Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(4), 318-324
Published Online April 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.104040

Uniqueness of Meromorphic Functions with Three *IM* Sharing Values and One *CM* Sharing Value

Lan Hu, Ming Lai

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan
Email: 1696879576@qq.com

Received: Mar. 22nd, 2020; accepted: Apr. 9th, 2020; published: Apr. 17th, 2020

Abstract

In this paper, some results of the uniqueness of meromorphic functions with three *CM* sharing values and one *IM* sharing value are obtained.

Keywords

Meromorphic Function, Sharing Value, Uniqueness

具有三个*IM*分担值与一个*CM*分担值的亚纯函数的唯一性

胡　岚，赖　铭

云南师范大学数学学院，云南　昆明
Email: 1696879576@qq.com

收稿日期：2020年3月22日；录用日期：2020年4月9日；发布日期：2020年4月17日

摘　要

本文通过研究G. G. Gundersen问题得到具有三个*IM*分担值与一个*CM*分担值的亚纯函数的唯一性结论。

关键词

亚纯函数，分担值，唯一性

文章引用: 胡岚, 赖铭. 具有三个 *IM* 分担值与一个 *CM* 分担值的亚纯函数的唯一性[J]. 理论数学, 2020, 10(4): 318-324.
DOI: 10.12677/pm.2020.104040

1. 引言及主要结果

本文使用值分布论的基础知识及 Nevanlinna 常用理论的标准符号[1] [2] [3]，设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为复平面上的两个非常数亚纯函数，而 a 为扩充复平面中的元素，若 $f^{-1}(\{a\})=g^{-1}(\{a\})$，则称 a 为亚纯函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 IM 分担值；若 a 为亚纯函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 IM 分担值，且对于 $\forall z^*\in f^{-1}(\{a\})$ 都有 z^* 作为方程 $f(z)=a$ 的根的重数与 z^* 作为方程 $g(z)=a$ 的根的重数相同，则称 a 为亚纯函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 CM 分担值。

对于复平面上的非常数亚纯函数 $f(z)$ 而言，$S(r,f)$ 泛指形如 $o\{T(r,f)\}(r\to\infty,r\notin E,mesE<+\infty)$ 的量。

1929 年，Nevanlinna 证明了以下定理：

定理 A [1] 若非常数亚纯函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 具有 5 个判别的 IM 分担值，则 $f(z)\equiv g(z)$。

定理 B [1] 若非常数亚纯函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以 4 个两两判别的复数 a_1,a_2,a_3,a_4 为 CM 分担值，则以下情况之一必发生：

(i) $f(z)\equiv g(z)$；

(ii) $f(z)\not\equiv g(z)$，但 $g(z)$ 是 $f(z)$ 的分式线性变换，且 $a_j(j=1,2,3,4)$ 中必有两个是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 公共的 Picard 例外值。

1979 年，G. G. Gundersen 得到了 $3CM+IM=4CM$ 定理。

定理 C [2] 设 $a_j(j=1,2,3,4)$ 为 4 个判别的复数，如果非常数亚纯函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以 a_1,a_2,a_3 为 CM 分担值，而以 a_4 为 IM 分担值，则 a_1,a_2,a_3,a_4 均为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 CM 分担值。

1983 年，Gundersen 将定理 C 改进为如下的 $2CM+2IM=4CM$ 定理。

定理 D [3] 设 $a_j(j=1,2,3,4)$ 为 4 个判别的复数，如果非常数亚纯函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以 a_1,a_2 为 CM 分担值，而以 a_3,a_4 为 IM 分担值，则 a_3,a_4 亦为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 CM 分担值。

Gundersen 根据上述结果，提出了以下公开问题：

设 $a_j(j=1,2,3,4)$ 为 4 个判别的复数。如果 a_1,a_2,a_3 为非常数亚纯函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 IM 分担值，a_4 为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 CM 分担值，那么 a_1,a_2,a_3 是否一定亦都为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 CM 分担值？

对于上述问题，1992 年，Gundersen 得到如下的阶段性结果。

定理 E [4] 设 c 为异于 $0,1,\infty$ 的复数，$f(z)$ 与 $g(z)$ 为判别的非常数亚纯函数。如果 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以 $0,1,c$ 为 IM 分担值，而以 ∞ 为 CM 分担值，且 $\exists\lambda>\frac{4}{5}$ 及 $I\subset R^+$ 使 $mesI=+\infty$ 以及 $\bar{N}(r,f)>\lambda T(r,f)$ $(\forall r\in I)$，则 $0,1,\infty,c$ 均为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 CM 分担值。

对于 Gundersen 的上述问题，在本文中我们得到如下几个结果。

定理 1.1 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为判别的非常数亚纯函数。如果 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以 $0,1,c$ $(c\in\mathbb{C}\setminus\{0,1,\infty\})$ 为 IM 分担值、而以 ∞ 为 CM 分担值，且 $\exists\lambda>\frac{2}{3}$ 及 $I\subset R^+$ 使得 $mesI=+\infty$ 以及对 $\forall r\in I$ 都有

$$\bar{N}(r,f)>\lambda T(r,f),\quad \frac{N_E(r,0)+N_E(r,1)+N_E(r,c)}{N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+N\left(r,\frac{1}{f-c}\right)}>\frac{1}{2},$$

则 $0,1,\infty,c$ 均为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 CM 分担值。

定理 1.2 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为判别的非常数亚纯函数。如果 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以 $0,1,c\ \left(c\in\left\{-1,\frac{1}{2},2\right\}\right)$ 为 IM 分担值、而以 ∞ 为 CM 分担值，且 $\exists\lambda>\frac{4}{7}$ 及 $I\subset R^{+}$ 使得 $mesI=+\infty$ 以及对 $\forall r\in I$ 都有

$$\bar{N}(r,f)>\lambda T(r,f)\text{，}\quad \frac{N_E(r,0)+N_E(r,1)+N_E(r,c)}{N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+N\left(r,\frac{1}{f-c}\right)}>\frac{1}{2},$$

则 $0,1,\infty,c$ 都为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 CM 分担值。

2. 几个引理

为了证明本文的结果，我们需要以下几个辅助结果。

引理 2.1 [1] 设 $a_j\ (j=1,2,3,4)$ 为非常数亚纯函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的四个判别的 IM 分担值。如果 $f(z)\not\equiv g(z)$，那么：

(i) $T(r,f)=T(r,g)+S(r,f)$，$T(r,g)=T(r,f)+S(r,f)$；

(ii) $N_0(r,f)=S(r,f)$，$N_0(r,g)=S(r,f)$；

(iii) $\sum_{j=1}^{4}\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)=2T(r,f)+S(r,f)$；

(iv) $\sum_{j=1}^{4}N^{*}(r,a_j)=S(r,f)$；

其中 $N_0(r,f)$ 表示 f' 的零点，但不是 $f-a_j\ (j=1,2,3,4)$ 的零点的计数函数，$N_0(r,g)$ 类似定义，$N^{*}(r,a_j)$ 表示 $f-a_j$ 与 $g-a_j$ 重级均大于 1 的公共零点的计数函数，按重级小者计算次数。

引理 2.2 [1] 设 c 为有穷复数，且 $c\neq 0,1$，非常数亚纯函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以 $0,1,\infty$ 及 c 中的任何一个为 IM 分担值，令

$$\beta_1=\frac{f''}{f'}-\left(\frac{f'}{f-1}+\frac{f'}{f-c}-2\frac{f'}{f}\right)-\left\{\frac{g''}{g'}-\left(\frac{g'}{g-1}+\frac{g'}{g-c}-2\frac{g'}{g}\right)\right\},$$

$$\beta_2=\frac{f''}{f'}-\left(\frac{f'}{f}+\frac{f'}{f-1}-2\frac{f'}{f-c}\right)-\left\{\frac{g''}{g'}-\left(\frac{g'}{g}+\frac{g'}{g-1}-2\frac{g'}{g-c}\right)\right\},$$

$$\beta_3=\frac{f''}{f'}-\left(\frac{f'}{f}+\frac{f'}{f-c}-2\frac{f'}{f-1}\right)-\left\{\frac{g''}{g'}-\left(\frac{g'}{g}+\frac{g'}{g-c}-2\frac{g'}{g-1}\right)\right\},$$

则有

$$T(r,\beta_1)\le\bar{N}(r,f)-N_E(r,\infty)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)-N_E(r,0)+S(r,f),$$

$$T(r,\beta_2)\le\bar{N}(r,f)-N_E(r,\infty)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-c}\right)-N_E(r,c)+S(r,f),$$

$$T(r,\beta_3)\le\bar{N}(r,f)-N_E(r,\infty)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)-N_E(r,1)+S(r,f),$$

其中 $N_E(r,0)$ 表示 $f(z)$ 与 $g(z)$ 公共的单重零点的密指量， $N_E(r,1)$， $N_E(r,c)$ 亦类似定义。

引理 2.3 [1] 设常数 $c\notin\{0,1,\infty\}$，如果判别的非常数亚纯函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以 $0,1,\infty$ 及 c 的每一个值为 *IM* 分担值，$\psi=\dfrac{f'(f-g)^2g'}{f(f-1)(f-c)g(g-1)(g-c)}$，而 β_1,β_2,β_3 如引理 2.2 中所述，令 $\delta_1=\beta_1-(1+c)^2\psi$，$\delta_2=\beta_2-(1-2c)^2\psi$， $\delta_3=\beta_3-(c-2)^2\psi$， 又设 z_∞ 是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 公共的单重极点，则 $\delta_1(z_\infty)=0$，$\delta_2(z_\infty)=0$， $\delta_3(z_\infty)=0$。

3. 定理 1.1 的证明

令

$$\beta_1=\frac{f''}{f'}-\left(\frac{f'}{f-1}+\frac{f'}{f-c}-2\frac{f'}{f}\right)-\left\{\frac{g''}{g'}-\left(\frac{g'}{g-1}+\frac{g'}{g-c}-2\frac{g'}{g}\right)\right\},$$

$$\beta_2=\frac{f''}{f'}-\left(\frac{f'}{f}+\frac{f'}{f-1}-2\frac{f'}{f-c}\right)-\left\{\frac{g''}{g'}-\left(\frac{g'}{g}+\frac{g'}{g-1}-2\frac{g'}{g-c}\right)\right\},$$

$$\beta_3=\frac{f''}{f'}-\left(\frac{f'}{f}+\frac{f'}{f-c}-2\frac{f'}{f-1}\right)-\left\{\frac{g''}{g'}-\left(\frac{g'}{g}+\frac{g'}{g-c}-2\frac{g'}{g-1}\right)\right\},$$

$$\psi=\frac{f'(f-g)^2g'}{f(f-1)(f-c)g(g-1)(g-c)},$$

$$H=\left(\beta_1^2-(1+c)^2\psi\right)\left(\beta_2^2-(1-2c)^2\psi\right)\left(\beta_3^2-(c-2)^2\psi\right),$$

则 ψ 为整函数，又由对数导数引理知 $m(r,\psi)=S(r,f)$，故 $T(r,f)=S(r,f)$。由于 ∞ 为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 *CM* 分担值，且由引理 2.1 (iv)知

$$\overline{N}(r,f)-N_E(r,\infty)=S(r,f).\tag{1}$$

由(1)式及引理 2.2 知

$$T(r,\beta_1)\le\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)-N_E(r,0)+S(r,f),\tag{2}$$

$$T(r,\beta_2)\le\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-c}\right)-N_E(r,c)+S(r,f),\tag{3}$$

$$T(r,\beta_3)\le\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)-N_E(r,1)+S(r,f).\tag{4}$$

我们断言 $H\equiv0$。

事实上，若 $H\not\equiv0$，由 Nevanlinna 第一基本定理及(2)~(4)式得

$$\begin{aligned}3\overline{N}(r,f)&\le N\left(r,\frac{1}{H}\right)\le T(r,H)+O(1)\le 2\left(T(r,\beta_1)+T(r,\beta_2)+T(r,\beta_3)\right)+S(r,f)\\&\le 2\left(\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)-N_E(r,0)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-c}\right)-N_E(r,c)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)-N_E(r,1)\right)+S(r,f)\end{aligned}.$$

由上式可得

$$\begin{aligned}&3\bar{N}(r,f)+2\left(N_E(r,0)+N_E(r,1)+N_E(r,c)\right)\\&\le 2\left(\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-c}\right)\right)+S(r,f)\end{aligned}.$$

又由引理 2.1 (iii)得

$$\begin{aligned}&5\bar{N}(r,f)+2\left(N_E(r,0)+N_E(r,1)+N_E(r,c)\right)\\&\le 2\left(\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-c}\right)+\bar{N}(r,f)\right)+S(r,f).\\&\le 4T(r,f)+S(r,f)\end{aligned}\tag{5}$$

继令

$$\gamma=\frac{f'(f-g)g'}{f(f-1)(f-c)g(g-1)(g-c)}.$$

若 z_∞ 为 f 与 g 的极点，则 z_∞ 为 γ 的零点。由引理 2.1 (iv)及已知条件可知

$$\begin{aligned}\bar{N}(r,f)&\le N_E(r,0)+N_E(r,1)+N_E(r,c)+\bar{N}_D(r,0)+\bar{N}_D(r,1)+\bar{N}_D(r,c)+S(r,f)\\&\le 2\left(N_E(r,0)+N_E(r,1)+N_E(r,c)\right)+S(r,f)\end{aligned}.\tag{6}$$

结合(5)式可知

$$6\bar{N}(r,f)\le 4T(r,f)+S(r,f).$$

这与定理的假设 $\exists\lambda>\frac{2}{3}$ 及 $I\subset R^+$ 使得 $mesI=+\infty$，且 $\bar{N}(r,f)>\lambda T(r,f)$ $(\forall r\in I)$ 矛盾，所以断言成立。故 $H\equiv 0$。

不失一般性，令

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{f''}{f'}-\left(\frac{f'}{f-1}+\frac{f'}{f-c}-2\frac{f'}{f}\right)-\left\{\frac{g''}{g'}-\left(\frac{g'}{g-1}+\frac{g'}{g-c}-2\frac{g'}{g}\right)\right\}\right\}^2\\&\equiv(1+c)^2\left(\frac{f'(f-g)^2g'}{f(f-1)(f-c)g(g-1)(g-c)}\right)\end{aligned}$$

即 $\beta_1^2\equiv(1+c)^2\psi$，设

$$P=\frac{f'f^2(g-1)(g-c)}{g'g^2(f-1)(f-c)}.\tag{7}$$

由(7)式可知 $\beta_1=\frac{p'}{p}$，故有 $\left(\frac{p'}{p}\right)^2\equiv(1+c)^2\psi$。又因 ψ 为一个整函数，故 0 和 ∞ 为 P 的 Picard 例外值。因而有

$$\frac{f'f^2(g-1)(g-c)}{g'g^2(f-1)(f-c)}=e^{P_1}.\tag{8}$$

(其中 P_1 为一个整函数)。由(8)式可知：0 和 ∞ 为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 公共的 CM 分担值，且结合 $1,c$ 为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 公共的 IM 分担值与定理 D 可知 $0,1,\infty,c$ 均为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 CM 分担值。定理 1.1 证毕。

4. 定理 1.2 的证明

若 $c=-1$，令

$$H_1=\beta_1\left(\beta_2\beta_3-9\psi\right).$$

我们断言 $H_1\equiv 0$。事实上，若 $H_1\not\equiv 0$，则由 Nevanlinna 第一基本定理及引理 2.2 可知

$$\begin{aligned}2\bar{N}(r,f)&\le N\left(r,\frac{1}{H_1}\right)\le T(r,H_1)+O(1)\le T(r,\beta_1)+T(r,\beta_2)+T(r,\beta_3)+S(r,f)\\&\le \bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)-N_E(r,0)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f+1}\right)-N_E(r,-1)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)-N_E(r,1)+S(r,f)\end{aligned},$$

由上可得

$$2\bar{N}(r,f)+N_E(r,0)+N_E(r,1)+N_E(r,-1)\le \bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{f+1}\right)+S(r,f). \tag{9}$$

由引理 2.1 (iv)可知

$$3\bar{N}(r,f)+N_E(r,0)+N_E(r,1)+N_E(r,c)\le 2T(r,f)+S(r,f).$$

再结合定理 1.2 的已知条件及定理 1.1 中的(6)式可知

$$7\bar{N}(r,f)\le 4T(r,f)+S(r,f)$$

这与定理的假设 $\exists\lambda>\frac{4}{7}$ 及 $I\subset R^+$ 使得 $mesI=+\infty$，且 $\bar{N}(r,f)>\lambda T(r,f)$ $(\forall r\in I)$ 矛盾，所以断言成立。故 $H_1\equiv 0$。

若 $\beta_1\equiv 0$ 时，即

$$\frac{f''}{f'}-\left(\frac{f'}{f-1}+\frac{f'}{f+1}-2\frac{f'}{f}\right)-\left\{\frac{g''}{g'}-\left(\frac{g'}{g-1}+\frac{g'}{g+1}-2\frac{g'}{g}\right)\right\}\equiv 0. \tag{10}$$

由(10)式经积分可以得到

$$\frac{f'f^2(g-1)(g+1)}{g'g^2(f-1)(f+1)}=A$$

(其中 A 为非零常数)。再结合 $0,1,\infty,c$ 为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 公共的 IM 分担值可知：$0,1,\infty,c$ 均为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 CM 分担值。

若 $\beta_2\beta_3-9\psi\equiv 0$，令

$$P_2=\frac{f'(f+1)^2g(g-1)}{g'(g+1)^2f(f-1)},\quad P_3=\frac{f'(f-1)g(g+1)}{g'(g-1)f(f+1)}.$$

我们有 $\beta_2=\frac{p_2'}{p_2},\beta_3=\frac{p_3'}{p_3}$，故 $\frac{p_2'}{p_2}\frac{p_3'}{p_3}\equiv 9\psi$。又因 ψ 为一个整函数，故 0 和 ∞ 为 P_2,P_3 的 Picard 例外值，即 $P_2=e^{p_2},P_3=e^{p_3}$ (其中 p_2,p_3 为一个整函数)，由此可知 0 和 ∞ 为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 公共的 CM 分担值，且结合 $1,c$ 为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 公共的 IM 分担值与定理 D 可知：$0,1,\infty,c$ 均为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的 CM 分担值。

同理，若 $c=\frac{1}{2}$，令 $H_2=\beta_2\left(\beta_1\beta_3-\frac{9}{4}\psi\right)$；若 $c=2$，令 $H_3=\beta_3\left(\beta_1\beta_2-9\psi\right)$。与上面类似的过程可证

得定理 1.2 的结论。

参考文献

[1] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[2] Gundersen, G.G. (1979) Meromorphic Functions That Share Three or Four Values. *Journal of London Mathematical Society*, **20**, 457-466. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-20.3.457

[3] Gundersen, G.G. (1983) Meromorphic Functions That Share Four Values. *Transactions of the American Mathematical Society*, **277**, 545-567. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1983-0694375-0

[4] Gundersen. G.G. (1992) Meromorphic Functions that Share Three Values IM and a Forth Value CM. *Complex Variables*, **20**, 99-106. https://doi.org/10.1080/17476939208814590