Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(4), 272-281
Published Online April 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.104035

The Construction of Bivariate Minimum-Energy Multi-Wavelet Frames with Dilation Factor *a*

Xu Zhang, Wanshe Li

School of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an Shaanxi
Email: liwanshe@126.com

Received: Mar. 17th, 2020; accepted: Apr. 3rd, 2020; published: Apr. 14th, 2020

Abstract

Based on the minimum-energy multi-wavelet frames, the concept of bivariate minimum-energy multi-wavelet frames with dilation factor *a* and the sufficient and necessary conditions for satisfying the characteristics of bivariate minimum energy multi-wavelet frames are given. Via using the polyphase decomposition that corresponds to the symbol functions for scaling function and wavelet function, the decomposition and reconstruction algorithms of bivariate minimum-energy multi-wavelet frames with dilation factor *a* are presented.

Keywords

Multi-Wavelet, Minimum-Energy Wavelet Frame, Bivariate Minimum-Energy Multi-Wavelet Frames with Dilation Factor *a*

*a*尺度二元最小能量多小波框架的构造

张　旭，李万社

陕西师范大学数学与信息科学学院，陕西　西安
Email: liwanshe@126.com

收稿日期：2020年3月17日；录用日期：2020年4月3日；发布日期：2020年4月14日

摘　要

在最小能量小波多小波框架的基础上，给出了*a*尺度二元最小能量多小波框架的概念，和满足二元最小能量多小波框架特性的充分以及必要条件，利用对尺度函数以及小波函数相应的面具符号进行多相位分

文章引用: 张旭, 李万社. *a* 尺度二元最小能量多小波框架的构造[J]. 理论数学, 2020, 10(4): 272-281.
DOI: 10.12677/pm.2020.104035

解，给出了构造*a*尺度二元最小能量多小波框架的构造算法。

关键词

多小波，最小能量小波框架，*a*尺度二元最小能量多小波框架

1. 引言

在小波理论之后又新发展起一种理论，即框架理论。小波框架是由多种数学学科结合得来的，1952年，框架理论是首先由 Duffin 以及 Schaeffer 给出。我们要说的框架就是一种具有 Riesz 基性质的基，但是却不一定是基，也可以认为它是这一种广义的基。

最小能量小波框架[1] [2] [3] [4] [5]的优点在于可以避免信号在分解以及重构时，对于对偶框架的寻找，也简化了计算过程的繁杂性，并且还能最大可能地去保证数值的稳定性。在框架多分辨分析(FMRA)的基础上，2000 年，由 C.K. Chui 以及 W. He 首先给出了最小能量小波框架。

2. *a* 尺度二元最小能量多小波框架的概念

先给出文章要提到的记号：$\omega=(\omega_1,\omega_2)\in\boldsymbol{R}^2$，$x=(x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^2$，$\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^2)$里函数的内积和 *Fourier* 变换定义如下

$$\langle f,g\rangle=\int_{\boldsymbol{R}^2} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x,\ \forall f,g\in\boldsymbol{L}(\boldsymbol{R}^2)$$
$$\hat{f}(\omega)=\int_{\boldsymbol{R}^2} f(x)\mathrm{e}^{-i\langle x,\omega\rangle}\mathrm{d}x$$

其中 $x\cdot\omega=\langle x,\omega\rangle=x_1\omega_1+x_2\omega_2,\ \omega\in\boldsymbol{R}^2,\ x\in\boldsymbol{R}^2$。

定义向量值函数 $\boldsymbol{\phi}(x)=(\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_r(x))^{\mathrm{T}},\ \phi_i(x)\in\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^2),\ r,i\in\boldsymbol{N}$，平移算子为 $T_k\boldsymbol{\phi}(x)=\boldsymbol{\phi}(x-k)$，伸缩算子为 $D:\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^2)\to\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^2):D\boldsymbol{\phi}(x)=a\boldsymbol{\phi}(ax)$。

定义 1 [6] 假设有正常数 $0<A\le B<+\infty$，使函数族 $\boldsymbol{\psi}^i=(\psi_1^i,\psi_2^i,\cdots,\psi_r^i)^{\mathrm{T}},\ i\in\boldsymbol{N}$ 能够满足

$$A\|f\|^2\le\sum_{i=1}^{N}\sum_{\tau=1}^{r}\sum_{j,k\in\boldsymbol{Z}^2}\left|\left\langle f,\boldsymbol{\psi}_{\tau,j,k}^i\right\rangle\right|^2\le B\|f\|^2,\ \forall f(x)\in\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^2)$$

那么称函数族 $\boldsymbol{\psi}^i=(\psi_1^i,\psi_2^i,\cdots,\psi_r^i)^{\mathrm{T}},\ i\in\boldsymbol{N}$ 是 $\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^2)$的一个紧框架[7] [8]，*A*，*B* 是这个框架的上，下框架界。当 $A=B=1$时，有下列重构公式

$$\|f(x)\|=\sum_{\tau=1}^{r}\sum_{j,k\in\boldsymbol{Z}^2}\left|\left\langle f,\boldsymbol{\psi}_{\tau,j,k}^i\right\rangle\right|^2,\ \forall f\in\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^2) \tag{1}$$

那么称 $\{\boldsymbol{\psi}^i\}$ 是 $\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^2)$的 *Parseval* 框架。

记 $V_k=clos_{L^2(\boldsymbol{R}^2)}\left(span\{\boldsymbol{\phi}_{k,\alpha}(x):\alpha\in\boldsymbol{Z}^2\}\right)$是$\{\boldsymbol{\phi}_{k,\alpha}(x):\alpha\in\boldsymbol{Z}^2\}$在 $L^2(\boldsymbol{R}^2)$上的闭包。

定义 2 [9] 假如每一个$\{V_\tau\}_{\tau\in Z}$是$L^2(\boldsymbol{R}^2)$的闭子空间，而且有$\boldsymbol{\phi}\in V_0$使得$\{V_\tau\}$满足

(1) $\cdots\subset V_\tau\subset V_{\tau+1}\subset V_{\tau+2}\subset\cdots,\tau\in\boldsymbol{Z}$；

(2) $\overline{\bigcup_{\tau\in Z}V_\tau}=\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^2),\bigcap_{\tau\in Z}V_\tau=\{0\}$；

(3) $g(x)\in V_0\Leftrightarrow g(x-k)\in V_0,k\in\boldsymbol{Z}^2$；

(4) $g(x)\in V_\tau\Leftrightarrow g(ax)\in V_{\tau+1},\tau\in\boldsymbol{Z}$；

(5) $\exists\boldsymbol{\phi}(x)\in\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^2)$使$\{\boldsymbol{\phi}(x-k)\}_{k\in\boldsymbol{Z}^2}$为$V_0$的紧框架，那么$\{V_\tau\}_{\tau\in\boldsymbol{Z}}$是*FMRA*，其中$\boldsymbol{\phi}(x)$是*FMRA*的二元尺度函数。

定义 3 若$\{V_\tau\}_{\tau\in\boldsymbol{Z}}$由$\boldsymbol{\phi}(x)=(\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_r(x))^{\mathrm{T}}$生成。设函数族$\boldsymbol{\psi}^i=(\psi_1^i,\psi_2^i,\cdots,\psi_r^i)^{\mathrm{T}},i\in\boldsymbol{N}$符合(3.1.1)，且$\boldsymbol{\psi}^i=(\psi_1^i,\psi_2^i,\cdots,\psi_r^i)^{\mathrm{T}}\subset V_1$，那么称$\boldsymbol{\psi}^i=(\psi_1^i,\psi_2^i,\cdots,\psi_r^i)^{\mathrm{T}},i\in\boldsymbol{N}$生成对应$\boldsymbol{\phi}(x)$的小波紧框架。

定义 4 [10] 若$\boldsymbol{\phi}(x)=(\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_r(x))^{\mathrm{T}},\phi_i(x)\in\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^2)$，而且$\hat{\boldsymbol{\phi}}(\omega)$在原点处连续，对于$\forall f(x)\in\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^2)$，如果一个函数族$\boldsymbol{\psi}^i\in\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^2),i\in\boldsymbol{N}$符合

$$\sum_{\tau=1}^{r}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}^2}\left|\left\langle f,\boldsymbol{\phi}_{\tau,1,k}\right\rangle\right|^2=\sum_{\tau=1}^{r}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}^2}\left|\left\langle f,\boldsymbol{\phi}_{\tau,0,k}\right\rangle\right|^2+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\tau=1}^{r}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}^2}\left|\left\langle f,\boldsymbol{\psi}_{\tau,0,k}^i\right\rangle\right|^2 \tag{2}$$

则称$\{\boldsymbol{\psi}^1,\boldsymbol{\psi}^2,\cdots,\boldsymbol{\psi}^N\}$是与$\boldsymbol{\phi}(x)$相对应的二元最小能量多小波紧框架。其中

$$\boldsymbol{\phi}_{j,k}=a^j\boldsymbol{\phi}(a^jx-k),\boldsymbol{\psi}_{j,k}^i=a^j\boldsymbol{\psi}^i(a^jx-k),i,j\in\boldsymbol{Z},k\in\boldsymbol{Z}^2$$

式(2)等价于

$$\sum_{\tau=1}^{r}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}^2}\left\langle f,\boldsymbol{\phi}_{\tau,1,k}\right\rangle\boldsymbol{\phi}_{\tau,1,k}=\sum_{\tau=1}^{r}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}^2}\left\langle f,\boldsymbol{\phi}_{\tau,0,k}\right\rangle\boldsymbol{\phi}_{\tau,0,k}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\tau=1}^{r}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}^2}\left\langle f,\boldsymbol{\psi}_{\tau,0,k}^i\right\rangle\boldsymbol{\psi}_{\tau,0,k}^i \tag{3}$$

若函数$\boldsymbol{\phi}(x)=(\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_r(x))^{\mathrm{T}},\phi_i(x)\in\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^2)$满足

$$\boldsymbol{\phi}(x)=\sum_{k\in\boldsymbol{Z}^2}\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{\phi}(ax-k),x\in\boldsymbol{R}^2 \tag{4}$$

称上式为r重多尺度函数。此处$\{\boldsymbol{P}_k\}_{k\in\boldsymbol{Z}^2}$为$r\times r$重矩阵序列。

对式(4)两边施行*Fourier*变换有

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}(\omega)=\boldsymbol{P}(z)\hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\omega}{a}\right),z=\mathrm{e}^{-i\omega\backslash a} \tag{5}$$

其中

$$\boldsymbol{P}(z)=\frac{1}{a^2}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}^2}\boldsymbol{P}_kz^k \tag{6}$$

$\boldsymbol{P}(z)$为$\{\boldsymbol{P}_k\}_{k\in\boldsymbol{Z}^2}$的符号函数。对于$\{\boldsymbol{\psi}^1,\boldsymbol{\psi}^2,\cdots,\boldsymbol{\psi}^N\}\subset V_1$根据定义2，就有

$$\boldsymbol{\psi}(x)=\sum_{k\in\boldsymbol{Z}^2}\boldsymbol{Q}_k^l\boldsymbol{\phi}(ax-k),l=1,2,\cdots,\boldsymbol{N} \tag{7}$$

其中$\{\boldsymbol{Q}_k^l\},l=1,2,\cdots,\boldsymbol{N}$是$r\times r$重矩阵序列，等式两边做*Fourier*变换有

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}(\omega)=\boldsymbol{Q}_l(z)\hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\omega}{a}\right),z=\mathrm{e}^{-i\omega\backslash a}$$

$\boldsymbol{Q}_l(z)$为$\{\boldsymbol{Q}_k^l\},l=1,2,\cdots,\boldsymbol{N}$的符号函数，表示为

$$\boldsymbol{Q}_l(z)=\frac{1}{a^2}\sum_{k\in\mathbf{Z}^2}\boldsymbol{Q}_k^l z^k,\ l=1,2,\cdots,\boldsymbol{N} \tag{8}$$

接下来利用 $\boldsymbol{P}(z)$ 和 $\boldsymbol{Q}_l(z), l=1,2,\cdots,\boldsymbol{N}$ 来构造一个 $(\boldsymbol{N}+1)r\times a^2r$ 阶的分块矩阵

$$\boldsymbol{D}(z)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}(z) & \boldsymbol{P}(\omega_1 z) & \cdots & \boldsymbol{P}(\omega_{a^2-1}z)\\ \boldsymbol{Q}_1(z) & \boldsymbol{Q}_1(\omega_1 z) & \cdots & \boldsymbol{Q}_1(\omega_{a^2-1}z)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{Q}_N(z) & \boldsymbol{Q}_N(\omega_1 z) & \cdots & \boldsymbol{Q}_N(\omega_{a^2-1}z)\end{bmatrix} \tag{9}$$

$\boldsymbol{D}(z)$ 的共轭转置我们用 $\boldsymbol{D}^*(z)$ 来表示。

3. *a* 尺度二元最小能量多小波框架的特征

定理 1 若 $\boldsymbol{P}(z)$ 和 $\boldsymbol{Q}_l(z)$ 里都为 *Laurent* 多项式，并且 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 是 $\{\boldsymbol{V}_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 的尺度函数，则等价于

(1) $\{\boldsymbol{\psi}^1,\boldsymbol{\psi}^2,\cdots,\boldsymbol{\psi}^N\}$ 为与 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 相应的二元最小能量多小波框架生成元；

(2) $\forall|z|=1$ 满足

$$\boldsymbol{D}^*(z)\cdot\boldsymbol{D}(z)=\boldsymbol{I}_{a^2r}; \tag{10}$$

(3)

$$\alpha_{ml,ij}=\sum_{k\in\mathbf{Z}^2}\sum_{\tau=1}^{r}\left(\boldsymbol{P}_{l-ak}^{\tau i*}\boldsymbol{P}_{m-ak}^{\tau j}+\sum_{t=1}^{N}\boldsymbol{Q}_{l-ak}^{t,\tau i*}\boldsymbol{Q}_{m-ak}^{t,\tau j}\right)-a^2\delta_{ml,ij} \tag{11}$$

符合 $\alpha_{ml,ij}=0, \forall m,l,k\in\mathbf{Z}^2; i,j=1,2,\cdots,r$ 且 $\delta_{ml,ij}$ 是 *Kronecker* 符号为

$$\delta_{ml,ij}=\begin{cases}1 & m=l,i=j\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

证明：由式(4)和(7)以及 $\alpha_{ml,ij}$，可以得到式(3)的等价式子

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}^2}\sum_{m\in\mathbf{Z}^2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_{ml,ij}\left\langle f,\boldsymbol{\phi}_i(ax-m)\right\rangle\boldsymbol{\phi}_j(ax-m)=0 \tag{12}$$

并且有，式(10)等价于

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}^*(z)\boldsymbol{P}(z)+\sum_{t=1}^{N}\boldsymbol{Q}_t^*(z)\boldsymbol{Q}_t(z)=\boldsymbol{I}_r\\ \boldsymbol{P}^*(z)\boldsymbol{P}(\omega_j z)+\sum_{t=1}^{N}\boldsymbol{Q}_t^*(z)\boldsymbol{Q}_t(\omega_z)=\mathbf{0}\\ j=1,2,\cdots,a^2-1;\ \forall|z|=1\end{cases} \tag{13}$$

即有

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{a^2-1}\boldsymbol{P}^*(\omega_k z)\boldsymbol{P}(z)+\sum_{t=1}^{N}\sum_{k=0}^{a^2-1}\boldsymbol{Q}_t^*(\omega_k z)\boldsymbol{Q}_t(z)=\boldsymbol{I}_r\\ \left(\boldsymbol{P}^*(z)-\sum_{k=0}^{a^2-1}\boldsymbol{P}^*(\omega_k z)\right)\boldsymbol{P}(z)+\sum_{t=1}^{N}\left(\boldsymbol{Q}_t^*(z)-\sum_{k=1}^{a^2-1}\boldsymbol{Q}_t^*(\omega_k z)\right)\boldsymbol{Q}_t(z)=\boldsymbol{I}_r\\ \left(\sum_{k=0}^{a^2-1}\boldsymbol{P}^*(\omega_k z)-2\boldsymbol{P}^*(\omega_l z)\right)\boldsymbol{P}(z)+\sum_{t=1}^{N}\left(\sum_{k=0}^{a^2-1}\boldsymbol{Q}_t^*(\omega_k z)-2\boldsymbol{Q}_t^*(\omega_l z)\right)\boldsymbol{Q}_t(z)=\boldsymbol{I}_r\\ l=1,2,\cdots,a^2-1;\ \forall|z|=1\end{cases}$$

因为 $\forall |z|=1, \bar{z}^k = z^{-k}, \omega_l^k = \omega_k^l = \omega^{kl}$，有

$$\sum_{l=0}^{a^2-1} \omega_l^k = \sum_{k=0}^{a^2-1} \omega_k^l = \begin{cases} 0 & \omega_k \neq 1 \\ a & \omega_k = 1 \end{cases}$$

那么上式也可以写为

$$\begin{cases} \sum_{k\in \mathbf{Z}^2} \boldsymbol{P}_{-ak}^* z^{ak} \boldsymbol{P}(z) + \sum_{t=1}^{\boldsymbol{N}} \sum_{k\in \mathbf{Z}^2} \boldsymbol{Q}_{-ak}^{t*} z^{ak} \boldsymbol{Q}_t(z) = \boldsymbol{I}_r \\ \left(\sum_{l=1}^{a^2-1} \sum_{k\in \mathbf{Z}^2} \boldsymbol{P}_{l-ak}^* z^{ak-l} \right) \boldsymbol{P}(z) + \sum_{t=1}^{\boldsymbol{N}} \left(\sum_{l=1}^{a^2-1} \sum_{k\in \mathbf{Z}^2} \boldsymbol{Q}_{l-ak}^{t*} z^{ak-l} \right) \boldsymbol{Q}_t(z) = (a-1)\boldsymbol{I}_r \\ \left(\sum_{l=1}^{a^2-1} \mathrm{e}^{-\frac{2sl\pi}{a}i} \sum_{k\in \mathbf{Z}^2} \boldsymbol{P}_{l-ak}^* z^{ak-l} \right) \boldsymbol{P}(z) + \sum_{t=1}^{\boldsymbol{N}} \left(\sum_{l=1}^{a^2-1} \mathrm{e}^{-\frac{2sl\pi}{a}i} \sum_{k\in \mathbf{Z}^2} \boldsymbol{Q}_{l-ak}^{t*} z^{ak-l} \right) \boldsymbol{Q}_t(z) = -\boldsymbol{I}_r \\ s = 1,2,\cdots,a^2-1;\ \forall |z| = 1 \end{cases}$$

利用 *Cramer* 法则和 *Vandermonde* 行列式的性质可将上变形为

$$\begin{cases} \sum_{k\in \mathbf{Z}^2} \boldsymbol{P}_{-ak}^* z^{ak} \boldsymbol{P}(z) + \sum_{t=1}^{\boldsymbol{N}} \sum_{k\in \mathbf{Z}^2} \boldsymbol{Q}_{-ak}^{t*} z^{ak} \boldsymbol{Q}_t(z) = \boldsymbol{I}_r \\ \sum_{k\in \mathbf{Z}^2} \boldsymbol{P}_{1-ak}^* z^{ak-1} \boldsymbol{P}(z) + \sum_{t=1}^{\boldsymbol{N}} \sum_{k\in \mathbf{Z}^2} \boldsymbol{Q}_{1-ak}^{t*} z^{ak-1} \boldsymbol{Q}_t(z) = \boldsymbol{I}_r \\ \qquad \vdots \\ \sum_{k\in \mathbf{Z}^2} \boldsymbol{P}_{a^2-1-ak}^* z^{ak-a^2+1} \boldsymbol{P}(z) + \sum_{t=1}^{\boldsymbol{N}} \sum_{k\in \mathbf{Z}^2} \boldsymbol{Q}_{a^2-1-ak}^{t*} z^{ak-a^2+1} \boldsymbol{Q}_t(z) = \boldsymbol{I}_r \end{cases}$$

对上面式子中所有等式两边乘 $\hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\omega}{a}\right)\mathrm{e}^{-\frac{l\omega}{a}i}, l = 0,1,\cdots,a^2-1$，有

$$\sum_{k\in \mathbf{Z}^2} \left(\boldsymbol{P}_{l-ak}^* z^{ak} \boldsymbol{P}(z) + \sum_{t=1}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{Q}_{l-ak}^{t*} z^{ak} \boldsymbol{Q}_t(z) \right) \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\omega}{a}\right) = \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\omega}{a}\right) \mathrm{e}^{-\frac{l\omega}{a}i}$$

即为

$$\sum_{k\in \mathbf{Z}^2} \left(\boldsymbol{P}_{l-ak}^* z^{ak} \hat{\boldsymbol{\phi}}(\omega) + \sum_{t=1}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{Q}_{l-ak}^{t*} z^{ak} \hat{\boldsymbol{\psi}}^t(\omega) \right) = \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\omega}{a}\right) \mathrm{e}^{-\frac{l\omega}{a}i}$$

对上式做 *Fourier* 逆变换就有

$$\sum_{k\in \mathbf{Z}^2} \left(\boldsymbol{P}_{l-ak}^* z^{ak} \boldsymbol{\phi}(x-k) + \sum_{t=1}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{Q}_{l-ak}^{t*} z^{ak} \boldsymbol{\psi}^t(x-k) \right) = a^2 \boldsymbol{\phi}(ax-l)$$

根据式(4)和(7)，上式就可变形为

$$\sum_{k\in \mathbf{Z}^2} \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ml,ij} \boldsymbol{\phi}_j(ax-m) = 0,\ i = 1,2,\cdots,r;\ l \in \mathbf{Z}^2 \tag{14}$$

由(11)式证明得到式(14)，也就有了(12)式，现在我们来证明由(12)式得到(11)式。$\forall f(x) \in \boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^2)$ 是紧支撑函数，若固定 m，则 $\alpha_{ml,ij}$ 仅有有限个不为零，那么泛函

$$\beta_{ij}(f) = \sum_{m} \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ml,ij} \left\langle f, \boldsymbol{\phi}_l(ax-m) \right\rangle,\ j = 1,2,\cdots,r;\ l \in \mathbf{Z}^2$$

仅有有限个不为零。

接下来对(12)式做傅里叶变换有

$$\sum_{l}\sum_{j=1}^{r}\beta_{ij}(f)\hat{\boldsymbol{\phi}}_l(\omega)\mathrm{e}^{-\frac{l\omega}{a}i}=0$$

由于$\hat{\boldsymbol{\phi}}_l(\omega)$不是平凡函数，所以$\sum_{l}\sum_{j=1}^{r}\beta_{ij}(f)\mathrm{e}^{-\frac{l\omega}{a}i}=0$，既有$\beta_{ij}(f)=0, l\in\boldsymbol{Z}^2, j=1,2,\cdots,r$，故

$$\left\langle f,\sum_{m}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ml,ij}\boldsymbol{\phi}_i(ax-m)\right\rangle=0,\ j=1,2,\cdots,r;l\in\boldsymbol{Z}^2$$

设$f=\sum_{m}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ml,ij}\phi_i(ax-m)$，则有$\sum_{m}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ml,ij}\boldsymbol{\phi}_i(ax-m)=0$，最后做傅里叶变换就可得$\alpha_{ml,ij}=0, i,j=1,2,\cdots,r;\forall m,l\in\boldsymbol{Z}^2$，综上，定理得证。

定理 2 若尺度函数$\boldsymbol{\phi}(x)=(\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_r(x))^{\mathrm{T}},\phi_i(x)\in\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^2),r,i\in\boldsymbol{N}$紧支撑，并有$\hat{\boldsymbol{\phi}}(0)=1$，设$\{\boldsymbol{\psi}^1,\boldsymbol{\psi}^2,\cdots,\boldsymbol{\psi}^N\}$是对应的二元最小能量多小波框架生成元，则

$$\sum_{l=0}^{a^2-1}\sum_{j=1}^{r}\left|p_{ij}(\omega_l z)\right|^2\le 1,\ \forall|z|=1,1\le i\le r,0\le l\le a^2-1. \tag{15}$$

证明：由于$\boldsymbol{D}^*(z)\cdot\boldsymbol{D}(z)=\boldsymbol{I}_{a^2r}$那么我们就可以得到$\sum_{j=1}^{r}\left|p_{ij}(\omega_l z)\right|^2\le 1,1\le i\le r$。下面只看式(15)中当$i=1$的情况，$i$为其他数值时证明过程类似。

记$\boldsymbol{f}(z)=\left[p_{11}(z),\cdots,p_{1r}(z),\cdots,p_{11}(\omega_{a^2-1}z),\cdots,p_{1r}(\omega_{a^2-1}z)\right]$为$\boldsymbol{D}(z)$的第一行元素，将$\boldsymbol{D}(z)$中剩下的记为矩阵$\boldsymbol{F}(z)$，那么根据式(10)就有

$$\boldsymbol{f}^*(z)\boldsymbol{f}(z)+\boldsymbol{F}^*(z)\boldsymbol{F}(z)=\boldsymbol{I}_{a^2r}$$

由$\boldsymbol{F}^*(z)\boldsymbol{F}(z)=\boldsymbol{I}_{a^2r}-\boldsymbol{f}^*(z)\boldsymbol{f}(z)$是*Hermitian*矩阵，那么就有

$$det\left(\boldsymbol{I}_{a^2r}-\boldsymbol{f}^*(z)\boldsymbol{f}(z)\right)\ge 0,\ \forall|z|=1$$

即有

$$\sum_{l=0}^{a^2-1}\sum_{j=1}^{r}\left|p_{1j}(\omega_l z)\right|^2\le 1,\ \forall|z|=1$$

其实

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{a^2r} & \boldsymbol{f}^*(z)\\ \boldsymbol{f}(z) & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{a^2r} & -\boldsymbol{f}^*(z)\\ -\boldsymbol{f}(z) & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{a^2r}-\boldsymbol{f}^*(z)\boldsymbol{f}(z) & 0\\ 0 & 1-\boldsymbol{f}(z)\boldsymbol{f}^*(z)\end{pmatrix}$$

其中

$$\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{a^2r} & \boldsymbol{f}^*(z)\\ \boldsymbol{f}(z) & 1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{a^2r} & \boldsymbol{f}^*(z)\\ 0 & 1-\boldsymbol{f}(z)\boldsymbol{f}^*(z)\end{pmatrix}\right|$$

$$\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{a^2r} & -\boldsymbol{f}^*(z)\\ -\boldsymbol{f}(z) & 1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{a^2r} & -\boldsymbol{f}^*(z)\\ 0 & 1-\boldsymbol{f}(z)\boldsymbol{f}^*(z)\end{pmatrix}\right|$$

而 $det\left(\boldsymbol{I}_{a^2r}-\boldsymbol{f}^*(z)\boldsymbol{f}(z)\right)\ge 0$ 所以 $1-\boldsymbol{f}(z)\boldsymbol{f}^*(z)\ge 0, \forall|z|=1$。

接下来将 $\boldsymbol{P}(z),\boldsymbol{Q}_j(z), j=1,2,\cdots,\boldsymbol{N}$ 写为多相位形式

$$\boldsymbol{P}(z)=\frac{1}{a}\left(\boldsymbol{P}_1(z^a)+z\boldsymbol{P}_2(z^a)+\cdots+z^{a^2-1}\boldsymbol{P}_{a^2}(z^a)\right)$$

$$\boldsymbol{Q}(z)=\frac{1}{a}\left(\boldsymbol{Q}_{j1}(z^a)+z\boldsymbol{Q}_{j2}(z^a)+\cdots+z^{a^2-1}\boldsymbol{Q}_{ja^2}(z^a)\right)$$

$r\times r$ 阶的符号矩阵 $\boldsymbol{P}(z),\boldsymbol{Q}(z), i=1,2,\cdots,a^2-1; j=1,2,\cdots,\boldsymbol{N}$ 中的每项都为 *Laurent* 多项式，记为

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & z^{-1}\boldsymbol{I}_r & \cdots & z^{1-a^2}\boldsymbol{I}_r\\ \boldsymbol{I}_r & (\omega_1 z)^{-1}\boldsymbol{I}_r & \cdots & (\omega_1 z)^{1-a^2}\boldsymbol{I}_r\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{I}_r & (\omega_{a^2-1}z)^{-1}\boldsymbol{I}_r & \cdots & (\omega_{a^2-1}z)^{1-a^2}\boldsymbol{I}_r\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1(z^a) & \boldsymbol{P}_2(z^a) & \cdots & \boldsymbol{P}_{a^2}(z^a)\\ \boldsymbol{Q}_{11}(z^a) & \boldsymbol{Q}_{12}(z^a) & \cdots & \boldsymbol{Q}_{1a^2}(z^a)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{Q}_{N1}(z^a) & \boldsymbol{Q}_{N2}(z^a) & \cdots & \boldsymbol{Q}_{Na^2}(z^a)\end{pmatrix}$$

那么就有 $\boldsymbol{D}(z)\frac{1}{a}\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{H}(z)$，也即

$$\boldsymbol{H}^*(z)\boldsymbol{H}(z)=\frac{1}{a^2}\boldsymbol{E}^*(z)\boldsymbol{D}^*(z)\boldsymbol{D}(z)\boldsymbol{E}(z) \tag{16}$$

由式(10)有

$$\boldsymbol{H}^*(z)\boldsymbol{H}(z)=\boldsymbol{I}_{a^2}r, \forall|z|=1 \tag{17}$$

接下来讨论该框架存在的充分条件。

定理 3 若多尺度函数为 $\boldsymbol{\phi}(x)=\left(\phi_1(x),\phi_2(x),\cdots,\phi_r(x)\right)^{\mathrm{T}}, \phi_i(x)\in\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^2), r,i\in\boldsymbol{N}$，且 $\hat{\boldsymbol{\phi}}(0)=1$，那么 a 尺度 *Laurent* 多项式符号函数符合

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{l=0}^{a^2-1}\sum_{j=1}^{r}\left|p_{ij}(\omega_l z)\right|<1, \forall|z|=1$$

则存在二元多尺度函数 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 对应的二元最小能量多小波框架生成元 $\boldsymbol{\psi}^1,\boldsymbol{\psi}^2,\cdots,\boldsymbol{\psi}^N$。

证明：由

$$\boldsymbol{P}(z)=\frac{1}{a}\left(\boldsymbol{P}_1(z^a)+z\boldsymbol{P}_2(z^a)+\cdots+z^{a^2-1}\boldsymbol{P}_{a^2}(z^a)\right)$$

其中 $\boldsymbol{P}_j(z), j=1,2,\cdots,a^2$ 是 $\boldsymbol{P}(z)$ 的多相位矩阵。而由(16) (17)可以得到

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{l=0}^{a^2-1}\sum_{j=1}^{r}\left|p_{ij}(\omega_l z)\right|^2=\sum_{i=1}^{r}\sum_{l=1}^{a^2}\sum_{j=1}^{r}\left|p_l^{ij}(z^a)\right|^2$$

即有

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{l=1}^{a^2}\sum_{j=1}^{r}\left|p_l^{ij}(u)\right|^2 \le 1$$

若 $\exists x_1,x_2,\cdots,x_r \in \boldsymbol{R}^+$ 且有 $\sum_{i=1}^{r} x_i = 1$，则

$$\sum_{l=1}^{a^2}\sum_{j=1}^{r}\left|p_l^{ij}(u)\right|^2 \le x_i, 1 \le i \le r$$

根据 *Riesz* 定理可知，对于 *Laurent* 多项式 $P_{a^2+1}(z), i=1,2,\cdots,r$ 有

$$\sum_{l=1}^{a^2}\sum_{j=1}^{r}\left|p_l^{ij}(u)\right|^2 + \left|p_{a^2+1}^{ij}(u)\right|^2 = x_i, 1 \le i \le r$$

接下来把单位向量 $\frac{1}{\sqrt{x_i}}\left(\boldsymbol{P}_1^{i1}(z),\cdots,\boldsymbol{P}_1^{ir}(z),\cdots,\boldsymbol{P}_1^{i1}(z),\cdots,\boldsymbol{P}_{a^2}^{i1}(z),\cdots,\boldsymbol{P}_{a^2}^{ir}(z),\boldsymbol{P}_{a^2+1}^{i}(z)\right), \forall i \in 1,2,\cdots,r$ 按照文献[11]里定理 3 的方式变换之后就可以得到[11]

$$\tilde{\boldsymbol{D}}^i(z) = \frac{1}{\sqrt{x_i}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1^{i1}(z) & \cdots & \boldsymbol{P}_1^{ir}(z) & \cdots & \boldsymbol{P}_{a^2}^{i1}(z) & \cdots & \boldsymbol{P}_{a^2}^{ir}(z) & \boldsymbol{P}_{a^2+1}^{i}(z) \\ \boldsymbol{Q}_1^{i1}(z) & \cdots & \boldsymbol{Q}_1^{ir}(z) & \cdots & \boldsymbol{Q}_{a^2}^{i1}(z) & \cdots & \boldsymbol{Q}_{a^2}^{ir}(z) & \boldsymbol{Q}_{1,a^2+1}^{i}(z) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{Q}_{a^2 1}^{i1}(z) & \cdots & \boldsymbol{Q}_{a^2 1}^{ir}(z) & \cdots & \boldsymbol{Q}_{a^2 a^2}^{i1}(z) & \cdots & \boldsymbol{Q}_{a^2 a^2}^{ir}(z) & \boldsymbol{Q}_{a^2,a^2+1}^{i}(z) \end{pmatrix}$$

则

$$\tilde{\boldsymbol{D}}(z) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1}\,\tilde{\boldsymbol{D}}^1(z) \\ \sqrt{x_2}\,\tilde{\boldsymbol{D}}^2(z) \\ \vdots \\ \sqrt{x_{a^2}}\,\tilde{\boldsymbol{D}}^{a^2}(z) \end{pmatrix}$$

而且符合 $\tilde{\boldsymbol{D}}^*(z)\tilde{\boldsymbol{D}}(z) = \boldsymbol{I}_{a^2 r+1}$。

4. 二元最小能量多小波框架的构造算法

对于 $\forall f(x) \in \boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^2)$，下面记 $\boldsymbol{c}_{\tau,k} = \langle f,\boldsymbol{\phi}_{\tau,k}\rangle, \boldsymbol{d}_{\tau,k} = \langle f,\boldsymbol{\psi}_{\tau,k}^i\rangle, i=1,2,\cdots,\boldsymbol{N}, k \in \boldsymbol{Z}^2$， $\boldsymbol{P}_\tau$ 为 $\boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{R}^2)$ 到子空间 $\boldsymbol{V}_\tau$ 上的正交投影算子

$$\boldsymbol{P}_\tau f = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}^2}\langle f,\boldsymbol{\phi}_{j,\tau,k}\rangle\boldsymbol{\phi}_{j,\tau,k}, \tau \in \boldsymbol{Z}$$

则根据以上算子式(3)可变形为

$$\theta_\tau = \boldsymbol{P}_{\tau+1} f - \boldsymbol{P}_\tau f = \sum_{i=1}^{\boldsymbol{N}}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}^2}\langle f,\boldsymbol{\psi}_{j,\tau,k}^i\rangle\boldsymbol{\psi}_{j,\tau,k}^i \tag{18}$$

其中 θ_τ 表示为误差项，还可以表示为

$$\theta_\tau = \sum_{i=1}^{\boldsymbol{N}}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}^2} m_{j,\tau,k}\boldsymbol{\psi}_{j,\tau,k}^i \tag{19}$$

那么由以上两式，做内积就可以得到

$$\langle\theta_\tau, f\rangle = \sum_{i=1}^{\boldsymbol{N}}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}^2}\left|\langle f,\boldsymbol{\psi}_{j,\tau,k}^i\rangle\right|^2 = \sum_{i=1}^{\boldsymbol{N}}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}^2} m_{j,\tau,k}\overline{\langle f,\boldsymbol{\psi}_{j,\tau,k}^i\rangle}$$

则

$$\begin{aligned}0 &\le \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k\in \mathbf{Z}^2}\left|m_{j,\tau,k}-\left\langle f,\boldsymbol{\psi}_{j,\tau,k}^{i}\right\rangle\right|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k\in \mathbf{Z}^2}\left|m_{j,\tau,k}\right|^2 - 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k\in \mathbf{Z}^2} m_{j,\tau,k}\overline{\left\langle f,\boldsymbol{\psi}_{j,\tau,k}^{i}\right\rangle} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k\in \mathbf{Z}^2}\left|\left\langle f,\boldsymbol{\psi}_{j,\tau,k}^{i}\right\rangle\right|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k\in \mathbf{Z}^2}\left|m_{j,\tau,k}\right|^2 - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k\in \mathbf{Z}^2}\left|\left\langle f,\boldsymbol{\psi}_{j,\tau,k}^{i}\right\rangle\right|^2\end{aligned}$$

在式(19)下，误差项 θ_τ 的系数能量是最小的，也正是这个原因我们把符合(3)的框架叫做最小能量小波框架。

1) 分解算法 若已知 $\left\{\boldsymbol{c}_{\tau+1,l} : l\in \boldsymbol{Z}^2\right\}$，那么我们由 $\boldsymbol{\phi}(x),\boldsymbol{\psi}^i(x), i=1,2,\cdots,\boldsymbol{N}$ 的加细方程我们可以得到

$$\boldsymbol{\phi}_{\tau,l}(x) = a^{\tau}\boldsymbol{\phi}\left(a^{\tau}x-l\right) = \frac{1}{a}\sum_{k\in \boldsymbol{Z}^2}\boldsymbol{P}_{k-al}\boldsymbol{\phi}_{\tau+1,k}(x);$$

$$\boldsymbol{\psi}_{\tau,l}^{i}(x) = a^{\tau}\boldsymbol{\psi}^{i}\left(a^{\tau}x-l\right) = \frac{1}{a}\sum_{k\in \boldsymbol{Z}^2}\boldsymbol{Q}_{k-al}^{i}\boldsymbol{\psi}_{\tau+1,k}^{i}(x).$$

对以上两式两边与 $f(x)\in \boldsymbol{L}^2\left(\boldsymbol{R}^2\right)$ 作内积，就有以下分解公式

$$\boldsymbol{c}_{\tau,l} = \frac{1}{a}\sum_{k\in \boldsymbol{Z}^2}\boldsymbol{P}_{k-al}\boldsymbol{c}_{\tau+1,k};\quad \boldsymbol{d}_{\tau,l} = \frac{1}{a}\sum_{k\in \boldsymbol{Z}^2}\boldsymbol{Q}_{k-al}^{i}\boldsymbol{d}_{\tau+1,k}^{i}$$

2) 重构算法

$$\boldsymbol{\phi}_{\tau+1,l}(x) = a^{\tau+1}\boldsymbol{\phi}\left(a^{\tau+1}x-l\right) = \frac{1}{a}\sum_{k\in \boldsymbol{Z}^2}\left(\boldsymbol{P}_{l-ak}^{*}\boldsymbol{\phi}_{\tau,k}(x) + \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Q}_{l-ak}^{i*}\boldsymbol{\psi}_{\tau,k}^{i}(x)\right)$$

对上式两端与 $f(x)\in \boldsymbol{L}^2\left(\boldsymbol{R}^2\right)$ 作内积，就有

$$\boldsymbol{c}_{\tau+1,l} = \frac{1}{a}\sum_{k\in \boldsymbol{Z}^2}\left(\boldsymbol{P}_{l-ak}^{*}\boldsymbol{c}_{\tau,k} + \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{Q}_{l-ak}^{i*}\boldsymbol{d}_{\tau,k}^{i}\right).$$

参考文献

[1] Liang, Q. and Zhao, P. (2010) Minimum-Energy Multi-Wavelets Tight Frames Associated with Two Scaling Functions. *International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition*, Qingdao, 11-14 July 2010, 97-101. https://doi.org/10.1109/ICMLC.2010.5581087

[2] 梁倩. 两个尺度函数生成的最小能量多小波紧框架[D]: [硕士学位论文]. 北京: 北京交通大学, 2010.

[3] 高协平, 曹春红. 最小能量区间小波框架研究[J]. 中国科学:科学技术版, 2009, 39(4): 441-453.

[4] Chui, C.K. and He, W. (2000) Compactly Supported Tight Frames Associated with Refinable Functions. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **8**, 293-319. https://doi.org/10.1006/acha.2000.0301

[5] 陈清江, 李婷婷, 雷晓婷. 二元最小能量小波框架的特征刻画[J]. 应用数学, 2017, 30(3): 595-602.

[6] 何永滔. 紧支撑的最小能量框架[J]. 中山大学学报, 2011, 33(2): 166-176.

[7] 陈清江, 李杰. 二元小波紧框架存在的充分条件[J]. 云南大学学报, 2008, 30(3): 217-223.

[8] 王刚. 二元三带小波紧框架的构造[J]. 应用数学学报, 2008, 31(2): 290-305.

[9] 郭蔚, 彭立中. 多小波框架的构造理论[J]. 中国科学, 2010, 40(10): 1115-1128.

[10] 黄永东, 李秋富. a进制最小能量区间小波框架的构造[J]. 中国科学: 信息科学, 2013, 43(4): 469-487.

[11] Huang, Y.D. and Cheng, Z.X. (2007) Minimum Energy Frames Associated with Refinable Function of Arbitraty Inter Dilation Factor. *Chaos, Solitons and Fractals*, **32**, 503-515. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.06.082