Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(1), 131-142
Published Online January 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.111019

Hans汉斯

从四面体到N维单形的棱切球心、热尔岗点、奈格尔点及其坐标公式

李兴源

广州一智通供应链管理有限公司，广东 广州
Email: lihpb@qq.com

收稿日期：2020年12月21日；录用日期：2021年1月22日；发布日期：2021年1月29日

摘 要

四面体存在棱切球的充要条件是该四面体的三组对棱之和相等。对于存在棱切球的四面体，本文给出其棱切球心、热尔岗点、奈格尔点的坐标公式，并将这三者的坐标公式推广至存在棱切超球面的*n*维单形。

关键词

四面体，棱切球，热尔岗点，奈格尔点，*n*维单形

Edge-Tangent's Sphere Center, Gergonne Point, Nagel Point and Their Coordinate Formula from Tetrahedron to N-Simplex

Xingyuan Li

Guangzhou 1ziton Supply Chain Management Co., Ltd., Guangzhou Guangdong
Email: lihpb@qq.com

Received: Dec. 21st, 2020; accepted: Jan. 22nd, 2021; published: Jan. 29th, 2021

Abstract

The sufficient and necessary condition for the tetrahedron to have an edge-tangent's sphere is that the sum of the three groups of opposite sides is equal in the tetrahedron. For a tetrahedron with

文章引用: 李兴源. 从四面体到 N 维单形的棱切球心、热尔岗点、奈格尔点及其坐标公式[J]. 理论数学, 2021, 11(1): 131-142. DOI: 10.12677/pm.2021.111019

an edge-tangent's sphere, the coordinate formula of the edge-tangent's sphere center, Gergonne Point and Nagel Point is given in this paper, and the coordinate formulas of these three points are extended to *n*-simplex with an edge-tangent's hypersphere.

Keywords

Tetrahedron, Edge-Tangent's Sphere, Gergonne Point, Nagel Point, *n*-Simplex

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

如图 1 所示，若四面体 $ABCD$ 存在棱切球，各棱上的切点分别为 M_{AB}、M_{AC}、M_{AD}、M_{BC}、M_{BD}、M_{CD}。本文约定 O 为坐标原点，A、B、C、D 四点的坐标分别为 (x_1,y_1,z_1)、(x_2,y_2,z_2)、(x_3,y_3,z_3)、(x_4,y_4,z_4)；设

$$AM_{AB}=AM_{AC}=AM_{AD}=a，BM_{AB}=BM_{BC}=BM_{BD}=b，$$

$$CM_{AC}=CM_{BC}=CM_{CD}=c，DM_{AD}=DM_{BD}=DM_{CD}=d$$ [1].

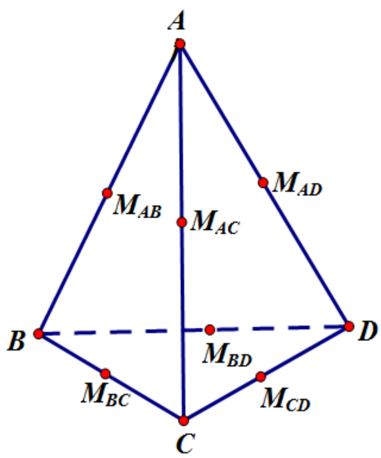

Figure 1. The tangent points on edge-tangent's sphere of the tetrahedron
图 1. 四面体棱切球上的各切点

2. 棱切球心的坐标公式

2.1. 四面体的棱切球心

若四面体 $ABCD$ 的三组对棱之和相等即存在棱切球，则四面体 $ABCD$ 的棱切球心坐标为

$$\left(\frac{F_1}{(a+b)(a+c)(a+d)F},\frac{F_2}{(a+b)(a+c)(a+d)F},\frac{F_3}{(a+b)(a+c)(a+d)F}\right)$$。其中，

$$F_1=\begin{vmatrix}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OB}+b\cdot\overrightarrow{OA}\right) & (a+b)(y_2-y_1) & (a+b)(z_2-z_1)\\ \left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OC}+c\cdot\overrightarrow{OA}\right) & (a+c)(y_3-y_1) & (a+c)(z_3-z_1)\\ \left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OD}+d\cdot\overrightarrow{OA}\right) & (a+d)(y_4-y_1) & (a+d)(z_4-z_1)\end{vmatrix},$$

$$F_2=\begin{vmatrix}(a+b)(x_2-x_1) & \left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OB}+b\cdot\overrightarrow{OA}\right) & (a+b)(z_2-z_1)\\ (a+c)(x_3-x_1) & \left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OC}+c\cdot\overrightarrow{OA}\right) & (a+c)(z_3-z_1)\\ (a+d)(x_4-x_1) & \left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OD}+d\cdot\overrightarrow{OA}\right) & (a+d)(z_4-z_1)\end{vmatrix},$$

$$F_3=\begin{vmatrix}(a+b)(x_2-x_1) & (a+b)(y_2-y_1) & \left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OB}+b\cdot\overrightarrow{OA}\right)\\ (a+c)(x_3-x_1) & (a+c)(y_3-y_1) & \left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OC}+c\cdot\overrightarrow{OA}\right)\\ (a+d)(x_4-x_1) & (a+d)(y_4-y_1) & \left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OD}+d\cdot\overrightarrow{OA}\right)\end{vmatrix},$$

$$F=\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}.$$

证明：设四面体 $ABCD$ 的棱切球心为 P，由棱切球的性质可知

$$PM_{AB}\perp AB,\ PM_{AC}\perp AC,\ PM_{AD}\perp AD$$ [2].

再设平面 π_1、π_2、π_3 分别过 M_{AB}、M_{AC}、M_{AD} 且分别垂直于 AB、AC、AD，则四面体 $ABCD$ 的棱切球心 P 即为 π_1、π_2、π_3 这三个平面的交点。

由定比分点公式可得 M_{AB}、M_{AC}、M_{AD} 三点的坐标分别为 $\left(\frac{ax_2+bx_1}{a+b},\frac{ay_2+by_1}{a+b},\frac{az_2+bz_1}{a+b}\right)$、$\left(\frac{ax_3+cx_1}{a+c},\frac{ay_3+cy_1}{a+c},\frac{az_3+cz_1}{a+c}\right)$、$\left(\frac{ax_4+dx_1}{a+d},\frac{ay_4+dy_1}{a+d},\frac{az_4+dz_1}{a+d}\right)$。

则平面 π_1 的方程为：

$$(x_2-x_1)\left(x-\frac{ax_2+bx_1}{a+b}\right)+(y_2-y_1)\left(y-\frac{ay_2+by_1}{a+b}\right)+(z_2-z_1)\left(z-\frac{az_2+bz_1}{a+b}\right)=0.$$

整理可得：

$$\begin{aligned}&(a+b)\left[(x_2-x_1)x+(y_2-y_1)y+(z_2-z_1)z\right]\\&=(x_2-x_1)(ax_2+bx_1)+(y_2-y_1)(ay_2+by_1)+(z_2-z_1)(az_2+bz_1).\\&=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OB}+b\cdot\overrightarrow{OA}\right)\end{aligned}\qquad ①$$

同理平面 π_2、π_3 的方程分别为：

$$(a+c)\left[(x_3-x_1)x+(y_3-y_1)y+(z_3-z_1)z\right]=\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OC}+c\cdot\overrightarrow{OA}\right).\qquad ②$$

$$(a+d)\left[(x_4-x_1)x+(y_4-y_1)y+(z_4-z_1)z\right]=\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OD}+d\cdot\overrightarrow{OA}\right).\qquad ③$$

联立① ② ③所组成的线性方程组，并运用克拉姆法则解得[3]：

$$x=\frac{\begin{vmatrix}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OB}+b\cdot\overrightarrow{OA}\right) & (a+b)(y_2-y_1) & (a+b)(z_2-z_1)\\ \left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OC}+c\cdot\overrightarrow{OA}\right) & (a+c)(y_3-y_1) & (a+c)(z_3-z_1)\\ \left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OD}+d\cdot\overrightarrow{OA}\right) & (a+d)(y_4-y_1) & (a+d)(z_4-z_1)\end{vmatrix}}{(a+b)(a+c)(a+d)\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OB}+b\cdot\overrightarrow{OA}\right) & (a+b)(y_2-y_1) & (a+b)(z_2-z_1)\\ \left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OC}+c\cdot\overrightarrow{OA}\right) & (a+c)(y_3-y_1) & (a+c)(z_3-z_1)\\ \left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OD}+d\cdot\overrightarrow{OA}\right) & (a+d)(y_4-y_1) & (a+d)(z_4-z_1)\end{vmatrix}}{(a+b)(a+c)(a+d)\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}(a+b)(x_2-x_1) & \left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OB}+b\cdot\overrightarrow{OA}\right) & (a+b)(z_2-z_1)\\ (a+c)(x_3-x_1) & \left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OC}+c\cdot\overrightarrow{OA}\right) & (a+c)(z_3-z_1)\\ (a+d)(x_4-x_1) & \left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OD}+d\cdot\overrightarrow{OA}\right) & (a+d)(z_4-z_1)\end{vmatrix}}{(a+b)(a+c)(a+d)\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}(a+b)(x_2-x_1) & \left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OB}+b\cdot\overrightarrow{OA}\right) & (a+b)(z_2-z_1)\\ (a+c)(x_3-x_1) & \left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OC}+c\cdot\overrightarrow{OA}\right) & (a+c)(z_3-z_1)\\ (a+d)(x_4-x_1) & \left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OD}+d\cdot\overrightarrow{OA}\right) & (a+d)(z_4-z_1)\end{vmatrix}}{(a+b)(a+c)(a+d)\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}},$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}(a+b)(x_2-x_1) & (a+b)(y_2-y_1) & \left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OB}+b\cdot\overrightarrow{OA}\right)\\ (a+c)(x_3-x_1) & (a+c)(y_3-y_1) & \left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OC}+c\cdot\overrightarrow{OA}\right)\\ (a+d)(x_4-x_1) & (a+d)(y_4-y_1) & \left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OD}+d\cdot\overrightarrow{OA}\right)\end{vmatrix}}{(a+b)(a+c)(a+d)\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}(a+b)(x_2-x_1) & (a+b)(y_2-y_1) & \left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OB}+b\cdot\overrightarrow{OA}\right)\\(a+c)(x_3-x_1) & (a+c)(y_3-y_1) & \left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OC}+c\cdot\overrightarrow{OA}\right)\\(a+d)(x_4-x_1) & (a+d)(y_4-y_1) & \left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right)\left(a\cdot\overrightarrow{OD}+d\cdot\overrightarrow{OA}\right)\end{vmatrix}}{(a+b)(a+c)(a+d)\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\1 & x_2 & y_2 & z_2\\1 & x_3 & y_3 & z_3\\1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}}.$$

2.2. N 维单形的棱切球心

由文献[4]可知，n 维单形 $A_0A_1\cdots A_n$ 存在棱切超球的充要条件是其各棱长满足：

$$A_iA_j=a_i+a_j,\ (0\le i\ne j\le n,\ \ a_i,a_j\in R^+).$$

设 A_i 的坐标为 $\left(x_{i,1},x_{i,2},\cdots,x_{i,n}\right)$，参照前面的方法可以求出 n 维单形 $A_0A_1\cdots A_n$ 的棱切超球球心坐标为 $\left(\frac{F_1}{F\prod_{i=1}^{n}(a_0+a_i)},\frac{F_2}{F\prod_{i=1}^{n}(a_0+a_i)},\cdots,\frac{F_n}{F\prod_{i=1}^{n}(a_0+a_i)}\right)$。其中，

$$F_1=\begin{vmatrix}\left(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_0}\right)\left(a_0\cdot\overrightarrow{OA_1}+a_1\cdot\overrightarrow{OA_0}\right) & (a_0+a_1)(x_{1,2}-x_{0,2}) & \cdots & (a_0+a_1)(x_{1,n}-x_{0,n})\\\left(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_0}\right)\left(a_0\cdot\overrightarrow{OA_2}+a_2\cdot\overrightarrow{OA_0}\right) & (a_0+a_2)(x_{2,2}-x_{0,2}) & \cdots & (a_0+a_2)(x_{2,n}-x_{0,n})\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\\left(\overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{OA_0}\right)\left(a_0\cdot\overrightarrow{OA_n}+a_n\cdot\overrightarrow{OA_0}\right) & (a_0+a_n)(x_{n,2}-x_{0,2}) & \cdots & (a_0+a_n)(x_{n,n}-x_{0,n})\end{vmatrix},$$

$$F_2=\begin{vmatrix}(a_0+a_1)(x_{1,1}-x_{0,1}) & \left(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_0}\right)\left(a_0\cdot\overrightarrow{OA_1}+a_1\cdot\overrightarrow{OA_0}\right) & (a_0+a_1)(x_{1,3}-x_{0,3}) & \cdots & (a_0+a_1)(x_{1,n}-x_{0,n})\\(a_0+a_2)(x_{2,1}-x_{0,1}) & \left(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_0}\right)\left(a_0\cdot\overrightarrow{OA_2}+a_2\cdot\overrightarrow{OA_0}\right) & (a_0+a_2)(x_{2,3}-x_{0,3}) & \cdots & (a_0+a_2)(x_{2,n}-x_{0,n})\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\(a_0+a_n)(x_{n,1}-x_{0,1}) & \left(\overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{OA_0}\right)\left(a_0\cdot\overrightarrow{OA_n}+a_n\cdot\overrightarrow{OA_0}\right) & (a_0+a_n)(x_{n,3}-x_{0,3}) & \cdots & (a_0+a_n)(x_{n,n}-x_{0,n})\end{vmatrix},\ \cdots,$$

$$F_n=\begin{vmatrix}(a_0+a_1)(x_{1,1}-x_{0,1}) & \cdots & (a_0+a_1)(x_{1,n-1}-x_{0,n-1}) & \left(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_0}\right)\left(a_0\cdot\overrightarrow{OA_1}+a_1\cdot\overrightarrow{OA_0}\right)\\(a_0+a_2)(x_{2,1}-x_{0,1}) & \cdots & (a_0+a_2)(x_{2,n-1}-x_{0,n-1}) & \left(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_0}\right)\left(a_0\cdot\overrightarrow{OA_2}+a_2\cdot\overrightarrow{OA_0}\right)\\\vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\(a_0+a_n)(x_{n,1}-x_{0,1}) & \cdots & (a_0+a_n)(x_{n,n-1}-x_{0,n-1}) & \left(\overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{OA_0}\right)\left(a_0\cdot\overrightarrow{OA_n}+a_n\cdot\overrightarrow{OA_0}\right)\end{vmatrix},$$

$$F=\begin{vmatrix}1 & x_{0,1} & \cdots & x_{0,n}\\1 & x_{1,1} & \cdots & x_{1,n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\1 & x_{n,1} & \cdots & x_{n,n}\end{vmatrix}.$$

3. 热尔岗(Gergonne)点的坐标公式

对于图 1 所示的四面体 $ABCD$，设在 A、B、C、D 四点所对之面上的热尔岗点分别为 G_1、G_2、G_3、G_4。

3.1. 三角形的热尔岗(Gergonne)点

如图 2 所示，对于图 1 所示四面体 $ABCD$ 中的三角形 ABC：A、B、C 分别与三角形 ABC 的内切圆在对边上的切点 M_{BC}、M_{AC}、M_{AB} 的连线 AM_{BC}、BM_{AC}、CM_{AB} 三线相交的热尔岗点为 G_4。由前面引言可知

$$AB=a+b,\quad BC=b+c,\quad AC=a+c.$$

则 G_4 的坐标为

$$\overrightarrow{OG_4}=\frac{\frac{1}{a}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{1}{b}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{c}\cdot\overrightarrow{OC}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{bc\cdot\overrightarrow{OA}+ac\cdot\overrightarrow{OB}+ab\cdot\overrightarrow{OC}}{bc+ac+ab}.$$

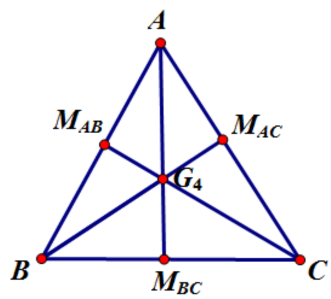

Figure 2. Gergonne points in triangle (Gergonne point)
图 2. 三角形的切心(热尔岗点)

证明：由定比分点公式，有

$$\overrightarrow{OM_{BC}}=\frac{b\cdot\overrightarrow{OC}+c\cdot\overrightarrow{OB}}{b+c},\quad \overrightarrow{OM_{AC}}=\frac{a\cdot\overrightarrow{OC}+c\cdot\overrightarrow{OA}}{a+c},\quad \overrightarrow{OM_{AB}}=\frac{a\cdot\overrightarrow{OB}+b\cdot\overrightarrow{OA}}{a+b}.$$

设

$$\frac{AG_4}{G_4M_{BC}}=\lambda_1,\quad \frac{BG_4}{G_4M_{AC}}=\lambda_2,\quad \frac{CG_4}{G_4M_{AB}}=\lambda_3,$$

则 $\overrightarrow{OG_4}$ 有以下三种表示：

$$\overrightarrow{OG_4}=\frac{\overrightarrow{OA}+\lambda_1\cdot\overrightarrow{OM_{BC}}}{1+\lambda_1}=\frac{(b+c)\cdot\overrightarrow{OA}+c\lambda_1\cdot\overrightarrow{OB}+b\lambda_1\cdot\overrightarrow{OC}}{(b+c)(1+\lambda_1)},$$

$$\overrightarrow{OG_4}=\frac{\overrightarrow{OB}+\lambda_2\cdot\overrightarrow{OM_{AC}}}{1+\lambda_2}=\frac{(a+c)\cdot\overrightarrow{OB}+a\lambda_2\cdot\overrightarrow{OC}+c\lambda_2\cdot\overrightarrow{OA}}{(a+c)(1+\lambda_2)},$$

$$\overrightarrow{OG_4}=\frac{\overrightarrow{OC}+\lambda_3\cdot\overrightarrow{OM_{AB}}}{1+\lambda_3}=\frac{(a+b)\cdot\overrightarrow{OC}+b\lambda_3\cdot\overrightarrow{OA}+a\lambda_3\cdot\overrightarrow{OB}}{(a+b)(1+\lambda_3)}.$$

对上面三式的 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 的系数分别进行比较，可得

$$\frac{1}{1+\lambda_1}=\frac{c\lambda_2}{(a+c)(1+\lambda_2)}=\frac{b\lambda_3}{(a+b)(1+\lambda_3)},\qquad ①$$

$$\frac{1}{1+\lambda_2}=\frac{a\lambda_3}{(a+b)(1+\lambda_3)}=\frac{c\lambda_1}{(b+c)(1+\lambda_1)},\qquad ②$$

$$\frac{1}{1+\lambda_3}=\frac{b\lambda_1}{(b+c)(1+\lambda_1)}=\frac{a\lambda_2}{(a+c)(1+\lambda_2)},\tag{③}$$

把上面三式相乘并整理可得

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\frac{(a+c)(a+b)(b+c)}{abc};$$

再分别把① ② ③中的任意两式相乘并整理可得

$$\lambda_1\lambda_2=\frac{(a+c)(b+c)}{c^2},\quad \lambda_1\lambda_3=\frac{(a+b)(b+c)}{b^2},\quad \lambda_2\lambda_3=\frac{(a+b)(a+c)}{a^2}.$$

解得

$$\lambda_1=\frac{a(b+c)}{bc},\quad \lambda_2=\frac{b(a+c)}{ac},\quad \lambda_3=\frac{c(a+b)}{ab}.$$

因此

$$\overrightarrow{OG_4}=\frac{\frac{1}{a}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{1}{b}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{c}\cdot\overrightarrow{OC}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{bc\cdot\overrightarrow{OA}+ac\cdot\overrightarrow{OB}+ab\cdot\overrightarrow{OC}}{bc+ac+ab}.$$

3.2. 四面体的热尔岗(Gergonne)点

对于图 1 所示的四面体 $ABCD$，由文献[5]可知，AG_1、BG_2、CG_3、DG_4 这四条直线在四面体 $ABCD$ 内交于一点，设该点为 G 即四面体 $ABCD$ 的热尔岗(Gergonne)点。

由前面引言可知

$$AB=a+b,\quad BC=b+c,\quad AC=a+c,\quad AD=a+d,\quad BD=b+d,\quad CD=c+d.$$

则 G 的坐标为

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\frac{1}{a}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{1}{b}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{c}\cdot\overrightarrow{OC}+\frac{1}{d}\cdot\overrightarrow{OD}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}=\frac{bcd\cdot\overrightarrow{OA}+acd\cdot\overrightarrow{OB}+abd\cdot\overrightarrow{OC}+abc\cdot\overrightarrow{OD}}{bcd+acd+abd+abc}.$$

证明：由于

$$\overrightarrow{OG_4}=\frac{\frac{1}{a}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{1}{b}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{c}\cdot\overrightarrow{OC}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}};$$

同理

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{\frac{1}{b}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{c}\cdot\overrightarrow{OC}+\frac{1}{d}\cdot\overrightarrow{OD}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}},$$

$$\overrightarrow{OG_2}=\frac{\frac{1}{a}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{1}{c}\cdot\overrightarrow{OC}+\frac{1}{d}\cdot\overrightarrow{OD}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}},$$

$$\overrightarrow{OG_3}=\frac{\frac{1}{a}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{1}{b}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{d}\cdot\overrightarrow{OD}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}.$$

因为点 G 为 AG_1、BG_2、CG_3、DG_4 这四条直线的交点，设

$$\frac{AG}{GG_1}=\lambda_1,\ \frac{BG}{GG_2}=\lambda_2,\ \frac{CG}{GG_3}=\lambda_3,\ \frac{DG}{GG_4}=\lambda_4.$$

则 $\overrightarrow{OG}$ 有以下四种表示：

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\lambda_1\cdot\overrightarrow{OG_1}}{1+\lambda_1}=\frac{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\cdot\overrightarrow{OA}+\lambda_1\cdot\left(\frac{1}{b}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{c}\cdot\overrightarrow{OC}+\frac{1}{d}\cdot\overrightarrow{OD}\right)}{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)(1+\lambda_1)},$$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OB}+\lambda_2\cdot\overrightarrow{OG_2}}{1+\lambda_2}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda_2\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{1}{c}\cdot\overrightarrow{OC}+\frac{1}{d}\cdot\overrightarrow{OD}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)(1+\lambda_2)},$$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OC}+\lambda_3\cdot\overrightarrow{OG_3}}{1+\lambda_3}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)\cdot\overrightarrow{OC}+\lambda_3\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{1}{b}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{d}\cdot\overrightarrow{OD}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)(1+\lambda_3)},$$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OD}+\lambda_4\cdot\overrightarrow{OG_4}}{1+\lambda_4}=\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cdot\overrightarrow{OD}+\lambda_4\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{1}{b}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{c}\cdot\overrightarrow{OC}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(1+\lambda_4)}.$$

对上面四式的 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$ 的系数分别进行比较，可得

$$\frac{1}{1+\lambda_1}=\frac{\frac{1}{a}\lambda_2}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)(1+\lambda_2)}=\frac{\frac{1}{a}\lambda_3}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)(1+\lambda_3)}=\frac{\frac{1}{a}\lambda_4}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(1+\lambda_4)},$$

$$\frac{1}{1+\lambda_2}=\frac{\frac{1}{b}\lambda_3}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)(1+\lambda_3)}=\frac{\frac{1}{b}\lambda_4}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(1+\lambda_4)}=\frac{\frac{1}{b}\lambda_1}{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)(1+\lambda_1)},$$

$$\frac{1}{1+\lambda_3}=\frac{\frac{1}{c}\lambda_4}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(1+\lambda_4)}=\frac{\frac{1}{c}\lambda_1}{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)(1+\lambda_1)}=\frac{\frac{1}{c}\lambda_2}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)(1+\lambda_2)},$$

$$\frac{1}{1+\lambda_4}=\frac{\frac{1}{d}\lambda_1}{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)(1+\lambda_1)}=\frac{\frac{1}{d}\lambda_2}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)(1+\lambda_2)}=\frac{\frac{1}{d}\lambda_3}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)(1+\lambda_3)}.$$

对上面四式联立可得

$$\frac{a}{1+\lambda_1}=\frac{b}{1+\lambda_2}=\frac{c}{1+\lambda_3}=\frac{d}{1+\lambda_4}$$
$$=\frac{\lambda_1}{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)(1+\lambda_1)}=\frac{\lambda_2}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)(1+\lambda_2)}$$
$$=\frac{\lambda_3}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right)(1+\lambda_3)}=\frac{\lambda_4}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(1+\lambda_4)}.$$

解得

$$\lambda_1=a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right),\quad \lambda_2=b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right),\quad \lambda_3=c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\right),\quad \lambda_4=d\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

因此

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\frac{1}{a}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{1}{b}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{c}\cdot\overrightarrow{OC}+\frac{1}{d}\cdot\overrightarrow{OD}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}=\frac{bcd\cdot\overrightarrow{OA}+acd\cdot\overrightarrow{OB}+abd\cdot\overrightarrow{OC}+abc\cdot\overrightarrow{OD}}{bcd+acd+abd+abc}.$$

3.3. N 维单形的热尔岗(Gergonne)点

若 n 维单形 $A_0A_1\cdots A_n$ 存在棱切超球，且各棱长满足：

$$A_iA_j=a_i+a_j,\ (0\le i\ne j\le n,\ \ a_i,a_j\in R^+).$$

设 A_0、A_1、…、A_n 各点在其所对之面上的热尔岗点分别为 G_0、G_1、…、G_n。则诸直线 A_0G_0、A_1G_1、…、A_nG_n 在 n 维单形 $A_0A_1\cdots A_n$ 内交于一点，设该点为 G 即 n 维单形 $A_0A_1\cdots A_n$ 的热尔岗点，其坐标为

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}}.$$

证明：前面已经证明了当 $n=3$ 时命题成立。假设当 $n=k$ 时命题同样成立 $(k\ge 3,k\in Z)$，现使用数学归纳法证明当 $n=k+1$ 时命题依然成立。由归纳假设可得

$$\overrightarrow{OG_i}=\frac{\sum_{j=0}^{k+1}\frac{1}{a_j}\cdot\overrightarrow{OA_j}-\frac{1}{a_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}}{\sum_{j=0}^{k+1}\frac{1}{a_j}-\frac{1}{a_i}},\quad 0\le i\le k+1.$$

若点 G 为 A_0G_0、A_1G_1、…、$A_{k+1}G_{k+1}$ 这 $k+2$ 条直线的交点，设

$$\frac{A_iG}{GG_i}=\lambda_i.$$

则

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA_i}+\lambda_i\cdot\overrightarrow{OG_i}}{1+\lambda_i}=\frac{\left(\sum_{j=0}^{k+1}\frac{1}{a_j}-\frac{1}{a_i}\right)\cdot\overrightarrow{OA_i}+\lambda_i\cdot\left(\sum_{j=0}^{k+1}\frac{1}{a_j}\cdot\overrightarrow{OA_j}-\frac{1}{a_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}\right)}{\left(\sum_{j=0}^{k+1}\frac{1}{a_j}-\frac{1}{a_i}\right)(1+\lambda_i)}.$$

对上式中的 i 分别取 0 到 $k+1$ 之间的各个整数值，并对 $\overrightarrow{OA_i}$ 的系数分别进行比较，可得

$$\frac{1}{1+\lambda_i}=\frac{\lambda_j\cdot\frac{1}{a_i}}{\left(\sum_{i=0}^{k+1}\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_j}\right)\left(1+\lambda_j\right)}，\left(0\le i\ne j\le k+1\right).$$

对上式中的 i、j 取遍各种符合条件的取值并联立可得

$$\frac{a_i}{1+\lambda_i}=\frac{\lambda_i}{\left(\sum_{j=0}^{k+1}\frac{1}{a_j}-\frac{1}{a_i}\right)\left(1+\lambda_i\right)}.$$

解得

$$\lambda_i=a_i\left(\sum_{j=0}^{k+1}\frac{1}{a_j}-\frac{1}{a_i}\right).$$

因此

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\sum_{i=0}^{k+1}\frac{1}{a_i}\cdot\overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=0}^{k+1}\frac{1}{a_i}}.$$

故 $n\ge3$ 时命题均成立。

4. 奈格尔(Nagel)点的坐标公式

由文献[6]可知，若四面体 $ABCD$ 存在内棱切球，则四面体 $ABCD$ 在各棱的临棱区均存在侧棱切球。如图 3 所示，对于同时存在内棱切球和 6 个侧棱切球的四面体 $ABCD$，其 6 个侧棱切球在各棱上的切点分别为 M'_{AB}、M'_{AC}、M'_{AD}、M'_{BC}、M'_{BD}、M'_{CD}。

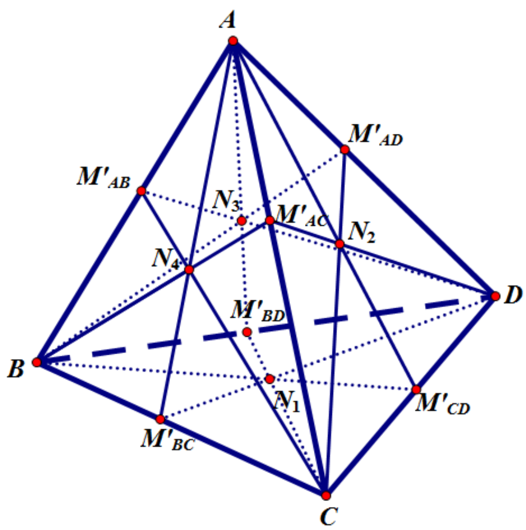

Figure 3. The tangent points of six chamfered edge-tangent's sphere on each edge of the tetrahedron
图 3. 四面体 6 个侧棱切球在各棱上的切点

4.1. 三角形的奈格尔(Nagel)点

对于图 3 所示的四面体 $ABCD$，根据侧棱切球的性质可知：直线 BM'_{CD}、CM'_{BD}、DM'_{BC} 的交点 N_1 为三角形 BCD 的奈格尔点；直线 AM'_{CD}、CM'_{AD}、DM'_{AC} 的交点 N_2 为三角形 ACD 的奈格尔点；直线 AM'_{BD}、BM'_{AD}、DM'_{AB} 的交点 N_3 为三角形 ABD 的奈格尔点；直线 AM'_{BC}、BM'_{AC}、CM'_{AB} 的交点 N_4 为三角形 ABC 的奈格尔点。根据三角形等距共轭点的性质，设

$$BM'_{AB} = CM'_{AC} = DM'_{AD} = a,\quad AM'_{AB} = CM'_{BC} = DM'_{BD} = b,$$
$$AM'_{AC} = BM'_{BC} = DM'_{CD} = c,\quad AM'_{AD} = BM'_{BD} = CM'_{CD} = d.$$

则 N_1、N_2、N_3、N_4 的坐标分别为

$$\overrightarrow{ON_1} = \frac{b\cdot\overrightarrow{OB} + c\cdot\overrightarrow{OC} + d\cdot\overrightarrow{OD}}{b+c+d},$$
$$\overrightarrow{ON_2} = \frac{a\cdot\overrightarrow{OA} + c\cdot\overrightarrow{OC} + d\cdot\overrightarrow{OD}}{a+c+d},$$
$$\overrightarrow{ON_3} = \frac{a\cdot\overrightarrow{OA} + b\cdot\overrightarrow{OB} + d\cdot\overrightarrow{OD}}{a+b+d},$$
$$\overrightarrow{ON_4} = \frac{a\cdot\overrightarrow{OA} + b\cdot\overrightarrow{OB} + c\cdot\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$$ [7].

4.2. 四面体的奈格尔(Nagel)点

对于图 3 所示的四面体 $ABCD$，AN_1、BN_2、CN_3、DN_4 这四条直线在四面体 $ABCD$ 内交于一点，设该点为 N 即四面体 $ABCD$ 的奈格尔(Nagel)点。又

$$AB = a+b,\quad BC = b+c,\quad AC = a+c,\quad AD = a+d,\quad BD = b+d,\quad CD = c+d.$$

则 N 的坐标为

$$\overrightarrow{ON} = \frac{a\cdot\overrightarrow{OA} + b\cdot\overrightarrow{OB} + c\cdot\overrightarrow{OC} + d\cdot\overrightarrow{OD}}{a+b+c+d}.$$

证明从略，可参考前面四面体热尔岗点坐标的计算方法。

4.3. N 维单形的奈格尔(Nagel)点

若 n 维单形 $A_0A_1\cdots A_n$ 存在棱切超球，且各棱长满足：

$$A_iA_j = a_i + a_j,\ (0 \le i \ne j \le n,\ \ a_i, a_j \in R^+).$$

设 A_0、A_1、$\cdots$、A_n 各点在其所对之面上的奈格尔点分别为 N_0、N_1、$\cdots$、N_n。则诸直线 A_0N_0、A_1N_1、$\cdots$、A_nN_n 在 n 维单形 $A_0A_1\cdots A_n$ 内交于一点，设该点为 N 即 n 维单形 $A_0A_1\cdots A_n$ 的热尔岗点，其坐标为

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i\cdot\overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=0}^{n} a_i}.$$

证明从略，同理可参考前面对 n 使用数学归纳法进行证明。

参考文献

[1] 贺斌. 四面体存在棱切球的一个充要条件[J]. 中学数学月刊, 1998(3): 46.

[2] 翁玉中. 关于多面体的棱切球的存在性[J]. 中学数学月刊, 1997(8): 14-16.

[3] 赵艳. 克拉姆法则证明的新方法与几何解释[J]. 数学教学研究, 2012, 31(3): 53-54.

[4] 林祖成. n 维单形的棱切超球[J]. 数学实践与认识, 1995(4): 90-93.

[5] 曾建国. 四面体的约尔刚(Gergonne)点[J]. 数学通讯, 2009, 12(2): 31-32.

[6] 曾建国. 四面体的侧棱切球与奈格尔(Nagel)点[J]. 中学数学教学, 2010(4): 58-60.

[7] 邓胜. 三角形特殊点的一般坐标公式[J]. 数学通讯, 1998(8): 24-26.