}\rangle)\phi_a(\langle x\rangle)=\phi_a(\langle x\rangle^{k-1}\langle x\rangle)=\phi_a(\langle x\rangle^k)\text{，}$$

从而 $\langle x^k\rangle\le\langle x\rangle^k$；又因为 $\langle x\rangle^k\le\langle x^k\rangle$，所以 $\langle x\rangle^k=\langle x^k\rangle$。即 $n=k$ 时结论(2)成立。

根据数学归纳法，(2)中结论对所有正整数 n 成立。

3) x 是幂零元，则存在正整数 n，使得 $\langle x\rangle^n=0$，即 $\langle x^n\rangle=0$，从而 $x^n=0$。

若存在正整数 n，使得 $x^n=0$，则 $\langle x\rangle^n=\langle x^n\rangle=\langle 0\rangle=0$，即 x 是幂零元。证毕。

4. 点态化完备代数正规类中的 λ-根与正则根

$\mathscr{S}$ 是一个点态化完备代数正规类。

定义 4.1: $a\in\mathscr{S}$，$\forall x\in S_a$，设 $axa=\langle\{yxz\mid y,z\in S_a\}\rangle$，$xax=\langle\{xyx\mid y\in S_a\}\rangle$。

1) $x\in S_a$，如果有 $\langle x\rangle\le axa$，则称 x 是 a 的一个 λ-元素；

2) 如果 $\forall x\in S_a$，x 是 a 的 λ-元素，则称 a 是一个 λ-代数；

3) $x\in S_a$，如果有 $\langle x\rangle\le xax$，则称 x 是 a 的一个正则元素；

4) 如果 $\forall x\in S_a$，x 是 a 的正则元素，则称 a 是一个正则代数。

记所有 λ-代数的类为 λ，记所有正则代数的类为 ν。

定理 4.1: λ-代数类 λ 是一个根类。

证明: 1) 设 $a\in\lambda$，$i\lhd a$，$\forall x\in S_{a/i}$，对满射 $\gamma_i:S_\alpha\to S_{\alpha/i}$，存在 $y\in S_a$，$x=\gamma_i(y)$。由 $a\in\lambda$，有 $\langle y\rangle\le aya$，所以 $\langle x\rangle=\langle\gamma_i(y)\rangle=(\langle y\rangle\vee i)/i\le(aya\vee i)/i=(a/i)((\langle y\rangle\vee i)/i)(a/i)=(a/i)\langle\gamma_i(y)\rangle(a/i)=(a/i)\langle x\rangle(a/i)$，从而 x 是 a/i 的 λ-元素，a/i 是 λ-代数，代数类 λ 对商闭。

2) $\forall a\in\mathscr{S}$，如果 $i_1\lhd i_2\lhd\cdots\lhd i_\mu\lhd\cdots$ 是 a 的 λ-理想升链，$\forall x\in\phi_a(\vee i_\mu)=\bigcup\phi_a(i_\mu)$，故存在 μ，使得 $x\in\phi_a(i_\mu)$，因此 $\langle x\rangle\le i_\mu x i_\mu\le(\vee i_\mu)x(\vee i_\mu)$，即 $\vee i_\mu$ 是 λ-代数，代数类 λ 有归纳性质。

3) $\forall a\in\mathscr{S}$，$i\lhd a$，如果 $i,a/i\in\lambda$。$\forall x\in S_a$，$\langle\gamma_i(x)\rangle=(\langle x\rangle\vee i)/i\le(a/i)((\langle x\rangle\vee i)/i)(a/i)=(axa\vee i)/i$，因此 $\langle x\rangle\le axa\vee i$，所以有 $x_1\in\phi_a(axa),x_2\in\phi_a(i)$，使得 $\langle x\rangle\le\langle x_1\rangle\vee\langle x_2\rangle$，$\langle x_2\rangle\le\langle x\rangle\vee\langle x_1\rangle$。因为 $i\in\lambda$，$x_2\in\phi_a(i)$，所以 $\langle x_2\rangle\le ixi\le axa$，故 $\langle x\rangle\le\langle x_1\rangle\vee\langle x_2\rangle\le axa\vee axa=axa$，即 $a\in\lambda$，代数类 λ 扩张闭。

根据定理 2.10，代数类 λ 是一个根类。证毕。

λ-代数类确定的根类 λ 称 λ-根。

定理 4.2： 正则代数类 v 是一个根类。

证明： 1) 设 $a \in \nu$，$i \lhd a$，$\forall x \in S_{a/i}$，对满射 $\gamma_i : S_\alpha \to S_{\alpha/i}$，存在 $y \in S_a$，$x = \gamma_i(y)$。由 $a \in \nu$，有 $\langle y \rangle \le aya$，所以 $\langle x \rangle = \langle \gamma_i(y) \rangle = (\langle y \rangle \vee i)/i \le (yay \vee i)/i = ((\langle y \rangle \vee i)/i)(a/i)((\langle y \rangle \vee i)/i) = \langle \gamma_i(y) \rangle (a/i) \langle \gamma_i(y) \rangle = \langle x \rangle (a/i) \langle x \rangle$，从而 x 是 a/i 的正则元素，a/i 是正则代数，代数类 v 对商闭。

2) $\forall a \in \mathscr{A}$，如果 $i_1 \lhd i_2 \lhd \cdots \lhd i_\mu \lhd \cdots$ 是 a 的 v-理想升链，$\forall x \in \phi_a(\vee i_\mu) = \bigcup \phi_a(i_\mu)$，故存在 μ，使得 $x \in \phi_a(i_\mu)$，因此 $\langle x \rangle \le x i_\mu x \le x(\vee i_\mu)x$，即 $\vee i_\mu$ 是正则代数，代数类 v 有归纳性质。

3) $\forall a \in \mathscr{A}$，$i \lhd a$，如果 $i, a/i \in \nu$。$\forall x \in S_a$，$\langle \gamma_i(x) \rangle = (\langle x \rangle \vee i)/i \le ((\langle x \rangle \vee i)/i)(a/i)((\langle x \rangle \vee i)/i) = (xax \vee i)/i$，因此 $\langle x \rangle \le xax \vee i$，所以有 $x_1 \in \phi_a(xax), x_2 \in \phi_a(i)$，使得 $\langle x \rangle \le \langle x_1 \rangle \vee \langle x_2 \rangle$，$\langle x_2 \rangle \le \langle x \rangle \vee \langle x_1 \rangle$。因为 $i \in \nu$，$x_2 \in \phi_a(i)$，所以 $\langle x_2 \rangle \le xix \le xax$，故 $\langle x \rangle \le \langle x_1 \rangle \vee \langle x_2 \rangle \le xax \vee xax = xax$，即 $a \in \nu$，代数类 v 扩张闭。

根据定理 2.10，代数类 v 是一个根类。证毕。

正则代数类确定的根类 v 称正则根。

5. 小结

本文给出了根类的判别的 2 组等价条件，定义了 λ-代数与正则代数 2 类代数，并证明了 λ-代数类 λ 与正则代数类 v 都是根类。

基金项目

国家自然科学基金(11261067)。

参考文献

[1] Száse, F.A. (1981) Radicals of Rings. John Wiley & Sons, New York.

[2] Gardner, B.J. and Wiegandt, R. (2004) Radical Theory of Rings. Marcel Dekker, New York and Basel. https://doi.org/10.1201/9780203913352

[3] Beidar, K.I., Fong, Y. and Ke, W.-F. (1998) On Complemented Radicals. *Journal of Algebra*, **201**, 328-356. https://doi.org/10.1201/9780203913352

[4] Tumurbat, S. and Zand, H. (2001) Hereditariness, Strongness and Relationship between Brown-McCoy and Behrens radicals. *Contributions to Algebra and Geometry*, **42**, 275-280.

[5] 蔡传仁. 对偶根和 F A SZASZ 的问题 21[J]. 数学学报(中文版), 1989, 32(3): 394-400.

[6] 蔡传仁. 半遗传根的一个特征性质[J]. 数学研究与评论, 1991, 11(1): 9-12.

[7] 谢邦杰. 关于周期环与 Jacobson 环的几个定理[J]. 数学研究与评论, 1982, 2(2): 11-13.

[8] 于宪君.关于 $F_{A,\delta}$-环与广义周期环的几个定理[J].数学研究与评论, 1988, 8(3): 341-345.

[9] 胡小美. 几类与 Jacbson 根相关环的研究[D]: [硕士学位论文]. 杭州: 杭州师范大学, 2017.

[10] 于宪君, 朱捷. 关于周期环的几个定理[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2004, 21(3): 20-22.

[11] 杜现昆, 齐毅. 周期环的刻划[J]. 吉林大学自然科学学报, 2001, 39(3): 29-31.

[12] Puczylowski, E.R. (1993) On General Theory of Radicals. *Algebra Universalis*, **39**, 53-60. https://doi.org/10.1007/BF01196549

[13] Wang, Y. and Zhang, A. (2002) Radicals and Semisimple Classes of the Class of Algebras. *Journal of Anshan Normal University*, **4**, 5-10.

[14] 任艳丽, 王尧. 代数正规类中的遗传根与强半单根[J]. 数学研究与评论, 2004, 24(4): 597-602.

[15] Yang, Z.W. (2006)The Upper Radical Classes of the Class of Algebras. *Journal of Yunnan University* (*Natural Sciences Edition*), **28**, 8-11.

[16] Yang, Z.W. and Pan, J.M. (2008) The Supernilpotent Radical, Special Radical and Bear Radical in Normal Classes of

Product Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **32**, 181-192.

[17] Yang, Z.W. and Pan, J.M. (2010) The Radicals and Likemodules in Normal Classes of Complete Alagebras. Southeast Asian Bulletin of Mathematics , **34**, 377-386.

[18] 杨宗文, 杨柱元. 完备代数正规类的根与右理想[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2006, 31(3): 112-116+120.

[19] 杨宗文, 杨柱元. 子环的和与积[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2007, 29(4): 335-338.

[20] 杨宗文, 杨柱元, 李友宝. 大半环子半环的和与积[J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2007, 32(6): 113-118.

[21] 杨宗文, 杨柱元, 李友宝. 可积代数正规类中半素代数类及半素一致代数类确定的上根[J]. 数学理论与应用, 2008, 28(4): 71-75.

[22] Yang, Z.W., Yang Z.Y. and Li, Y.B. (2010) The General Radicals Theory of the Big Semirings. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **34**, 1149-1167.

[23] Yang, Z.W. and Yang Z.Y. (2011) The Semihereditary and Semisupernilpotent Radicals in Normal Classes of Product Algebras. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **35**, 891-902.

[24] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的亚直既约代数类[J]. 理论数学, 2018, 8(5): 546-554.

[25] 杨宗文, 何青海. 点态化完备代数正规类中的遗传幂等根、补根、对偶根、子幂等根及诣零根[J]. 理论数学, 2018, 8(6): 712-722.