Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(4), 374-378
Published Online April 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.104047

Hans汉斯

Research on the Relationship between Even Numbers and Prime Numbers Based on the Method Calculating Prime Numbers

Genhe Liu

School of Information & Computer, Anhui Agricultural University, Hefei Anhui
Email: liugh@ahau.edu.cn

Received: Mar. 31st, 2020; accepted: Apr. 19th, 2020; published: Apr. 26th, 2020

Abstract

This paper mainly discusses the relationship between even numbers and prime numbers, that is, the method of counting primes proves that any even number can be represented using the sum of two prime numbers. First for any set $N=\{1,2,\cdots,n\}$ of natural numbers greater than or equal to 2, the formula for calculating the prime number is given and also the proof of the problem. Secondly, we use the Matlab program to verify if it is true.

Keywords

Even, Prime Numbers, Pigeon-Hole Principle, Matlab Program

用计算素数的方法研究偶数与素数之间的关系

刘根和

安徽农业大学信息与计算机学院，安徽 合肥
Email: liugh@ahau.edu.cn

收稿日期：2020年3月31日；录用日期：2020年4月19日；发布日期：2020年4月26日

摘　要

本文主要讨论偶数与素数之间的关系，即用计算素数的方法证明任何一个偶数可以用两个素数之和表示。该文有两部分构成：第一部分对任意的大于等于2的自然数集 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 给出计算其中的素数公式并且给出问题的证明；第二部分用Matlab程序加以验证。

文章引用: 刘根和. 用计算素数的方法研究偶数与素数之间的关系[J]. 理论数学, 2020, 10(4): 374-378.
DOI: 10.12677/pm.2020.104047

关键词

偶数，素数，鸽舍原理，Matlab程序

众所周知，当我们计算不规则物体的容积时用数学的方法是比较困难的，若改用物理的方法就非常容易。将这种思想用到解决数学上许多问题是有效的，例如任意一个偶数可以用两个素数之和表示的问题若用数论的方法加以证明将是非常困难的，若我们组合数学的一些方法去证明，则问题变得简单得多。下面将详细介绍该方法。

假设 $n(n \ge 2)$ 是正整数，$N = \{1, 2, \cdots, n\}$，P 是 N 中素数集合，用 $|P|$ 表示 P 的基数，根据曹汝成先生编写的《组合数学》第 61 页定理 2.14 [1]，$|P|$ 的计算公式为：

(1) $|P| = r + n - 1 - \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \le i < j \le r} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{1 \le i < j < k \le r} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \cdots + (-1)^r \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_r}$

其中 $r = \sqrt{n}$，$p_i, i = 1, 2, \cdots, r$ 是素数。

我们现在构造两个集合：

$$Q_1 = \{q_1, q_2 \cdots\} = \{1+2, 1+2\times 2, \cdots\} = \left\{1+2i \mid i = 1, 2, \cdots, (1+2i) \le \frac{n}{2}\right\}$$

$$Q_2 = \{n - q_i \mid i = 1, 2, \cdots\}$$

显然，$P - \{2\} \subset Q_1 \cup Q_2$ 且 $|Q_1| = \frac{n-2}{2} \times \frac{1}{2} < \frac{n}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$。

为方便证明将公式(1)写成等价形式公式(2)。

(2) $|p| = r - 1 + \frac{n(p_1 - 1)(p_2 - 1)\cdots(p_r - 1)}{p_1 p_2 \cdots p_r}$

公式(1)到公式(2)证明非常简单，证明过程省略。

我们的第一问题是是否有 $|P| > \frac{n}{4}$？

为了证明 $|P| > \frac{n}{4}$ 我们考虑下面的不等式。

(3) $\frac{n(p_1 - 1)(p_2 - 1)\cdots(p_r - 1)}{p_1 p_2 \cdots p_r} - \frac{n}{k} > 0$

不难证明当 $k > \frac{p_1 p_2 \cdots p_r}{(p_1 - 1)(p_2 - 1)\cdots(p_r - 1)}$ 时不等式(3)成立。

只要 $k = 4$ 就一定有(3)成立。

当 $r = 2$ 有

$$\frac{p_1 p_2 \cdots p_r}{(p_1 - 1)(p_2 - 1)\cdots(p_r - 1)} = \frac{2\times 3}{1\times 2} = \frac{6}{2} < 4$$

假设 $r=k$ 不等式(3)成立，当 $r=k+1$，有

$$\frac{p_1p_2\cdots p_{k+1}}{(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_{k+1}-1)}=\frac{p_1p_2\cdots p_kp_{k+1}}{(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)(p_{k+1}-1)}<4\frac{p_{k+1}}{p_{k+1}-1}\le 4$$

依据归纳法原理 $r\ge 3$ 不等式(3)成立。

现在考虑两个集合 $P_1=\{p_i \mid p_i\in Q_1, p_i\text{是素数}, i=1,2,\cdots\}$，

$P_2=\{n-p_i \mid p_i\in Q_1, n-p_i\text{是素数}, i=1,2,\cdots\}$，显然有：

(4) $|P_1|<|Q_1|<\frac{n}{4}$，$|P_2|<|Q_2|<\frac{n}{4}$

因为 $3\in P_1$，所以 $P_1\ne\phi$，因此有

(5)
$$\begin{aligned}|P|-1&=r-2+\frac{n(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1)}{p_1p_2\cdots p}-\frac{n}{4}\\&\ge\frac{n(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1)}{p_1p_2\cdots p_r}-\frac{n}{4}>0\end{aligned}$$

即

(6) $|P|-1>\frac{n}{4}$。

现在有 $|P_1|+|P_2|$ 个不同的盒子和 $|P|-1$ 个不同的球。把 $|P|-1$ 个球放入 $|P_1|+|P_2|$ 个盒子中，如果 P_1 中每个盒子恰好放一个球，因为 $P_1\cup P_2=P-\{2\}$，$P_1\cap P_2=\phi$，且 $|P_1|<|Q_1|<\frac{n}{4}$ 由不等式(6)和鸽舍原理[2]知 P_1 中球的个数少于 $\frac{n}{4}$ 个，其余的球一定在 P_2 中。假设球 y 在 P_2 中，根据 P_2 的性质 $y=n-x$，所以球 x 一定在 P_1 中。

根据上面的分析有下面的断言：

断言 1. 对任意的偶数 $n(\ge 10)$ 素数 $x(\ge 3)$ 和 $y(\le n-1)$ 使得 $x+y=n$。

断言 2. 对任意的奇数 m 一定存在三个素数 x,y,z 使得 $x+y+z=m$。

现在证明断言 2。对任意的奇数 m，$m-p_i$（$p_i\ge 3$，素数)一定是偶数，根据断言 1。一定存在两个素数 x,y 使得 $m-p_i=x+y$，即 $m=p_i+x+y$。

按照上面的思路编写成如下的 Matlab 程序[3]，它可以对任意的 $n(n\ge 10)$ 加以验证：

```
clc
clear
m=input('m=');
r=sqrt(m);
p=2:m;
for i=2:r

        n=find(rem(p,i)==0&p~=i);
        p(n)=[];
end
length(p)
```

```
p1=3:2:m/2;
for i=2:r
        n=find(rem(p1,i)==0&p1~=i);
        p1(n)=[];
end

 p2=m-p1:-2:m/2;
for i=2:r
        n=find(rem(p2,i)==0&p2~=i);
        p2(n)=[];
end

 for i=1:length(p1)
     p=m-p1;
end

  for i=1:length(p2)
        for j=1:length(p)
           if (p2(i)==p(j));
            q=p2;q1=m-q;
           end
        end
  end

  for i=3:2:m/2
       for j=2:sqrt(m/2)
           n=find(rem(q1,j)==0&q1~=j);
        q1(n)=[];
       end
 end
  q1
  [q1;m-q1]
```

几点说明：

1. 对于 $n<10$ 我们可以直接进行验证，所以断言 1，2 可以改为下面的叙述：

断言 1. 对任意的偶数 $n(\geq 4)$ 一定存在两个素数 $x(\geq 2)$， $y(\leq n-1)$ 使得 $x+y=n$。

断言 2. 对任意的奇数 $m(m\geq 7)$ 一定有三个素数 x,y,z 使得 $x+y+z=m$。

2. 程序可以优化；
3. 程序可在直接在 matlabR2013b 上运行；
4. 在证明的过程中省略了一些细节。

参考文献

[1] 曹汝成. 组合数学[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2000.

[2] Ross, K.A., Wright, C.R.B. 组合数学教程[M]. 第二版. 北京: 机械工业出版社, 2003.

[3] 刘卫国. matlab 程序设计教程[M]. 第二版. 北京: 中国水利水电出版社, 2009.