Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(9), 811-820
Published Online September 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.109093

Hans汉斯

阶为$8p^2$的7度对称图

王 蒙，杨婷婷

云南财经大学统计与数学学院，云南 昆明
Email: 2027178063@qq.com, 2455182447@qq.com

收稿日期：2020年8月10日；录用日期：2020年9月2日；发布日期：2020年9月9日

摘 要

在本文中，研究了$8p^2$阶的7度对称图，其中p为一个奇素数。证明了自同构群在图的顶点集上拟本原时，存在两个图。当自同构群在图的顶点集上二部拟本原时，不存在图。

关键词

对称图，自同构群，单群

On Symmetric Graphs of Order Eight Times a Prime Square and Valency Seven

Meng Wang, Tingting Yang

School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan
Email: 2027178063@qq.com, 2455182447@qq.com

Received: Aug. 10th, 2020; accepted: Sep. 2nd, 2020; published: Sep. 9th, 2020

Abstract

In this paper, we study symmetric graphs of valency seven and order $8p^2$, where p is an odd prime. It is proved that there are two graphs if the automorphism group of those graphs which is quasi-primitive on its vertices set, while it is no graphs exists in the case of the automorphism group is biquasiprimitive on the vertex set.

Keywords

Symmetric Graph, Automorphism Group, Simple Group

文章引用: 王蒙, 杨婷婷. 阶为 $8p^2$ 的 7 度对称图[J]. 理论数学, 2020, 10(9): 811-820.
DOI: 10.12677/pm.2020.109093

1. 引言

本文中，考虑的图都是连通的，无向的，无重边和无自环的。

对于一个图Γ，我们用$V\Gamma, E\Gamma$和$A\Gamma$分别表示图Γ的顶点集，边集和弧集。设$Aut\Gamma$为Γ的全自同构群，且$X \le Aut\Gamma$。若X在$V\Gamma, E\Gamma$和$A\Gamma$上作用传递，则称Γ为X-点传递图，X-边传递图和X-弧传递图。通常，弧传递图也称为对称图。图Γ的一条s-弧是由$s+1$个顶点$(v_1, v_2, \cdots, v_s)$组成的一个有序元组，使得v_{i-1}与v_i是邻接的，$1 \le i \le s$，且$v_i \ne v_{i+2}, 0 \le i \le s-2$。若$X$在$\Gamma$的$s$-弧集上作用传递，则称$\Gamma$为$(X,s)$-弧传递图；若$\Gamma$是$(X,s)$-弧传递的，但不是$(X,s+1)$-弧传递的，则$\Gamma$称为$(X,s)$-传递的。对任意的$v \in V\Gamma$，定义$\Gamma(v) = \{w \in V\Gamma \mid \{v,w\} \in E\Gamma\}$为$v$的邻域，用$|\Gamma(v)|$表示$v$的度数，记作$val(v)$。对任意的$v, w \in V\Gamma$，若$v$和$w$的度数都相同，则称$\Gamma$为正则图，用$val(\Gamma)$表示图$\Gamma$的度数。假设$X \le Sym(\Omega)$是$\Omega$上的一个传递置换群，若$X$的每个极小正规子群在$\Omega$上都是传递的，则称$X$是拟本原的。若$X$的每个极小正规子群在$\Omega$上至多有两个轨道且存在一个极小正规子群在$\Omega$上恰好有两个轨道，则称$X$是二部拟本原的。$Out(X)$表示群$X$的外自同构群。

刻画固定阶数的边传递图或弧传递图受到了广泛的关注。这是因为这些研究发现了很多有趣的图例，且对一般图类的研究起着重要作用。设p, q是一个不同的素数。Chao 在[1]中分类了p阶的对称图。Cheng 和 Oxley 在[2]中刻画了$2p$阶的边传递图，Wang 和 Xu 在[3]中确定了所有$3p$阶的对称图。这些结果被 Praeger 等在[4] [5]中分析的阶为pq的图得以推广。此外，在[6] [7]中 Feng 等分类了mp^2阶的 3 度对称图，其中$m \le 6$。在[8] [9] [10]中 Feng 和 Pan 等确定了了$2p^2$阶的 4 度和 5 度对称图。Guo 等在[11] [12]中刻画了阶为$4p$和$16p$的 7 度对称图。Pan 等在[13]中刻画了阶为$4n$的 7 度弧传递图，其中n是平方自由的。在[14]中 Hua 等分析了阶为$2pq$的 7 度弧传递图。在[15]中 Pan 和 Yin 研究了阶为$4p^n$的 7 度弧传递图。7 度对称图的研究提供了一些图例，对后续对称图的研究和学习起着重要的参考作用。本文的主要目的是刻画$8p^2$阶 7 度弧传递图。

定理 1.1 设Γ是连通的阶为$8p^2$的 7 度X-弧传递图，其中$X \le Aut\Gamma$，p是奇素数。则下列表述成立：

1) 假设X在$V\Gamma$上是拟本原的，存在两个 7 度弧传递图$\mathcal{C}_{72}^1$和$\mathcal{C}_{72}^2$，且$Aut(\mathcal{C}_{72}^1) \cong Aut(\mathcal{C}_{72}^2) \cong PSL(2,8) \times \mathbb{Z}_2$。

2) 假设X在$V\Gamma$上是二部拟本原的，则图Γ不存在。

2. 预备知识

本文所使用的符号都是标准的，可参照[16]。对于群X，设H为X的一个子群，用$C_X(H)$和$N_X(H)$来定义H在X中的中心化子和正规化子。

设Γ是阶为m的k度图，则$|A\Gamma| = mk, |E\Gamma| = mk/2$。因此，当$m$为奇数时$k$为偶数。由此得出奇数阶对称图的度数为偶数。下面介绍两个具体的图。

例 2.1 设$X = PSL(2,8)$，则X有一个子群$H \cong \mathbb{Z}_7$，利用 Magma [17]计算可知，存在两个阶为 72 的互不同构的 7 度对称图，分别记作$\mathcal{C}_{72}^1$和$\mathcal{C}_{72}^2$，且$Aut(\mathcal{C}_{72}^1) \cong Aut(\mathcal{C}_{72}^2) \cong PSL(2,8) \times \mathbb{Z}_2$。

对于正整数n和群T，通常用$\pi(T)$表示$|T|$的素因子集合，$|\pi(T)|$表示$|T|$中含有素因子的个数。如果$|\pi(T)| = n$，则称群T为K_n-群。当$3 \le n \le 6$时，K_n-单群在[19]和[18]中被确定出来。下面这个定理刻

画了阶有 5 个素因子的单群。

定理 2.2 [19] [定理 A] 设 T 是一个 K_5-单群。则下列断言之一成立：

a) $T = PSL(2,q)$，其中 $\left|\pi\left(q^2-1\right)\right| = 4$；

b) $T = PSU(3,q)$，其中 $\left|\pi\left(\left(q^2-1\right)\left(q^3+1\right)\right)\right| = 4$；

c) $T = PSL(3,q)$，其中 $\left|\pi\left(\left(q^2-1\right)\left(q^3-1\right)\right)\right| = 4$；

d) $T = O_5(q)$，其中 $\left|\pi\left(q^4-1\right)\right| = 4$；

e) $T = S_z\left(2^{2m+1}\right)$，其中 $\left|\pi\left(\left(2^{2m+1}-1\right)\left(2^{4m+2}+1\right)\right)\right| = 4$；

f) $T = R\left(3^{2m+1}\right)$，其中 $\left|\pi\left(3^{4m+2}-1\right)\right| = 3$ 且 $\left|\pi\left(3^{4m+2}-3^{2m+1}+1\right)\right| = 1$；

g) $$\begin{aligned} T = {} & A_{11}, A_{12}, M_{22}, J_3, AS, H_e, McL, PSL(4,4), PSL(4,5), PSL(4,7), PSL(5,2), PSL(5,3), \\ & PSL(6,2), O_7(3), PSp(6,3), PSp(8,2), PSU(4,4), PSU(4,5), PSU(4,7), PSU(4,9), \\ & PSU(5,3), PSU(6,2), O^+(8,3), O^-(8,2), {}^3D_4(3), G_2(4), G_2(5), G_2(7) \text{或} G_2(9) \end{aligned}$$。

7 度连通对称图的点稳定子群在[20] [定理 1.1]和[21] [定理 3.4]中被独立确定出来，其中 F_n 表示阶为 n 的 Frobenius 群，n 为正整数。

引理 2.3 设 Γ 是一个连通的 7 度 (X,s)-弧传递图，其中 $X \le Aut\Gamma$ 且 $s \ge 1$。则 $s \le 3$，且下述其中之一成立，其中 $\alpha \in V\Gamma$。

1) 若 X_α 是可解的，则 $\left|X_\alpha\right| \,\big|\, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$。进一步，$(s, X_\alpha)$ 如下表 1。

Table 1. Solvable cases of stable subgroups of 7-degree graph points
表 1. 7 度图点稳定子群可解的情形

s	1	2	3
X_α	$\mathbb{Z}_7$，F_{14}，F_{21}，F_{21}，$F_{21}\times\mathbb{Z}_3$	F_{42}，$F_{42}\times\mathbb{Z}_2$，$F_{42}\times\mathbb{Z}_3$	$F_{42}\times\mathbb{Z}_6$

2) 若 X_α 是不可解的，则 $\left|X_\alpha\right| \,\big|\, 2^{24} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$。进一步，$(s, X_\alpha)$ 如下表 2。

Table 2. Unsolvable cases of stable subgroups of 7-degree graph points
表 2. 7 度图点稳定子群不可解的情形

s	2	3
X_α	$PSL(3,2)$，$ASL(3,2)$ $ASL(3,2)\times\mathbb{Z}_2$，$A_7$，$S_7$	$PSL(3,2)\times S_4$，$A_7\times A_6$，$S_7\times S_6$，$(A_7\times A_6):\mathbb{Z}_2$， $\mathbb{Z}_2^6:(SL(2,2)\times SL(3,2))$，$\left[2^{20}\right]:(SL(2,2)\times SL(3,2))$
$\left\|X_\alpha\right\|$	$2^3\cdot3\cdot7$，$2^6\cdot3\cdot7$ $2^7\cdot3\cdot7$，$2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$， $2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7$	$2^6\cdot3^2\cdot7$，$2^6\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$，$2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$， $2^7\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$，$2^{10}\cdot3^2\cdot7$，$2^{24}\cdot3^2\cdot7$

特别地，若 $5 \,\big|\, \left|X_\alpha\right|$，则 $\left|X_\alpha\right| \,\big|\, 2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$，且 $X_\alpha^{\Gamma(\alpha)} \cong A_7$ 或 S_7；若 $5 \nmid \left|X_\alpha\right|$，则 $\left|X_\alpha\right| \,\big|\, 2^{24}\cdot3^2\cdot7$。

利用正规商图研究点传递图是一种典型的方法。假设 Γ 是 X-点传递图，其中 $X \le Aut\Gamma$ 有一个非传递正规子群 N。用 $V\Gamma_N$ 表示 N 在 $V\Gamma$ 上的轨道的集合。Γ 的正规商图 Γ_N 是由 N 在顶点集 $V\Gamma_N$ 上诱导的。

对任意两点 $B,C\in V\Gamma_N$ 是邻接的当且仅当存在 $b\in B,c\in C$，使得 b,c 在 Γ 中是邻接的。进一步，若 Γ 和 Γ_N 有相同的度数，则称 Γ 为 Γ_N 的正规 N-覆盖。

下面这个定理是[22] [引理 2.5]的一个特例，它稍微改进了 Praeger 在[23] [定理 4.1]中得到一个著名结果。

定理 2.4 设 Γ 是一个素数度 X-弧传递图，且设 $N\lhd X$ 在 $V\Gamma$ 上有两个以上的轨道，其中 $X\le Aut\Gamma$。则下列结论成立。

1) N 在 $V\Gamma$ 上半正则，$\frac{X}{N}\le Aut\Gamma_N$，$\Gamma_N$ 是 X/N-弧传递的，且 Γ 是 Γ_N 的正规 N-覆盖；

2) Γ 是 (X,s)-弧传递的当且仅当 Γ_N 是 $(X/N,s)$-弧传递的，其中 $1\le s\le 5$ 或 $s=7$；

3) $X_\alpha\cong(X/N)_\delta$，其中 $\alpha\in V\Gamma,\delta\in V\Gamma_N$。

3. 相关引理

本节将证明两个关于群论的引理，它们将用于定理 1.1 的证明。

引理 3.1 设 T 是一个单群，使得 $|T|\,\|\,2^{27}\cdot 3^2\cdot 7p^2$ 且 $7p^2\,\|\,|T|$，其中 p 为奇素数。则下列结论成立。

1) 若 $|\pi(T)|=3$，则满足条件的 $(T,|T|,p^2)$ 如下表 3。

Table 3. Cases with 3 prime factors in a single group
表 3. 单群中有 3 个素因子的情形

T	$PSL(2,8)$	$PSU(3,3)$
$\|T\|$	$2^3\cdot 3^2\cdot 7$	$2^5\cdot 3^3\cdot 7$
p^2	3^2	3^2

2) 若 $|\pi(T)|=4$，则群 T 不存在。

证明：因为 $7p^2\,\|\,|T|$，从而 $3\le|\pi(T)|\le 4$，因此单群 T 满足[18] [定理 I]。若 $|\pi(T)|=3$，则 $p\in\{3,7\}$，从而 T 是一个 $\{2,3,7\}$-群。若 $p=3$ 时，从而有 $|T|\,\|\,2^{27}\cdot 3^4\cdot 7$，由[18] [表 1]可得，$T=PSL(2,7)$，$PSL(2,8)$ 或 $PSU(3,3)$，进一步由 $7p^2\,\|\,|T|$ 可得 $T=PSL(2,8)$ 或 $PSU(3,3)$。当 $p=7$ 时，我们有 $|T|\,\|\,2^{27}\cdot 3^2\cdot 7^3$，并且 $7^3\,\|\,|T|$，再由[18] [表 1]可知，此时不存在群 T。

若 $|\pi(T)|=4$，$|T|\,\|\,2^{27}\cdot 3^2\cdot 7p^2$，且 $p>7$ 或 $p=5$ 从而有

$$3^3\nmid|T|,\quad 7^2\nmid|T|,\quad p^3\nmid|T|. \tag{1}$$

由[18] [定理 I] 可知，T 满足[18] [表 2]，或 $T=PSL(2,r)$ 是一个 $|\pi(T)|=4$ 的群，其中 r 为一个素数幂。

对于[18] [表 2]中的 31 个群，通过检查每个群的阶可得，群 T 不存在。当 $T=PSL(2,r)$ 时，如果 r 是 2, 3, 5 或 7 的方幂，或者 $r\ge 11$ 是一个素数。对于第一种情况，根据[18] [表 3]中的群，检验每个群的阶可得，群 T 不存在。对于另一种情形，有

$$|PSL(2,r)|=\frac{r(r-1)(r+1)}{2}$$

此时，$r=p^2$，矛盾。

引理 3.2 设 T 是一个单群，使得 $|T|\,\|\,2^{11}\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7p^2$ 且 $35p^2\,\|\,|T|$，其中 p 是一个奇素数。则下列结论成立。

1) 若 $|\pi(T)|=3$，群 T 不存在。

2) 若 $|\pi(T)|=4$，满足条件的 $(T,|T|,p^2)$ 如表 4。

3) 若 $|\pi(T)|=5$，群 T 不存在。

Table 4. The situation of 4 prime factors in a single group T
表 4. 单群 T 中 4 个素因子的情形

T	$\|T\|$	p^2
J_2	$2^7\cdot3^3\cdot5^2\cdot7$	3^2
A_7	$2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$	3^2
A_8	$2^6\cdot3^2\cdot5\cdot7$	3^2
A_9	$2^6\cdot3^4\cdot5\cdot7$	3^2
A_{10}	$2^7\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$	3^2
$PSL(3,4)$	$2^6\cdot3^2\cdot5\cdot7$	3^2
$PSU(3,5)$	$2^4\cdot3^2\cdot5^3\cdot7$	5^2
$PSU(4,3)$	$2^7\cdot3^6\cdot5\cdot7$	3^2
$PSp(6,2)$	$2^9\cdot3^4\cdot5\cdot7$	3^2

证明：因为 $35p^2\|\,|T|$，从而 $3\le|\pi(T)|\le5$。如果 $|\pi(T)|=3$，由[18] [定理 I]可知，单群 T 同构于[18] [表 1]中的 8 个群其中之一。通过检验每个群 T 的阶可得，没有满足条件的群 T 存在，故而矛盾。

假设 $|\pi(T)|=4$，此时 $p\in\{3,5,7\}$，注意 $|T|\,\|\,2^{11}\cdot3^4\cdot5^2\cdot7p^2$，则

$$2^{12}\nmid|T|，\ 3^7\nmid|T|，\ 5^5\nmid|T|，\ 7^4\nmid|T|，\ p^2\|\,|T|. \tag{2}$$

根据[18] [定理 I]可知，T 满足[18] [表 2]，或 $T=PSL(2,r)$ 是一个 K_4-群。对于[18] [表 2]中的 31 个单群，通过检查它们的阶可得，满足条件的群都在表 2 中列出。假设 $T=PSL(2,r)$ 是一个 K_4-群。如果 r 是 2, 3, 5 或 7 的方幂，根据[18] [表 3]中的群，检验每个群的阶可知，群 T 不存在。

假设 $|\pi(T)|=5$，则 $p>7$ 且满足定理 2.2.由于 $|T|\,\|\,2^{11}\cdot3^4\cdot5^2\cdot7p^2$，则

$$2^{12}\nmid|T|，\ 3^5\nmid|T|，\ 5^3\nmid|T|，\ 7^2\nmid|T|，\quad p^2\|\,|T| \tag{3}$$

假设 $T=PSL(2,q)$，

$$|T|=\frac{q(q-1)(q+1)}{2}$$

则有

$$\frac{q(q-1)(q+1)}{2}\,\bigg|\,2^{11}\cdot3^4\cdot5^2\cdot7p^2$$

由公式(3)可知 q 是 2, 3, 5, 7 或 p 的方幂。如果 q 是 2 的方幂，则 $|\pi(q^2-1)|=4$ 可知，$q=2^6,2^8$ 或 2^9。检查它们的阶可知，都不满足公式(3)。如果 q 是 3，5 或 7 的方幂，则 $|\pi(q^2-1)|\ne4$，矛盾。如果 q 是 p 的方幂，则 $q=p^2$，从而

$$\frac{(q-1)}{2}\cdot\frac{(q+1)}{2}\,\bigg|\,2^{10}\cdot3^4\cdot5^2\cdot7.$$

因为$\left(\frac{q-1}{2},\frac{q+1}{2}\right)=1$，所以$\frac{q-1}{2}\Big|3^4\cdot 5^2\cdot 7$或$\frac{q+1}{2}\Big|3^4\cdot 5^2\cdot 7$。因为$\left|\pi\left(q^2-1\right)\right|=4$，因此，这样的 q 不存在，矛盾。

假设$T=PSU(3,q)$。得到

$$|T|=\frac{1}{(3,q+1)}q^3(q-1)(q-1)^2\left(q^2-q+1\right)$$

由公式(3)可知 q 是 2, 3, 5, 7 或 p 的方幂。如果 q 是 2, 3, 5 或 7 的方幂，因为$\left|\pi\left(\left(q^2-1\right)\left(q^3+1\right)\right)\right|=4$且$|T|\big\|2^{11}\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7p^2$，这样的 q 不存在，矛盾。如果 q 是 p 的方幂，则$q^3=p^2$，矛盾。

假设$T=PSL(3,q)$。则

$$|T|=\frac{1}{(3,q-1)}q^3(q-1)^2(q+1)\left(q^2+q+1\right)$$

由公式(3)可知 q 是 2, 3, 5, 7 或 p 的方幂。如果 q 是 2, 5 或 7 的方幂，因为$\left|\pi\left(\left(q^2-1\right)\left(q^3-1\right)\right)\right|=4$，这样的 q 不存在，矛盾。如果 q 是 3 的方幂，因为$\pi\left(\left(q^2-1\right)\left(q^3-1\right)\right)=4$，算出$q=3^2,3^3$。满足条件的群有$T=PSL(3,9)$或$PSL(3,27)$，检查它们的阶可知都与公式(3)矛盾，群 T 不存在。如果 q 是 p 的方幂，则$q^3=p^2$，矛盾。

假设$T=Sz\left(2^{2m+1}\right)$或$R\left(3^{2m+1}\right)$。因此$|T|=2^{4m+2}\left(2^{4m+2}+1\right)\left(2^{4m+2}-1\right)$或$3^{6m+3}\left(3^{6m+3}+1\right)\left(3^{2m+1}-1\right)$。对于第一种情形，由$2^{4m+2}\le 2^{11}$，则$m=1$或 2。当$m=1$时，因为$\left|\pi\left(Sz\left(2^3\right)\right)\right|=4$，所以$T=Sz\left(2^3\right)$。当$m=2$时，因为$\left|\pi\left(Sz\left(2^5\right)\right)\right|=4$，所以$T=Sz\left(2^5\right)$。检查它们的阶可知都不满足$35p^2\big\||T|$。对于第二种情形，因为$3^{6m+3}\ge 3^9$与公式(3)相矛盾，群 T 不存在。

假设$T=O_5(q)$，则

$$|T|=\frac{1}{2}q^4\left(q^4-1\right)\left(q^3-1\right)\left(q^2-1\right)$$

由公式(3)可知 q 是 $2, 3, p$ 的方幂。如果 q 是 2, 3 的方幂，因为$\left|\pi\left(q^4-1\right)\right|=4$和公式(3)，这样的 q 不存在，矛盾。如果 q 是 p 的方幂，则$q^4=p^2$，矛盾。

最后，假设 T 属于情形(g)列出的群，通过检查每个群的阶可知，满足条件的群 T 不存在，矛盾。

4. 定理 1.1 的证明

设Γ是连通的阶为 $8p^2$ 的 7 度 X-弧传递图，其中$X\le Aut\Gamma$，p 是奇素数。设 N 是 X 的极小正规子群，则$N=T^d$，其中 T 为单群且$d\ge 1$。设$\alpha\in V\Gamma$。我们先证明下面的引理。

引理 4.1 假设 N 是非交换的，则$d=1$。

证明：反正法。设 N 是非交换的且$d\ge 2$，从而有$|N|\nmid 8p^2, N_\alpha\ne 1$，根据定理 2.4 可知 N 在$V\Gamma$上至多有两个轨道。设$N=T_1\times T_2\times\cdots\times T_d$，其中$T\cong T_i\,(i=1,2,\cdots,d)$。

假设 N 在$V\Gamma$上是传递的。因为$1\ne N_\alpha\lhd X_\alpha$且$\Gamma$是连通的，所以有$1\ne N_\alpha^{\Gamma(\alpha)}\lhd X_\alpha^{\Gamma(\alpha)}$。由此可知，$N_\alpha^{\Gamma(\alpha)}$是传递的，且$\Gamma$是 N-弧传递的。如果T_1在$V\Gamma$上传递，则中心化子$C_N(T_1)$在$V\Gamma$上半正则(可见[24] [定理 4.2A])，因此是T_2也是半正则的，这和$|T_2|$不能整除$|V\Gamma|=8p^2$是矛盾的。如果T_1在$V\Gamma$上至少有 3 个轨道，由定理 2.4 可知，T_1是半正则的，推出矛盾。因此，T_1在$V\Gamma$上恰好有两个轨道，分别记作 V 和 W。因为$T_1\lhd N$，V 和 W 在$V\Gamma$上构成 N-不变块系。所以，点稳定子群N_v在 N 中的指数为 2，这与$N=T^d$不存在指数为 2 的子群相矛盾。

假设 N 在$V\Gamma$上恰好有两个轨道，分别记作V_1和V_2。那么Γ是二部图且二部分别为V_1和V_2。假设$X^+=X_{V_1}=X_{V_2}$是二部图Γ上的点稳定子群。如果X^+作用在V_1上是不忠实的，根据[25] [引理 5.2]可知，

Γ 是一个完全二部图，从而有 $\Gamma = K_{7,7}$ 且 $val(\Gamma)=7$，于是推出 $|V\Gamma|=14$，矛盾。假设 X^+ 在 V_1 上的作用是忠实的。则 $N \le X^+$ 可以被视为 V_1 上的传递置换群。若 T_1 在 V_1 上作用传递，则由[24] [定理 4.2A]可得，T_2 在 V_1 上是半正则的，于是 $|T_2|\,\big|\,4p^2$，这是矛盾的。因此 T_1 在 V_1 上至少有 2 个轨道。又根据[26] [引理 3.2]，得到 T_1 在 V_1 上是半正则的，矛盾。

定理 1.1 的证明主要是从 X 在 $V\Gamma$ 上是拟本原和二部拟本原两种情形来讨论。

引理 4.2 假设 X 在 $V\Gamma$ 上是拟本原的，存在两个 7 度弧传递图 $\mathcal{C}_{72}^1$ 和 $\mathcal{C}_{72}^2$，且 $Aut(\mathcal{C}_{72}^1)\cong Aut(\mathcal{C}_{72}^2)\cong PSL(2,8)\times\mathbb{Z}_2$。

证明：因为 X 在 $V\Gamma$ 上是拟本原的，则 N 在 $V\Gamma$ 上是传递的。如果 N 是交换的，则 N 在 $V\Gamma$ 上是正则的且 $|T|^d=|N|=8p^2$，矛盾。于是 N 是非交换的，根据引理 4.1，得到 $d=1$ 且 $N=T$。又因为 $T_\alpha \ne 1$，因此 Γ 是 T-弧传递的，且 T_α 满足引理 2.3。下面的证明将分为两个部分，$5\,\big|\,|T_\alpha|$ 和 $5\nmid|T_\alpha|$。

情形 1：假设 $5\,\big|\,|T_\alpha|$。

根据引理 2.3，得到 $|T_\alpha|\,\big|\,2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$ 且 $T_\alpha^{\Gamma(\alpha)}\cong A_7$ 或 S_7。又因为 $|T|=|V\Gamma||T_\alpha|$，从而有 $|T|\,\big|\,2^{11}\cdot3^4\cdot5^2\cdot7p^2$，而且，当 $35\,\big|\,|T_\alpha|$ 时，$35p^2\,\big|\,|T|$。于是 T 满足引理 3.2。由 $3\le|\pi(T)|\le5$，再由引理 3.2，只需考虑 $|\pi(T)|=4$ 的情形。

假设 $|\pi(T)|=4$，由引理 3.2(2)可知，表 2 中的群都满足条件。如果 $(T,p^2)=(J_2,3^2)$，$(A_7,3^2)$，$(A_8,3^2)$，$(A_{10},3^2)$，$(PSL(3,4),3^2)$，$(PSU(4,3),3^2)$ 或 $(PSp(6,2),3^2)$ 时，它们的 $|V\Gamma|$ 均为 $2^3\cdot3^2$，因为 $|T_\alpha|=|T|/|V\Gamma|$，所以 $|T_\alpha|=2^4\cdot3\cdot5^2\cdot7$，$5\cdot7$，$2^3\cdot5\cdot7$，$2^4\cdot3^2\cdot5^2\cdot7$，$2^4\cdot5\cdot7$，$2^4\cdot3^4\cdot5\cdot7$ 或 $2^6\cdot3^2\cdot5\cdot7$，由引理 2.3 可知，这样的 T_α 不存在，矛盾。如果 $(T,p^2)=(A_9,3^2)$，则 $|V\Gamma|=2^3\cdot3^2$，由于 $|T_\alpha|=|T|/|T_\alpha|=2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$，由引理 2.3 可知，$T_\alpha\cong A_7$，利用 Magma [17]计算可得，图 Γ 不存在。如果 $(T,p^2)=(PSU(3,5),5^2)$，则 $|V\Gamma|=2^3\cdot5^2$，因为 $|T_\alpha|=|T|/|V\Gamma|=2\cdot3^2\cdot5\cdot7$，由引理 2.3 可得，矛盾。

情形 2：假设 $5\nmid|T_\alpha|$。

根据引理 2.3，得到 $|T_\alpha|\,\big|\,2^{24}\cdot3^2\cdot7$，由 T 的传递性和 $|T|=|T_\alpha||V\Gamma|$，推出 $|T|\,\big|\,2^{27}\cdot3^2\cdot7p^2$。另一方面，因为 Γ 是 T-弧传递的，从而有 $7\,\big|\,|T_\alpha|$，因此，$7p^2\,\big|\,|T|$。于是，T 满足引理 3.1。故而 $|\pi(T)|=3$ 或 4。再由引理 3.1，只需考虑 $|\pi(T)|=3$ 的情形。

假设 $|\pi(T)|=3$，得到 $(T,p^2)=(PSL(2,8),3^2)$ 或 $(PSU(3,3),3^2)$。对于第一种情形，$|V\Gamma|=2^3\cdot3^2$，因此有 $|T_\alpha|=|T|/|V\Gamma|=7$，由例 2.1 可知存在两个图 $\mathcal{C}_{72}^1$ 和 $\mathcal{C}_{72}^2$。对于第二种情形，$|V\Gamma|=2^3\cdot3^2$，因此 $|T_\alpha|=|T|/|V\Gamma|=2^3\cdot3\cdot7$，再由 Atlas [16]可知，$PSU(3,3)$ 不存在阶为 $2^2\cdot3\cdot7$ 的子群，矛盾。

引理 4.3 假设 X 在 $V\Gamma$ 上是二部拟本原的，则图 Γ 不存在。

证明：因为 X 在 $V\Gamma$ 上是二部拟本原的，X 有一个极小正规子群 $N=T^d$ 在 $V\Gamma$ 上恰好有 2 个轨道，分别记作 V_1 和 V_2。那么 V_1 和 V_2 是图 Γ 的两个部。设 $X^+=X_{V_1}=X_{V_2}$。从而有 $N\le X^+$，$|X:X^+|=2$ 且 $X_\alpha=X_\alpha^+$。如果 N 是交换的，则 N 在 V_1 上是正则的且 $|T|^d=|N|=4p^2$，矛盾。所以 N 是不交换的，根据引理 4.1 可知，$N=T$ 为非交换单群。

假设 X^+ 作用在 V_1 和 V_2 上是不忠实的，根据[25] [引理 5.2]可知，Γ 是一个完全二部图，因此，$\Gamma\cong K_{7,7}$ 且 $|V\Gamma|=14$，矛盾。

假设 X^+ 作用在 V_1 和 V_2 上是忠实的，由[27] [定理 1.5]，则下列表述之一成立：

1) X^+ 在 V_i 上是拟本原的。

2) X^+ 有两个正规子群 U_1 和 U_2，使得 $U_1\cong U_2$ 在 $V\Gamma$ 上半正则。进一步可得 $U_1\times U_2$ 在 V_i 上是正则的。

对于情形(2)，我们有 $|U|^2=|V_i|=4p^2$，矛盾。下考察(1)，因为 X^+ 在 V_i 上是拟本原的且有一个极小正规子群 T，这里的 T 是一个单群。根据 O'Nan-Scott-Praeger 定理[24]，$soc(X^+)=T$ 或 T^2。先考虑 $soc(X^+)=T^2$，于是 X^+ 是复合全形型的且 T 在 V_i 上是正则的。故而有 $|T|=|V_i|=4p^2$，矛盾。因此，

$soc\left(X^+\right)=T$，假设 T 不是 X 的极小正规子群。因为 $X=X^+.\mathbb{Z}_2$，得到 $X=X^+\times\mathbb{Z}_2$，所以正规子群 $\mathbb{Z}_2$ 在 $V\Gamma$ 上有 $4p^2$ 个轨道，这与 X 是二部拟本原的相矛盾。由此推出 X 是几乎单群且令它的基柱为 $soc(X)=T$。下设 $X=T.o$，$X^+=T.o'$，其中 $\mathbb{Z}_2\le o\le Out(T)$ 且 $|o:o'|=2$。后面的证明，将分两种情况讨论。

情形 1： 假设 $5\nmid|T_\alpha|$。

因为 $T_\alpha\le X_\alpha$，根据引理 2.3，有 $|T_\alpha|\,\big|\,2^{24}\cdot3^2\cdot7$。又因为 $|T|=|V_1||T_\alpha|$，推出 $|T|\,\big|\,2^{26}\cdot3^2\cdot7p^2$。另一方面，由于 $T_\alpha\ne1$，所以 $7\,\big|\,|T_\alpha|$，于是有 $7p^2\,\big|\,|T|$。因此，T 满足引理 3.1 且 $|\pi(T)|=3$ 或 4。再由引理 3.1，只需考虑 $|\pi(T)|=3$ 的情形。

先考虑 $|\pi(T)|=3$ 的情形，由引理 3.1 (1)，容易得到 $(T,p^2)=(PSL(2,8),3^2)$ 或 $(PSU(3,3),3^2)$。对于第一种情形，由 Atlas [16]可知，$Out(PSL(2,8))\cong\mathbb{Z}_3$，有 $o=\mathbb{Z}_2,o'=1$ 且 $X^+=T$。从而 $|X_\alpha|=|X_\alpha^+|=|T_\alpha|=|T|/|V_1|=2\cdot7$，由引理 2.3 可知，这是矛盾的。对于第二种情形，由 $Out(T)\cong\mathbb{Z}_2$，有 $o=\mathbb{Z}_2,o'=1$，因此 $X^+=T$，于是 $|X_\alpha|=|X_\alpha^+|=|T_\alpha|=|T|/|V_1|=2^3\cdot3\cdot7$，由引理 2.3 可知，得到 $X_\alpha\cong PSL(3,2)$，利用 Magma [17]计算可知，这种情况不存在图。

情形 2： 假设 $5\,\big|\,|T_\alpha|$。

因为 $T_\alpha\lhd X_\alpha$，由引理 2.3，推出 $|T_\alpha|\,\big|\,2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$ 且 $T_\alpha^{\Gamma(\alpha)}\cong A_7$ 或 S_7。又因为 $|T|=|T_\alpha||V_1|$，从而 $|T|\,\big|\,2^{10}\cdot3^4\cdot5^2\cdot7p^2$。由 $35\,\big|\,|T_\alpha|$，于是有 $35p^2\,\big|\,|T|$。因此 T 满足引理 3.2。再由引理 3.2，只需考虑 $|\pi(T)|=4$ 的情形。

假设 $|\pi(T)|=4$，根据引理 3.2 (2)，表 2 中的群都满足条件。如果 $(T,p^2)=(J_2,3^2)$，从而有 $|T_\alpha|=|T|/|V_1|=2^5\cdot3\cdot5^2\cdot7$。进一步，由 Atlas [16]可知，$Out(J_2)\cong\mathbb{Z}_2$，有 $o=\mathbb{Z}_2,o'=1$ 且 $X^+=T.o'=T$，于是 $|X_\alpha|=|X_\alpha^+|=|T_\alpha||o'|=2^5\cdot3\cdot5^2\cdot7$。根据引理 2.3 可知，矛盾。如果 $(T,p^2)=(A_7,3^2)$，则 $|T_\alpha|=|T|/|V_1|=2\cdot5\cdot7$，由 Atlas [16]可知，$Out(A_7)\cong\mathbb{Z}_2$，有 $o=\mathbb{Z}_2,o'=1$ 且 $X^+=T.o'=T$，因此 $|X_\alpha|=|X_\alpha^+|=|T_\alpha||o'|=2\cdot5\cdot7$。由引理 2.3 可知，矛盾。如果 $(T,p^2)=(A_8,3^2)$，则 $|T_\alpha|=|T|/|V_1|=2^4\cdot5\cdot7$。由 Atlas [16]，有 $Out(A_8)\cong\mathbb{Z}_2$，因此 $o=\mathbb{Z}_2,o'=1$，因为 $X^+=T.o'=T$，所以 $|X_\alpha|=|X_\alpha^+|=|T_\alpha||o'|=2^4\cdot5\cdot7$，由引理 2.3 推出矛盾。如果 $(T,p^2)=(A_9,3^2)$，则 $|T_\alpha|=|T|/|V_1|=2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7$。由 Atlas [16]，有 $Out(A_9)\cong\mathbb{Z}_2$，推出 $o=\mathbb{Z}_2,o'=1$，由于 $X^+=T.o'=T$，因此 $|X_\alpha|=|X_\alpha^+|=|T_\alpha||o'|=2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7$。由引理 2.3 可得，$T_\alpha\cong S_7$，利用 Magma [17]计算可知，图 Γ 不存在。如果 $(T,p^2)=(A_{10},3^2)$，从而有 $|T_\alpha|=|T|/|V_1|=2^5\cdot3^2\cdot5^2\cdot7$。进一步，由 Atlas [16]可知，$Out(A_{10})\cong\mathbb{Z}_2$，有 $o=\mathbb{Z}_2,o'=1$ 且 $X^+=T.o'=T$，于是推出 $|X_\alpha|=|X_\alpha^+|=|T_\alpha||o'|=|T|=2^5\cdot3^2\cdot5^2\cdot7$。由引理 2.3 可知，矛盾。若 $(T,p^2)=(PSL(3,4),3^2)$，从而有 $|T_\alpha|=|T|/|V_1|=2^4\cdot5\cdot7$，进而由 Atlas [16]可知，$Out(PSL(3,4))\cong\mathbb{Z}_2\times S_3$，我们得到 $o=\mathbb{Z}_2\times S_3,o'=S_3$ 或 $o=S_3,o'=\mathbb{Z}_3$ 或 $o=\mathbb{Z}_2^2,o'=\mathbb{Z}_2$ 或 $o=\mathbb{Z}_2,o'=1$。又因为 $X^+=T.o'$，$|T_\alpha|=2^4\cdot5\cdot7$，所以 $|X_\alpha|=|X_\alpha^+|=|T_\alpha||o'|=2^5\cdot3\cdot5\cdot7,2^4\cdot3\cdot5\cdot7,2^5\cdot5\cdot7$ 或 $2^4\cdot5\cdot7$。根据引理 2.3 可知，矛盾。如果 $(T,p^2)=(PSU(3,5),5^2)$，则 $|T_\alpha|=|T|/|V_1|=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7$。由 Atlas [16]可知，有 $Out(PSU(3,5))\cong S_3$，推出 $o=S_3,o'=\mathbb{Z}_3$ 或 $o=\mathbb{Z}_2,o'=1$。因为 $X^+=T.o'$，所以 $|X^+|=|X_\alpha^+|=|T_\alpha||o'|=2^2\cdot3^3\cdot5\cdot7$ 或 $2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7$。由引理 2.3 推出矛盾。如果 $(T,p^2)=(PSU(4,3),3^2)$，从而有 $|T_\alpha|=|T|/|V_1|=2^5\cdot3^4\cdot5\cdot7$。再由 Atlas [16]可知，$Out(PSU(4,3))\cong D_8$，有 $o=D_8,o'=\mathbb{Z}_2^2$ 或 $o=\mathbb{Z}_2^2,o'=\mathbb{Z}_2$ 或 $o=\mathbb{Z}_2,o'=1$。又因为 $X^+=T.o'$，$|T_\alpha|=2^5\cdot3^4\cdot5\cdot7$，因此 $|X_\alpha|=|X_\alpha^+|=|T_\alpha||o'|=2^7\cdot3^4\cdot5\cdot7,2^6\cdot3^4\cdot5\cdot7$ 或 $2^5\cdot3^4\cdot5\cdot7$。根据引理 2.3，矛盾。如果 $(T,p^2)=(PSp(6,2),3^2)$，则 $|T_\alpha|=|T|/|V_1|=2^7\cdot3^2\cdot5\cdot7$。由 Atlas [16]可知，$Out(PSp(6,2))\cong1$，从而 $X=T$，于是有 $|X_\alpha|=|T_\alpha|=2^7\cdot3^2\cdot5\cdot7$，由引理 2.3 可知，矛盾。

基金项目

国家自然科学基金资助项目资助(基金名称：弧传递有向图及关联置换群问题研究，编号：11961076)。

参考文献

[1] Chao, C.Y. (1971) On the Classification of Symmetric Graphs with a Prime Number of Vertices. *Transactions of the American Mathematical Society*, **158**, 247-256. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1971-0279000-7

[2] Cheng, Y. and Oxley, J. (1987) On Weakly Symmetric Graphs of Order Twice a Prime. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **42**, 196-211. https://doi.org/10.1016/0095-8956(87)90040-2

[3] Wang, R.J. and Xu, M.Y. (1993) A Classification of Symmetric Graphs of Order $3p$. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **58**, 197-216. https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1037

[4] Praeger, C.E., Wang, R.J. and Xu, M.Y. (1993) Symmetric Graphs of Order a Product of Two Distinct Primes. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **58**, 299-318. https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1046

[5] Praeger, C.E. and Xu, M.Y. (1993) Vertex-Primitive Graphs of Order a Product of Two Distinct Primes. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **59**, 245-266. https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1068

[6] Feng, Y.Q. and Kwak, J.H. (2007) Cubic Symmetric Graphs of Order a Small Number Times a Prime Square. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **97**, 627-646. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2006.11.001

[7] Feng, Y.Q. and Kwak, J.H. (2006) Cubic Symmetric Graphs of Order Twice an Odd Prime Power. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **81**, 153-164. https://doi.org/10.1017/S1446788700015792

[8] Feng, Y.Q., Zhou, J.X. and Li, Y.T. (2016) Pentavalent Symmetric Graphs of Order Twice a Prime Power. *Discrete Mathematics*, **339**, 2640-2651. https://doi.org/10.1016/j.disc.2016.05.008

[9] Pan, J.M., Liu, Z. and Xu, X.F. (2015) Pentavalent Symmetric Graphs of Order Twice Power. *Algebra Colloquium*, **22**, 383-394. https://doi.org/10.1142/S1005386715000334

[10] Zhou, J.X. and Feng, Y.Q. (2010) Tetravalent s-Transitive Graphs of Order Twice a Prime Power. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **88**, 277-288. https://doi.org/10.1017/S1446788710000066

[11] Guo, S.T., Shi, J.T. and Zhang, Z.J. (2011) Heptavalent Symmetric Graphs of Order $4p$. *The South Asian Journal of Mathematics*, **3**, 131-136.

[12] Guo, S.T., Hou, H.L. and Xu, Y. (2017) Heptavalent Symmetric Graphs of Order $16p$. Algebra Colloquium, **24**, 453-466. https://doi.org/10.1142/S1005386717000293

[13] Pan, J.M., Ling, B. and Ding, S.Y. (2017) On Symmetric Graphs of Order Four Times an Odd Square-Free Integer and Valency Seven. *Discrete Mathematics*, **340**, 2071-2078. https://doi.org/10.1016/j.disc.2017.04.008

[14] Hua, X.H., Li, C. and Xin, X. (2018) Valency Seven Symmetric Graphs of Order $2pq$. *Czechslovak Mathematical Journal*, **68**, 581-599. https://doi.org/10.21136/CMJ.2018.0530-15

[15] Pan, J.M. and Yin, F.G. (2018) Symmetric Graphs of Order Four Times a Prime Power and Valency Seven. *Journal of Algebra and Its Applications*, **17**, Article ID: 1850093. https://doi.org/10.1142/S0219498818500937

[16] Conway, J.H., Curtis, R.T., Norton, S.P., Parker, R.A. and Wilson, R.A. (1985) Atlas of Finite Groups. Oxford Univ. Press, London/New York.

[17] Bosma, W., Cannon, C. and Playoust, C. (1997) The Magma Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125

[18] Huppert, B. and Lempken, W. (2000) Simple Groups of Order Divisible by at Most Four Primes. *Francisk Skorina Gomel State University*, **16**, 64-75.

[19] Jafarzadeh, A. and Iranmanesh, A. (2007) On Simple K_n-Groups for n=5, 6. In: Campbell, C.M., Quick, M.R., Robertson, E.F. and Smith, G.C., Eds., *Groups St. Andrews* 2005, *London Mathematical Lecture Note Series*, Cambridge University Press, Cambridge, 668-680.

[20] Guo, S.T., Li, Y. and Hua, X.H. (2016) (G,s)-Transitive Graphs of Valency 7. *Algebra Colloquium*, **23**, 493-500. https://doi.org/10.1142/S100538671600047X

[21] Li, C.H., Lu, Z.P. and Wang, G.X. (2016) Arc-Transitive Graphs of Square-Free Order and Small Valency. *Discrete Mathematics*, **339**, 2907-2918. https://doi.org/10.1016/j.disc.2016.06.002

[22] Li, C.H. and Pan, J.M. (2008) Finite 2-Arc-Transitive Abelian Cayley Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **29**, 148-158. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2006.12.001

[23] Praeger, C.E. (1992) An O'Nan-Scott Theorem for Finite Quasiprimitive Permutation Groups and an Application to 2-Arc-Transitive Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **47**, 227-239. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-47.2.227

[24] Dixon, J.D. and Mortimer, B. (1997) Permutation Groups. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0731-3

[25] Giudici, M., Li, C.H. and Praeger, C.E. (2003) Analysing Finite Locally S-Arc-Transitive Graphs. Trans. Amer. Math.

Soc., **356**, 291-317. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-03-03361-0

[26] Lu, Z.P., Wang, C.Q. and Xu, M.Y. (2004) On Semisymmetric Cubic Graphs of Order $6p^2$. *Science in China Series A Mathematics*, **47**, 1-17.

[27] Li, C.H., Praeger, C.E., Venkatesh, A. and Zhou, S.M. (2002) Finite Locally-Quasiprimitive Graphs. *Discrete Mathematics*, **246**, 197-218. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(01)00258-8