Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(2), 222-236
Published Online February 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.112031

Hans汉斯

自由半群作用的拓扑r压和拓扑压

郑伊楠，肖　倩

华南理工大学数学学院，广东 广州
Email: 13132591050@163.com, 1309200581qianqian@163.com

收稿日期：2021年1月8日；录用日期：2021年2月11日；发布日期：2021年2月19日

摘　要

本文给出了紧致度量空间上自由半群作用的拓扑r压的定义，并给出了它的一些性质。通过斜积变换为介质，我们可以得到以下两个主要结果。1) 将拓扑r压的极限推广到自由半群作用($r \to 0$)。2) 假设$f_i, i = 0,1,\cdots,m-1$是紧致度量空间上的同胚，则对于任意连续函数，我们证明了$f_0,\cdots,f_{m-1}$的拓扑压等于$f_0^{-1},\cdots,f_{m-1}^{-1}$的拓扑压。

关键词

拓扑r压，拓扑压，斜积变换，自由半群作用

Topological r-Pressure and Topological Pressure of Free Semigroup Actions

Yinan Zheng, Qian Xiao

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: 13132591050@163.com, 1309200581qianqian@163.com

Received: Jan. 8th, 2021; accepted: Feb. 11th, 2021; published: Feb. 19th, 2021

Abstract

In this paper, we introduce the definition of topological r-pressure of free semigroup actions on compact metric space and provide some properties of it. Through skew-product transformation into a medium, we can obtain the following two main results. 1) We extend the result that the topological pressure is the limit of topological r-pressure to free semigroup actions ($r \to 0$). 2) Let $f_i, i = 0,1,\cdots,m-1$, be homeomorphisms on a compact metric space. For any continuous function,

文章引用: 郑伊楠, 肖倩. 自由半群作用的拓扑 r 压和拓扑压[J]. 理论数学, 2021, 11(2): 222-236.
DOI: 10.12677/pm.2021.112031

we verify that the topological pressure of $f_0,\cdots,f_{m-1}$ equals the topological pressure of $f_0^{-1},\cdots,f_{m-1}^{-1}$.

Keywords

Topological *r*-Pressure, Topological Pressure, Skew-Product Transformations, Free Semigroup Actions

1. 引言

Adler 等人[1]引入拓扑熵来描述系统的复杂性，它同时是拓扑共轭的不变量。后来 Bowen [2]利用生成集和分离集定义了度量空间上一致连续映射的拓扑熵，并证明了对于紧致度量空间，他们与 Adler 等人定义的拓扑熵一致。拓扑压作为拓扑熵的自然推广，是动力系统的重要的概念。Ruelle [3]首先引入可扩动力系统上的可加势函数的拓扑压的概念。Walters [4] [5]随后将这一概念扩展到紧致空间上的连续变换。由于拓扑压在动力系统中有着重要的作用，一些研究者试图找到一些适用于其他系统的拓扑压的推广(见[6]-[14])。

1980 年，Feldman [15]对于 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 之间的相互作用引入了 r 熵的概念。在此基础上，引入了连续映射的拓扑 r 熵和测度 r 熵的概念。

设 (X,d) 是紧致度量空间，f 是 X 连续自映射。对于有限集合 A，我们用 $Card\,A$ 表示 A 的基数。对于 $x\in X$，$n\ge 0$，$\varepsilon>0$，$0<r<1$，$\varphi\in C(X,\mathbb{R})$，有

$$B(x,n,\varepsilon,r,f)=\left\{y\in X:\frac{1}{n}Card\left\{0\le i\le n-1:d\left(f^ix,f^iy\right)<\varepsilon\right\}>1-r\right\}$$

如果对于任意 $x\in X$，存在 $y\in F$，使得 $x\in B(y,n,\varepsilon,r,f)$，则称 F 为 X 的 (n,ε,r,f) 生成集。

用 $r_n(f,\varepsilon,r)$ 表示 X 的任何 (n,ε,r,f) 生成集的最小基数。Ren 等人在文[16]中定义

$$h_r(f,\varepsilon)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(f,\varepsilon,r),$$

和

$$h_r(f)=\lim_{\varepsilon\to 0}h_r(f,\varepsilon)$$

$h_r(f)$ 叫做 f 的拓扑 r 熵。

定理 1.1：([16], Corollary 2.5)设 (X,d) 是度量为 d 的紧致度量空间，$f:X\to X$ 是一个连续映射。则有

$$\lim_{r\to 0}h_r(f)=h(f)$$

其中 $h(f)$ 为 f 的拓扑 r 压。

Zhu 等人[17]引入了紧致度量空间上自由半群作用的拓扑 r 熵的概念，并证明了：

定理 1.2：([17], Theorem 1.1)设 $f_0,\cdots,f_{m-1}$ 是在紧致度量空间 (X,d) 上的连续自映射。则有

$$\lim_{r\to 0} h_r\left(f_0, f_1, \cdots, f_{m-1}\right) = h\left(f_0, f_1, \cdots, f_{m-1}\right),$$

其中 $h\left(f_0, f_1, \cdots, f_{m-1}\right)$ 定义为 $f_0, \cdots, f_{m-1}$ 的拓扑熵；$h_r\left(f_0, f_1, \cdots, f_{m-1}\right)$ 定义为 $f_0, \cdots, f_{m-1}$ 的拓扑 r 熵([17], **定义 3.1**)。

在文[18]中，Chen 进一步介绍了紧致度量空间中拓扑 r 压的概念，并给出了相关的性质。

对于 $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$，有

$$Q_n\left(f, \varphi, \varepsilon, r\right) = \inf\left\{\sum_{x\in F} \mathrm{e}^{(S_n\varphi)(x)} : F\text{是}X\text{的}\left(n, \varepsilon, r, f\right)\text{张成集}\right\}.$$

在文[18]中，Chen 定义了

$$P_r\left(f, \varphi\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Q_n\left(f, \varphi, \varepsilon, r\right),$$

$P_r\left(f, \varphi\right)$ 叫做 f 的拓扑 r 压。

定理 1.3：([18], Corollary 3.2.2)设 $f : X \to X$ 是在紧致度量空间 (X, d) 上的一个连续映射，且 $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$，则有

$$\lim_{r\to 0} P_r\left(f, \varphi\right) = P\left(f, \varphi\right),$$

其中 $P\left(f, \varphi\right)$ 定义为 f 的拓扑压。

在上述结果的基础上，我们引入了自由半群作用的拓扑 r 压的概念，并给出了这个概念的一些性质。本文的主要结果是以下两个定理。

定理 1.4： 设 $f_0, \cdots, f_{m-1}$ 是在紧致度量空间 (X, d) 上的连续自映射，且 $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$，则有

$$\lim_{r\to 0} P_r\left(f_0, f_1, \cdots, f_{m-1}, \varphi\right) = P\left(f_0, f_1, \cdots, f_{m-1}, \varphi\right),$$

其中 $P\left(f_0, f_1, \cdots, f_{m-1}, \varphi\right)$ 表示 $f_0, \cdots, f_{m-1}$ 的拓扑压；$P_r\left(f_0, f_1, \cdots, f_{m-1}, \varphi\right)$ 表示 $f_0, \cdots, f_{m-1}$ 的拓扑 r 压。

定理 1.5： 设 $f_0, \cdots, f_{m-1}$ 是在紧致度量空间 (X, d) 上的连续自映射，且 $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$，则有

$$P\left(f_0, \cdots, f_{m-1}, \varphi\right) = P\left(f_0^{-1}, \cdots, f_{m-1}^{-1}, \varphi\right).$$

本文概要如下。在第二章，我们作一些初步的介绍。在第三章中，我们给出了自由半群作用的拓扑 r 压的定义，并给出了它们的一些性质。在第四章中，我们给出定理 1.4 的证明。在第五章，我们给出定理 1.5 的证明。

2. 预备知识

2.1. 自由半群作用的拓扑压

设 F_m^+ 为符号 $0, 1, \cdots, m-1$ 的所有有限词的集合。对于每一个 $w \in F_m^+$，$|w|$ 表示 w 的长度，即 w 中符号的个数。若 $w, w' \in F_m^+$，则定义 ww' 为 w' 在 w 的右边写成的词。根据这个合成律 F_m^+ 是一个有 m 个生成子的自由半群。记 $w \le w'$，如果存在一个词 w'' 使 $w' = w''w$。

由符号 $0, 1, \cdots, m-1$ 构成的所有双边无穷序列的集合表示为 Σ_m，即：

$$\Sigma_m = \left\{\omega = \left(\cdots, \omega_{-1}, \overset{*}{\omega_0}, \omega_1, \cdots\right) : \omega_i = 0, 1, \cdots, m-1, \forall i \in \mathbb{Z}\right\}.$$

定义 Σ_m 上的度量，

$d'(\omega, \omega') = 1/2^k$，其中 $k = \inf\left\{|n| : \omega_n \ne \omega_{n'}\right\}$。

显然，Σ_m 关于这个度量是紧致的。Bernoulli 转移 $\sigma:\Sigma_m \to \Sigma_m$ 是同胚，由下面公式给出，

$$(\sigma\omega)_i = \omega_{i+1}.$$

假设 $\omega \in \Sigma_m, w \in F_m^+$，$a, b$ 为整数，且 $a \le b$。如果 $w = \omega_a \omega_{a+1} \cdots \omega_{b-1}\omega_b$，则记 $\omega|_{[a,b]} = w$。

设 X 为紧致度量空间，d 为 X 上的度量。$f_0,\cdots,f_{m-1}$ 是在紧致度量空间 (X,d) 上的连续映射，若 $w \in F_m^+$，$w = w_k w_{k-1} \cdots w_1$，其中对所有 $i = 1,2,\cdots,k$ 有 $w_i \in \{0,1,\cdots,m-1\}$，定义 $f_w = f_{w_k} f_{w_{k-1}} \cdots f_{w_1}$。显然，对所有 $w, w' \in F_m^+$，有 $f_{ww'} = f_w f_{w'}$。

对任意 $w \in F_m^+$，定义 X 上的度量 d_w

$$d_w(x_1,x_2) = \max_{w' \le w} d\left(f_{w'}(x_1), f_{w'}(x_2)\right), \forall x_1,x_2 \in X.$$

显然，如果 $w \le w'$，对两点任意 $x_1,x_2 \in X$ 有 $d_w(x_1,x_2) \le d_{w'}(x_1,x_2)$。

对任意 $w \in F_m^+$，$w' \le w$，$\varphi \in C(X,\mathbb{R})$，$(S_w\varphi)(x)$ 表示 $\sum_{w' \le w} \varphi(f_{w'}x)$。

设 $\varepsilon > 0$，E 是 X 的子集，若对任意的 $x, y \in E$，$x, y \in E$，由 $d_w(x,y) > \varepsilon$ 则称 E 是 X 的 $(w,\varepsilon,f_0,\cdots,f_{m-1})$ 分离集。

在文[10]中，Lin 等人定义

$$Q_w^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon) = \sup\left\{\sum_{x\in E} \mathrm{e}^{(S_w\varphi)(x)} : E\text{是}X\text{的}(w,\varepsilon,f_0,\cdots,f_{m-1})\text{分离集}\right\}$$

$$Q_n^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon) = \frac{1}{m^n}\sum_{|w|=n} Q_w^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon).$$

设 $\varepsilon > 0$，F 是 X 的子集，若对任意的 $x \in F$ 存在 $y \in F$，由 $d_w(x,y) \le \varepsilon$ 则称 F 是 X 的 $(w,\varepsilon,f_0,\cdots,f_{m-1})$ 张成集。

$$Q_w(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon) = \inf\left\{\sum_{x\in F} \mathrm{e}^{(S_w\varphi)(x)} : F\text{是}X\text{的}(w,\varepsilon,f_0,\cdots,f_{m-1})\text{张成集}\right\}$$

$$Q_n(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon) = \frac{1}{m^n}\sum_{|w|=n} Q_w(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon),$$

并利用该公式定义了自由半群作用的拓扑压

$$\begin{aligned} P(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon). \end{aligned}$$

注 2.1：当 $m = 1$，它与文[4] [5]定义的拓扑压相一致。有时，为了强调度量 d，将拓扑压记作 $P_d(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi)$。

2.2. 斜积变换

设 $f_0,\cdots,f_{m-1}$ 是在紧致度量空间 (X,d) 上的连续自映射。设映射 $F:\Sigma_m \times X \to \Sigma_m \times X$，我们把有如下形式的映射称为斜积变换，

$$F(\omega,x) = \left(\sigma\omega, f_{\omega_0}(x)\right),$$

$$g(\omega,x) = \varphi(x)$$

其中 $\omega=\left(\cdots,\omega_{-1},\overset{*}{\omega_0},\omega_1,\cdots\right)$，$\varphi\in C(X,\mathbb{R})$，$\sigma$ 表示 Bernoulli 转移。若 $\omega_0=0$，则 f_{ω_0} 表示 f_0，$\omega_0=1$，f_{ω_0} 表示 f_1，以此类推。对于 $w=i_1\cdots i_k\in F_m^+$，定义 $\overline{w}=i_k\cdots i_1$。设 $\omega=\left(\cdots,\omega_{-1},\overset{*}{\omega_0},\omega_1,\cdots\right)\in\Sigma_m$，有

$$
\begin{aligned}
F^n(\omega,x)&=\left(\sigma^n\omega,f_{\omega_{n-1}}f_{\omega_{n-2}}\cdots f_{\omega_0}(x)\right)\\
&=\left(\sigma^n\omega,f_{\overline{\omega|_{[0,n-1]}}}(x)\right)
\end{aligned}
$$

将 $P(F,g)$ 表示 $(\Sigma_m\times X,F)$ 中 F 关于 g 的拓扑压。

在文[10]中，Lin 等人证明了下面这个定理

定理 1.3：([10], Theorem 1.1)斜积变换 F 关于 g 的拓扑压，满足

$$P_D(F,g)=\log m+P_d\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi\right)$$

其中 $\Sigma_m\times X$ 上的度量 D 定义为

$$D\left((\omega,x),(\omega',x')\right)=\max\left\{d'(\omega,\omega'),d(x,x')\right\}$$

同时 Σ_m 上的度量 d' 定义为 $d'(\omega,\omega')=1/2^k$，$k=\inf\left\{|n|:\omega_n\neq\omega_n'\right\}$。

3. 自由半群作用的拓扑 r 压

在这一章中，我们介绍了自由半群作用的拓扑 r 压的定义，并给出了这个概念的一些性质。

设 $f_0,\cdots,f_{m-1}$ 是在紧致度量空间 (X,d) 上的连续自映射。对 $x\in X$，$w\in F_m^+$，$\varepsilon>0$ 以及 $0<r<1$，令

$$B\left(x,w,\varepsilon,r,f_0,\cdots,f_{m-1}\right)=\left\{y\in X:\frac{1}{|w|}Card\left\{w':d\left(f_{w'}x,f_{w'}y\right)<\varepsilon,w'\leq w\right\}>1-r\right\}.$$

若 X 的子集 F 满足，对任意 $x\in X$，存在 $y\in F$，使得 $x\in B\left(y,w,\varepsilon,r,f_0,\cdots,f_{m-1}\right)$，则称 F 是 X 的 $\left(w,\varepsilon,r,f_0,\cdots,f_{m-1}\right)$ 张成集，令

$$Q_w\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r\right)=\inf\left\{\sum_{x\in F}\mathrm{e}^{(S_w\varphi)(x)}:F\text{是}X\text{的一个}\left(w,\varepsilon,r,f_0,\cdots,f_{m-1}\right)\text{张成集}\right\}$$

$$Q_n\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r\right)=\frac{1}{m^n}\sum_{|w|=n}Q_w\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r\right).$$

注 3.1：设 $r_w\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varepsilon,r\right)$ 表示紧致度量空间 X 的 $\left(w,\varepsilon,r,f_0,\cdots,f_{m-1}\right)$ 张成集的最小基数，令

$$r_n\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varepsilon,r\right)=\frac{1}{m^n}\sum_{|w|=n}r_w\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varepsilon,r\right).$$

1) 若 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$，有 $Q_w\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon_1,r\right)\geq Q_w\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon_2,r\right)$。因此，

$$Q_n\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon_1,r\right)\geq Q_n\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon_2,r\right).$$

2) $0<Q_w\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r\right)\leq\left\|\mathrm{e}^{S_w\varphi}\right\|r_w\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varepsilon,r\right)$。因此，

$$0<Q_n\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r\right)\leq\mathrm{e}^{n\|\varphi\|}r_n\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varepsilon,r\right).$$

3) $Q_w\left(f_0,\cdots,f_{m-1},0,\varepsilon,r\right)=r_w\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varepsilon,r\right)$，因此，

$$Q_n\left(f_0,\cdots,f_{m-1},0,\varepsilon,r\right)=r_n\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varepsilon,r\right).$$

定义 3.1:对于 $0<r<1$， $\varphi\in C(X,\mathbb{R})$，自由半群作用的拓扑 r 压定义为

$$P_r(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r).$$

有时候为了强调度量 d 的，我们可以写成 $P_{r,d}(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi)$。

注 3.2: 显然 $P(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi)\ge P_r(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi)$，若 $m=1$，它与文[18]中定义的拓扑 r 压相一致，若 $\varphi=0$，它与文[17]中定义的自由半群作用的拓扑 r 熵一致。

现在我们简单介绍一下分离集。

若 X 的子集 E 满足对任意 $x,y\in X$， $x\ne y$，使得

$$\frac{1}{|w|}Card\left\{w':d(f_{w'}x,f_{w'}y)\ge\varepsilon,w'\le w\right\}>r.$$

则称 E 是 X 的 $(w,\varepsilon,r,f_0,\cdots,f_{m-1})$ 分离集。

故

$$Q_w^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r)=\sup\left\{\sum_{x\in E}\mathrm{e}^{(S_w\varphi)(x)}:E\text{是}X\text{的}(w,\varepsilon,r,f_0,\cdots,f_{m-1})\text{分离集}\right\}$$

$$Q_n^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r)=\frac{1}{m^n}\sum_{|w|=n}Q_w^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r).$$

注 3.3: 若 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$ 有 $Q_w^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon_1,r)\ge Q_w^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon_2,r)$，则

$$Q_n^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon_1,r)\ge Q_n^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon_2,r).$$

故

$$P_r^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r).$$

有时候为了强调度量 d 的，我们可以写成 $P_{r,d}^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi)$。

引理 3.1: 对任意 $n\ge 1$， $\varepsilon>0$， $0<r<1$，有

1) $Q_n(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r)\le Q_n^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r)$，

2) 令 $M=\max_{x\in X}|\varphi(x)|$，若 $\delta=\sup\left\{|\varphi(x)-\varphi(y)|:d(x,y)\le\varepsilon\right\}$，则

$$Q_n^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,2\varepsilon,2r)\le\mathrm{e}^{n\delta+2nrM}Q_n(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r).$$

证明: 1) 假设 E 是 X 一个具有最大基数的 $(w,\varepsilon,r,f_0,\cdots,f_{m-1})$ 分离集，则 E 也是 X 的一个 $(w,\varepsilon,r,f_0,\cdots,f_{m-1})$ 张成集。

假设 E 不是 X 一个 $(w,\varepsilon,r,f_0,\cdots,f_{m-1})$ 张成集，则至少存在一个点 $x\in X$，使得对所有 $y\in E$，有

$$\frac{1}{|w|}Card\left\{w':d(f_{w'}x,f_{w'}y)<\varepsilon,w'\le w\right\}<1-r,$$

即

$$\frac{1}{|w|}Card\left\{w':d(f_{w'}x,f_{w'}y)\ge\varepsilon,w'\le w\right\}>r,$$

这与最大基数的分离集相矛盾。

我们由此得到一个 $(w,\varepsilon,r,f_0,\cdots,f_{m-1})$ 分离集必然是 $(w,\varepsilon,r,f_0,\cdots,f_{m-1})$ 张成集，则有

$$Q_w\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r\right)\le Q_w^s\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r\right).$$

故

$$Q_n\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r\right)\le Q_n^s\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r\right).$$

2) 为了证明这个结果，我们先假设 E 是 X 的一个 $\left(w,2\varepsilon,2r,f_0,\cdots,f_{m-1}\right)$ 分离集，F 是 X 的一个 $\left(w,2\varepsilon,2r,f_0,\cdots,f_{m-1}\right)$ 张成集。定义映射 $\phi:E\to F$，映射 ϕ 满足任意 $x\in E$，$\phi(x)\in F$，使得 $x\in B\left(\phi(x),w,\varepsilon,r,f_0,\cdots,f_{m-1}\right)$。我们可知 $\phi(x)$ 是单射(详细可见文[17])。令 $z\in E$，使得

$$S_w\varphi\left(\phi(z)\right)-S_w\varphi(z)=\min_{x\in E}\left\{S_w\varphi\left(\phi(x)\right)-S_w\varphi(x)\right\}.$$

令 $A=\left\{w':d\left(f_{w'}z,f_{w'}\phi(z)\right)<\varepsilon,w'\le w\right\}$,有 $Card\,A>|w|(1-r)$，记 $Card\,A=|w|(1-r)\cdot k$，其中 $1<k\le\dfrac{1}{1-r}$。故

$$\begin{aligned}\sum_{y\in F}\mathrm{e}^{S_w\varphi(y)}&\ge\sum_{y\in\phi E}\mathrm{e}^{S_w\varphi(y)}=\sum_{x\in E}\mathrm{e}^{S_w\varphi(\phi(x))-S_w\varphi(x)}\mathrm{e}^{S_w\varphi(x)}\\&\ge\min_{x\in E}\left\{\mathrm{e}^{S_w\varphi(\phi(x))-S_w\varphi(x)}\right\}\sum_{x\in E}\mathrm{e}^{S_w\varphi(x)}\\&=\mathrm{e}^{S_w\varphi(\phi(z))-S_w\varphi(z)}\sum_{x\in E}\mathrm{e}^{S_w\varphi(z)}\\&\ge\mathrm{e}^{-|w|(1-r)k\delta-|w|(1-(1-r)\cdot k)\cdot 2M}\sum_{x\in E}\mathrm{e}^{S_w\varphi(x)}\\&\ge\mathrm{e}^{-|w|\delta-|w|r\cdot 2M}\sum_{x\in E}\mathrm{e}^{S_w\varphi(x)}.\end{aligned}$$

因此

$$Q_w^s\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,2\varepsilon,2r\right)\le\mathrm{e}^{|w|\delta+2|w|rM}Q_w\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r\right).$$

故

$$Q_n^s\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,2\varepsilon,2r\right)\le\mathrm{e}^{n\delta+2nrM}Q_n\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r\right).$$

定理 3.2：设 (X,d) 是紧致度量空间，$f_0,\cdots,f_{m-1}$ 是 X 到自身的连续映射，且 $\varphi\in C(X,\mathbb{R})$，有

$$P_{2r}^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\varphi\right)-2Mr\le P_r\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\varphi\right)\le P_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\varphi\right).$$

证明：显然由引理 3.1 可推得定理 3.2。

注 3.4：若 $m=1$，由定理 1.3 和定理 3.2 可得 $\lim\limits_{r\to0}P_r^s(f,\varphi)=\lim\limits_{r\to0}P_r(f,\varphi)=P(f,\varphi)$。

现在我们来研究 $P_r\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\cdot\right)$ 和 $P_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\cdot\right)$ 的相关性质。

定理 3.3：设 $f_i:X\to X,i=0,1,\cdots,m-1$ 是紧致度量空间 (X,d) 上的连续映射。若 $\varphi,\psi\in C(X,\mathbb{R})$，$\varepsilon>0$，$0<r<1$，且 $c\in\mathbb{R}$，则有下面的成立

1) $P_r\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},0\right)=h_r\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}\right)$。

2) $\varphi\le\psi$ 可得 $P_r\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\varphi\right)\le P_r\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\psi\right)$，特别地

$$h_r\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}\right)+\inf\varphi\le P_r\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\varphi\right)\le h_r\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}\right)+\sup\varphi.$$

3) $P_r\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\cdot\right)$ 要么是有限值，要么是无穷。

4) $\left|P_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon\right)-P_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\psi,\varepsilon\right)\right|\le\|\varphi-\psi\|$。因此若 $P_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\cdot\right)<\infty$，则 $\left|P_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\varphi\right)-P_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\psi\right)\right|\le\|\varphi-\psi\|$。

5) $P_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\cdot,\varepsilon\right)$ 是凸的，且若 $P_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\cdot\right)<\infty$，则 $P_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\cdot\right)$ 也是凸的。

6) $P_r\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\varphi+c\right)=P_r\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\varphi\right)+c$。

7) $P_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\varphi+\psi\right)\le P_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\varphi\right)+P_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\psi\right)+\log m$。

8) 若 $c\ge1$,有 $P_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},c\varphi\right)\le cP_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\varphi\right)+(c-1)\log m$；若 $c<1$，有 $P_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},c\varphi\right)\ge cP_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\varphi\right)+(c-1)\log m$。

9) $-2\log m-P_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},|\varphi|\right)\le P_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\varphi\right)\le P_r^s\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},|\varphi|\right)$。

证明：定理(1)~(8)的证明类似于文[10]中 Lin 等人的证明，因此我们省略证明。然后证明(9)对于 $w\in F_m^+$，设 E 是 X 的一个 $\left(w,\varepsilon,r,f_0,\cdots,f_{m-1}\right)$ 分离集，由于 $-|\varphi|\le\varphi\le|\varphi|$，故

$$\sum_{x\in E}\mathrm{e}^{\left(S_w(-|\varphi|)\right)(x)}\le\sum_{x\in E}\mathrm{e}^{\left(S_w\varphi\right)(x)}\le\sum_{x\in E}\mathrm{e}^{\left(S_w|\varphi|\right)(x)}.$$

因此

$$Q_w^s\left(f_0,\cdots,f_{m-1},-|\varphi|,\varepsilon,r\right)\le Q_w^s\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r\right)\le Q_w^s\left(f_0,\cdots,f_{m-1},|\varphi|,\varepsilon,r\right).$$

$$Q_n^s\left(f_0,\cdots,f_{m-1},-|\varphi|,\varepsilon,r\right)\le Q_n^s\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r\right)\le Q_n^s\left(f_0,\cdots,f_{m-1},|\varphi|,\varepsilon,r\right).$$

则

$$P_r^s\left(f_0,\cdots,f_{m-1},-|\varphi|\right)\le P_r^s\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi\right)\le P_r^s\left(f_0,\cdots,f_{m-1},|\varphi|\right).$$

由(8)我们可以得到

$$-P_r^s\left(f_0,\cdots,f_{m-1},|\varphi|\right)-2\log m\le P_r^s\left(f_0,\cdots,f_{m-1},-|\varphi|\right).$$

因此

$$-P_r^s\left(f_0,\cdots,f_{m-1},|\varphi|\right)-2\log m\le P_r^s\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi\right)\le P_r^s\left(f_0,\cdots,f_{m-1},|\varphi|\right).$$

现在我们来研究一下 $P_r\left(f_0,f_1,\cdots,f_{m-1},\cdot\right)$ 关于 $f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}$ 的性质。

定理 3.4：若 $\left(X_1,d_1\right)$，$\left(X_2,d_2\right)$ 都是紧致度量空间。假设 $f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}$ 是 X_1 上的连续映射，$g_0,g_1,\cdots,g_{m-1}$ 是 X_2 上的连续映射。当 $\pi:X_1\to X_2$ 是一个连续满射，对任意 $0\le i\le m-1$ 使得 $\pi\circ f_i=g_i\circ\pi$，则有

$$P_r\left(g_0,\cdots,g_{m-1},\varphi\right)\le P_r\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi\circ\pi\right),\forall\varphi\in C\left(X_2,\mathbb{R}\right).$$

若 π 是同胚的，则有

$$P_r\left(g_0,\cdots,g_{m-1},\varphi\right)=P_r\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi\circ\pi\right).$$

证明：设 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$ 使得 $d_1(x,y)<\delta$ 可得 $d_2\left(\pi(x),\pi(y)\right)<\varepsilon$。当 $w=i_1i_2\cdots i_n\in F_m^+$，$0<r<1$。若 F 是 X_1 的一个 $\left(w,\delta,r,f_0,\cdots,f_{m-1}\right)$ 张成集，则 $\pi(F)=\left\{\pi(x):x\in F\right\}$ 是 X_2 的一个 $\left(w,\varepsilon,r,g_0,\cdots,g_{m-1}\right)$ 张成集。故

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x\in F} \mathrm{e}^{\varphi\circ\pi(x)+\varphi\circ\pi(f_{i_1}(x))+\cdots+\varphi\circ\pi(f_{i_{n-1}i_{n-2}\cdots i_1}(x))} \\
&= \sum_{x\in F} \mathrm{e}^{\varphi\circ\pi(x)+\varphi\circ g_{i_1}\circ\pi(x)+\cdots+\varphi\circ g_{i_{n-1}i_{n-2}\cdots i_1}\circ\pi(x)} \\
&\ge \sum_{y\in\pi(F)} \mathrm{e}^{\varphi(y)+\varphi\circ g_{i_1}(y)+\cdots+\varphi\circ g_{i_{n-1}i_{n-2}\cdots i_1}(y)} \\
&\ge Q_w(g_0,\cdots,g_{m-1},\varphi,\varepsilon,r).
\end{aligned}
$$

因此，我们有

$$Q_w(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi\circ\pi,\delta,r)\ge Q_w(g_0,\cdots,g_{m-1},\varphi,\varepsilon,r).$$

即

$$Q_n(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi\circ\pi,\delta,r)\ge Q_n(g_0,\cdots,g_{m-1},\varphi,\varepsilon,r).$$

我们再取对数和极限($\delta\to 0$，有$\varepsilon\to 0$)，得到

$$P_r(f_0,\cdots,f_{n-1},\varphi\circ\pi)\ge P_r(g_0,\cdots,g_{n-1},\varphi).$$

若π是同胚，我们可以应用上面的f_i,g_i,π,φ替换$g_i,f_i,\pi^{-1},\varphi\circ\pi$推得

$$P_r(g_0,\cdots,g_{n-1},\varphi)\ge P_r(f_0,\cdots,f_{n-1},\varphi\circ\pi).。$$

定理 3.5： 设(X_i,d_i)是以d_i为度量的紧致度量空间，令$\mathcal{F}^{(i)}(i=1,2)$是X_i上的一组有限连续映射，其中$\mathcal{F}^{(1)}=\left\{f_0^{(1)},\cdots,f_{m-1}^{(1)}\right\}$，$\mathcal{F}^{(2)}=\left\{f_0^{(2)},\cdots,f_{k-1}^{(2)}\right\}$。

若$\varphi_i\in C(X_i,\mathbb{R})$，$\mathcal{F}^{(1)}$满足$P_{r,d_1}^s\left(\mathcal{F}^{(1)},\varphi_1\right)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n^s\left(\mathcal{F}^{(1)},\varphi_1,\varepsilon,r\right)$，或$\mathcal{F}^{(2)}$满足$P_{r,d_2}^s\left(\mathcal{F}^{(2)},\varphi_2\right)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n^s\left(\mathcal{F}^{(2)},\varphi_2,\varepsilon,r\right)$，则

$$P_{r,d}^s\left(\mathcal{F}^{(1)}\times\mathcal{F}^{(2)},\varphi_1\times\varphi_2\right)\ge P_{r,d_1}^s\left(\mathcal{F}^{(1)},\varphi_1\right)+P_{r,d_2}^s\left(\mathcal{F}^{(2)},\varphi_2\right),$$

其中$\mathcal{F}^{(1)}\times\mathcal{F}^{(2)}=\left\{f\times g: f\in\mathcal{F}^{(1)},g\in\mathcal{F}^{(2)}\right\}:=\left\{(f\times g)_0,\cdots,(f\times g)_{mk-1}\right\}$，对任意$f\times g\in\mathcal{F}^{(1)}\times\mathcal{F}^{(2)}$有$(f\times g)(x_1,x_2)=(f(x_1),g(x_2))$；$d$是乘积空间$X_1\times X_2$上的度量，其定义为$d((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\max\{d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2)\}$，其中$\varphi_1\times\varphi_2\in C(X_1\times X_2,\mathbb{R})$定义为$(\varphi_1\times\varphi_2)(x_1,x_2)=\varphi_1(x_1)+\varphi_2(x_2)$。

证明： 首先$\mathcal{F}^{(1)}\times\mathcal{F}^{(2)}$是$X_1\times X_2$上的一组有限连续映射，对任意$v=p_n\cdots p_1\in F_{mk}^+$，存在唯一的$w^{(1)}=j_n^{(1)}\cdots j_1^{(1)}\in F_m^+$和唯一的$w^{(2)}=j_n^{(2)}\cdots j_1^{(2)}\in F_k^+$使得对任意$1\le i\le n$，满足$(f\times g)_{p_i}=f_{j_i^{(1)}}^{(1)}\times f_{j_i^{(2)}}^{(2)}$。因此$(f\times g)_v=f_{w^{(1)}}^{(1)}\times f_{w^{(2)}}^{(2)}$。

另一方面，如果$w^{(1)}=j_n^{(1)}\cdots j_1^{(1)}\in F_m^+,w^{(2)}=j_n^{(2)}\cdots j_1^{(2)}\in F_k^+$，存在唯一$v=p_n\cdots p_1\in F_{mk}^+$，使得对任意$1\le i\le n$，满足$f_{j_i^{(1)}}^{(1)}\times f_{j_i^{(2)}}^{(2)}=(f\times g)_{p_i}$，因此$f_{w^{(1)}}^{(1)}\times f_{w^{(2)}}^{(2)}=(f\times g)_v$。

因此对任意$n\ge 1$，映射$h:v\mapsto\left(w^{(1)},w^{(2)}\right)$是一一对应的。

对于$\varepsilon>0$和$v\in F_{mk}^+$，存在$w^{(1)}\in F_m^+$、$w^{(2)}\in F_k^+$使得$(f\times g)_v=f_{w^{(1)}}^{(1)}\times f_{w^{(2)}}^{(2)}$。

如果E_1是X_1的$\left(w^{(1)},\varepsilon,r,\mathcal{F}^{(1)}\right)$分离集，对任意的$x_1,y_1\in E_1$，我们有

$$\frac{1}{\left|w^{(1)}\right|}Card\left\{w:d_1\left(f_w^{(1)}x_1,f_w^{(1)}y_1\right)\ge\varepsilon,w\le w^{(1)}\right\}>r.$$

令

$$A=\left\{w:d_1\left(f_w^{(1)}x_1,f_w^{(1)}y_1\right)\ge\varepsilon,w\le w^{(1)}\right\},$$

则 $Card\,A>\left|w^{(1)}\right|r$ 。

类似地，如果 E_2 是 X_1 的 $\left(w^{(2)},\varepsilon,r,\mathcal{F}^{(2)}\right)$ 分离集，对任意的 $x_2,y_2\in E_2$ ，我们有

$$\frac{1}{\left|w^{(2)}\right|}Card\left\{w:d_1\left(f_w^{(2)}x_1,f_w^{(2)}y_1\right)\ge\varepsilon,w\le w^{(2)}\right\}>r.$$

令

$$B=\left\{w:d_2\left(f_w^{(2)}x_1,f_w^{(2)}y_1\right)\ge\varepsilon,w\le w^{(2)}\right\},$$

则 $Card\,B>\left|w^{(2)}\right|r$ 。

因此对任意 $v'=p_k\cdots p_1\le h^{-1}\left(w^{(1)},w^{(2)}\right)$ ， $1\le k\le n$ ，我们有

$$\begin{aligned}&d\left((f\times g)_{v'}(x_1,x_2),(f\times g)_{v'}(y_1,y_2)\right)\\&=d\left(\left(f^{(1)}_{j_k^{(1)}\cdots j_1^{(1)}}(x_1),f^{(2)}_{j_k^{(2)}\cdots j_1^{(2)}}(x_2)\right),\left(f^{(1)}_{j_k^{(1)}\cdots j_1^{(1)}}(y_1),f^{(2)}_{j_k^{(2)}\cdots j_1^{(2)}}(y_2)\right)\right)\\&=\max\left\{d_1\left(f^{(1)}_{j_k^{(1)}\cdots j_1^{(1)}}(x_1),f^{(1)}_{j_k^{(1)}\cdots j_1^{(1)}}(y_1)\right),d_2\left(f^{(2)}_{j_k^{(2)}\cdots j_1^{(2)}}(x_2),f^{(2)}_{j_k^{(2)}\cdots j_1^{(2)}}(y_2)\right)\right\}.\end{aligned}$$

令 $C=\left\{v':d\left((f\times g)_{v'}(x_1,x_2),(f\times g)_{v'}(y_1,y_2)\right)\ge\varepsilon,v'\le v\right\}$ ，其中 $v=h^{-1}\left(w^{(1)},w^{(2)}\right)$ ，则

$$Card\,C\ge Card\,A>\left|w^{(1)}\right|r$$

和

$$Card\,C\ge Card\,B>\left|w^{(2)}\right|r.$$

由于 $\left|w^{(1)}\right|=\left|w^{(2)}\right|=|v|$ ，则

$$\frac{1}{|v|}Card\left\{v':d\left((f\times g)_{v'}(x_1,x_2),(f\times g)_{v'}(y_1,y_2)\right)\ge\varepsilon,v'\le v\right\}>r.$$

因此， $E_1\times E_2$ 是 $X_1\times X_2$ 的一个 $\left(v,\varepsilon,r,\mathcal{F}^{(1)}\times\mathcal{F}^{(2)}\right)$ 分离集。由于

$$\begin{aligned}&\sum_{(x_1,x_2)\in E_1\times E_2}\exp\left(\sum_{v'\le v}(\varphi_1\times\varphi_2)(f\times g)_{v'}(x_1,x_2)\right)\\&=\left(\sum_{x_1\in E_1}\exp\left(\sum_{w'\le w^{(1)}}\varphi_1(f)_{w_1'}(x_1)\right)\right)\left(\sum_{x_2\in E_2}\left(\sum_{w'\le w^{(2)}}\varphi_2(g)_{w_2'}(x_2)\right)\right),\end{aligned}$$

我们得到

$$Q_v^s\left(\mathcal{F}^{(1)}\times\mathcal{F}^{(2)},\varphi_1\times\varphi_2,\varepsilon,r\right)\ge Q_{w^{(1)}}^s\left(\mathcal{F}^{(1)},\varphi_1,\varepsilon,r\right)\cdot Q_{w^{(2)}}^s\left(\mathcal{F}^{(2)},\varphi_2,\varepsilon,r\right).$$

则有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(mk)^n}\sum_{|w|=n}Q_w^s\left(F^{(1)}\times F^{(2)},\varphi_1\times\varphi_2,\varepsilon,r\right)\\&\geq\frac{1}{(mk)^n}\sum_{|w^{(1)}|=n,|x^{(2)}|=n}Q_{w^{(1)}}^s\left(F^{(1)},\varphi_1,\varepsilon,r\right)\cdot Q_{w^{(2)}}^s\left(F^{(2)},\varphi_2,\varepsilon,r\right)\\&=\frac{1}{m^n}\sum_{|w^{(1)}|=n}Q_{w^{(1)}}^s\left(F^{(1)},\varphi_1,\varepsilon,r\right)\cdot\frac{1}{k^n}\sum_{|w^{(2)}|=n}Q_{w^{(2)}}^s\left(F^{(2)},\varphi_2,\varepsilon,r\right).\end{aligned}$$

因此

$$Q_n^s\left(\mathcal{F}^{(1)}\times\mathcal{F}^{(2)},\varphi_1\times\varphi_2,\varepsilon,r\right)\geq Q_n^s\left(\mathcal{F}^{(1)},\varphi_1,\varepsilon,r\right)\cdot Q_n^s\left(\mathcal{F}^{(2)},\varphi_2,\varepsilon,r\right).$$

故

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n^s\left(\mathcal{F}^{(1)}\times\mathcal{F}^{(2)},\varphi_1\times\varphi_2,\varepsilon,r\right)\\&\geq\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n^s\left(\mathcal{F}^{(1)},\varphi_1,\varepsilon,r\right)+\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n^s\left(\mathcal{F}^{(2)},\varphi_2,\varepsilon,r\right).\end{aligned}$$

因为 $P_{r,d_1}^s\left(\mathcal{F}^{(1)},\varphi_1\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n^s\left(\mathcal{F}^{(1)},\varphi_1,\varepsilon,r\right)$，令 $\varepsilon\to 0$，可以得到

$$P_{r,d}^s\left(\mathcal{F}^{(1)}\times\mathcal{F}^{(2)},\varphi_1\times\varphi_2\right)\geq P_{r,d_1}^s\left(\mathcal{F}^{(1)},\varphi_1\right)+P_{r,d_2}^s\left(\mathcal{F}^{(2)},\varphi_2\right).$$

类似的方法可以证明 $P_{r,d_2}^s\left(\mathcal{F}^{(2)},\varphi_2\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log Q_n^s\left(\mathcal{F}^{(2)},\varphi_2,\varepsilon,r\right)$ 的情况。

到目前为止我们还不能证明其另一不等式，即

$$P_{r,d}^s\left(\mathcal{F}^{(1)}\times\mathcal{F}^{(2)},\varphi_1\times\varphi_2\right)\leq P_{r,d_1}^s\left(\mathcal{F}^{(1)},\varphi_1\right)+P_{r,d_2}^s\left(\mathcal{F}^{(2)},\varphi_2\right)。$$

4. 定理 1.4 的证明

在这一章中，我们给出定理 1.4 的证明。该定理将自由半群作用的拓扑 r 压与拓扑压联系起来。

在证明定理 1.4 之前，我们利用类似于 Bufetov [19]和 Lin 等人[10]的方法，得到了以下引理。

引理 4.1：对任意 $n\geq 1$，$\varepsilon>0$，$\varphi\in C(X,\mathbb{R})$，且 $g(\omega,x)=\varphi(x)$，我们有

$$Q_n(F,g,\varepsilon,r)\leq K(\varepsilon,r)m^nQ_n\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r\right)$$

其中 F 是斜积变换，$K(\varepsilon,r)$ 是一个取决于 ε 和 r 的正常数。

证明：令 $C(\varepsilon)$ 是一个正整数且满足 $2^{-C(\varepsilon)}<\frac{\varepsilon}{100}$ 和 $N=m^{n+2C(\varepsilon)}$，则 F_m^+ 中有 N 个长度为 $n+2C(\varepsilon)$ 的不同的词。记为 $w_1,\cdots,w_N$。对每个 $1\leq i\leq N$，选取 $\omega(i)\in\Sigma_m$，使得 $\omega(i)|_{[-C(\varepsilon),n+C(\varepsilon)-1]}=w_i$。显然对于 $0\leq\varepsilon\leq 1/2$，$\{\omega(i),i=1,\cdots,N\}$ 是 Σ_m 的一个 $(n,\varepsilon,r,\sigma_m)$ 张成集。定义 $w_i'=\omega(i)|_{[0,n-1]}$，令 B_i 表示度量空间 X 的 $(\overline{w}_i',\varepsilon,r,f_0,\cdots,f_{m-1})$ 张成集的最大基数，$i=1,2,\cdots,N$。假设点 $x_i',\cdots,x_{B_i}'$ 构成 X 的 $(\overline{w}_i',\varepsilon,r,f_0,\cdots,f_{m-1})$ 张成集，故这些点

$$\left(\omega(i),x_j^i\right)\in\Sigma_m\times X,\quad i=1,\cdots,N,j=1,\cdots,B_i,$$

构成 $\Sigma_m\times X$ 的 (n,ε,r,F) 张成集，因此，有

$$
\begin{aligned}
Q_n(F,g,\varepsilon,r) &\le \sum_{(\omega,x)\in\left\{\left(\omega(i),x_j^i\right):i=1,\cdots,N,\,j=1,\cdots,B_i\right\}} \mathrm{e}^{S_n g(\omega,x)} \\
&\le K(\varepsilon,r) \sum_{\left|\overline{w}_i'\right|=n,\,x\in\left\{x_j',\,j=1,\cdots,B_i\right\}} \mathrm{e}^{S_{\overline{w}_i}\varphi(x)},
\end{aligned}
$$

其中 $K(\varepsilon,r)$ 是一个取决于 ε 和 r 的正常数。因此

$$Q_n(F,g,\varepsilon,r) \le K(\varepsilon,r) m^n Q_n(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r).$$

定理 1.4 的证明： 对于 $0<r<1$，$\varphi\in C(X,\mathbb{R})$，由注 3.2，有

$$P_{r,d}(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi) \le P_d(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi),$$

则

$$\limsup_{r\to 0} P_{r,d}(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi) \le P_d(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi).$$

从引理 4.1 我们可以得到

$$Q_n(F,g,\varepsilon,r) \le K(\varepsilon,r) m^n Q_n(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi,\varepsilon,r),$$

因此

$$P_{r,D}(F,g) \le \log m + P_{r,d}(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi).$$

从定理 1.3 和定理 2.1，可得

$$
\begin{aligned}
\liminf_{r\to 0} P_{r,d}(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi) &\ge \liminf_{r\to 0} P_{r,D}(F,g) - \log m \\
&= P_D(F,g) - \log m \\
&= P_d(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi).
\end{aligned}
$$

因此

$$\limsup_{r\to 0} P_{r,d}(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi) \le P_d(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi) \le \liminf_{r\to 0} P_{r,d}(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi).$$

故

$$P_d(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi) = \lim_{r\to 0} P_{r,d}(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi).$$

推论 4.2： 令 (X,d) 是紧致度量空间，$f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}$ 是 X 上到自身的连续映射，则

$$\lim_{r\to 0} P_r^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi) = P(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi).$$

证明： 从定理 3.2，我们可以得到

$$P_{2r}^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi) - 2Mr \le P_r(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi) \le P_r^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi),$$

则

$$\limsup_{r\to 0} P_{2r}^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi) \le \limsup_{r\to 0} P_r(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi),$$

$$\liminf_{r\to 0} P_r(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi) \le \liminf_{r\to 0} P_r^s(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi)$$

由定理 1.4 可得

$$\lim_{r\to 0} P_r(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi) = P(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi),$$

则

$$\limsup_{r\to 0} P_{2r}^{s}\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi\right) \le P\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi\right) \le \liminf_{r\to 0} P_{r}^{s}\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi\right).$$

这就证实了极限的存在，所以

$$\lim_{r\to 0} P_{r}^{s}\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi\right) = P\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi\right).$$

5. 定理 1.5 的证明

在证明定理 1.5 之前，我们应该做了些工作。

令 (X,d) 是紧致度量空间，假设一个有 m 个生成子的自由半群作用于 X 和生成子 $f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}$ 都是 X 上的同胚。我们容易看到斜积变换 $F:\Sigma_m\times X\to\Sigma_m\times X$ 也是同胚。

我们可以看到斜积逆变换 $F^{-1}:\Sigma_m\times X\to\Sigma_m\times X$，$g:\Sigma_m\times X\to\mathbb{R}$ 满足

$$F^{-1}(\omega,x) = \left(\sigma^{-1}\omega, f_{\omega_{-1}}^{-1}(x)\right),$$

$$g(\omega,x) = \varphi(x),$$

其中 $\varphi\in C(X,\mathbb{R})$，$\omega = \left(\cdots,\omega_{-1},\overset{*}{\omega_0},\omega_1,\cdots\right)\in\Sigma_m$，若 $\omega_{-1}=0$，$f_{\omega_{-1}}$ 表示 f_0；$\omega_{-1}=1$，$f_{\omega_{-1}}$ 表示 f_1，以此类推。既有，

$$F^{-n}(\omega,x) = \left(\sigma^{-n}\omega, f_{\omega_{-n}}^{-1} f_{\omega_{-n+1}}^{-1}\cdots f_{\omega_{-1}}^{-1}(x)\right) = \left(\sigma^{-n}\omega, f_{\overline{\omega|_{[-n,-1]}}}^{-1}(x)\right)$$

为了证明定理 1.5，我们给出了 $P\left(F^{-1},g\right)$ 的下列性质。

定理 5.1：斜积逆变换的拓扑压 F^{-1} 满足

$$P_D\left(F^{-1},g\right) = \log m + P_d\left(f_0^{-1},\cdots,f_{m-1}^{-1},\varphi\right),$$

其中 $\Sigma_m\times X$ 上的度量 D 定义为

$$D\left((\omega,x),(\omega',x')\right) = \max\left\{d'(\omega,\omega'), d(x,x')\right\}$$

Σ_m 上的度量 d' 满足 $d'(\omega,\omega') = 1/2^k$，$k = \inf\left\{|n| : \omega_n \ne \omega_n'\right\}$。

下面两个引理的证明与 Lin 等人的[10]的证明类似，因此我们省略了证明。

引理 5.2：对任意 $n\ge 1$，$0\le\varepsilon\le\dfrac{1}{2}$，则

$$Q_n^s\left(F^{-1},g,\varepsilon\right) \ge m^n Q_n^s\left(f_0^{-1},\cdots,f_{m-1}^{-1},\varphi,\varepsilon\right).$$

引理 5.3：对任意 $n\ge 1$，$\varepsilon>0$，则

$$Q_n\left(F^{-1},g,\varepsilon\right) \le K(\varepsilon) m^n Q_n\left(f_0^{-1},\cdots,f_{m-1}^{-1},\varphi,\varepsilon\right),$$

其中 $K(\varepsilon)$ 是取决于 ε 的正常数。

定理 5.1 的证明：从引理 5.2，我们得到

$$P_D\left(F^{-1},g\right) \ge \log m + P_d\left(f_0^{-1},\cdots,f_{m-1}^{-1},\varphi\right).$$

从引理 5.3，我们可以得到

$$P_D\left(F^{-1},g\right) \le \log m + P_d\left(f_0^{-1},\cdots,f_{m-1}^{-1},\varphi\right),$$

证明完成。

现在我们来证明定理 1.5。

定理 1.5 的证明。因为 F 是同胚，我们有

$$P_D\left(F^{-1},g\right)=P_D\left(F,g\right).$$

从定理 5.1 和定理 2.1，我们可以得到

$$P_D\left(F^{-1},g\right)=\log m+P_d\left(f_0^{-1},\cdots,f_{m-1}^{-1},\varphi\right),$$
$$P_D\left(F,g\right)=\log m+P_d\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi\right).$$

因此

$$P_d\left(f_0,\cdots,f_{m-1},\varphi\right)=P_d\left(f_0^{-1},\cdots,f_{m-1}^{-1},\varphi\right).$$

注 5.1：在文[11]中，作者给出了一个例子来说明文章[11]意义下的拓扑压不具有类似定理 1.5 的性质。

基金项目

国家自然科学基金资助的课题(批准号：11771149, 11671149)；广东省自然科学基金项目 2018B0303110005。

参考文献

[1] Barreira, L. (1996) A Non-Additive Thermodynamic Formalism and Application to Dimension Theory of Hyperbolic Dynamical Systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **16**, 871-927. https://doi.org/10.1017/S0143385700010117

[2] Bowen, R. (1971) Entropy for Group Endomorphisms and Homogeneous Spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, **153**, 401-404. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1971-0274707-X

[3] Ruelle, D. (1978) Thermodynamic Formalism. Addison-Wesley, Reading.

[4] Walters, P. (1975) A Variational Principle for the Pressure of Continuous Transformations. *American Journal of Mathematics*, **97**, 937-971. https://doi.org/10.2307/2373682

[5] Waters, P. (1982) An Introduction to Ergodic Theory. Springer-Verlag, New York.

[6] Adler, R., Konheim, A. and McAndrew, M. (1965) Topological Entropy. *Transactions of the American Mathematical Society*, **114**, 309-319. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1965-0175106-9

[7] Cao, Y., Hu, H. and Zhao, Y. (2013) Nonadditive Measure-Theoretic Pressure and Applications to Dimensions of an Ergodic Measure. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **33**, 831-850. https://doi.org/10.1017/S0143385712000090

[8] Chung, N. (2013) Topological Pressure and the Variational Principle for Actions of Sofic Groups. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **33**, 1363-1390. https://doi.org/10.1017/S0143385712000429

[9] Huang, W. and Yi, Y. (2007) A Local Variational Principle of Pressure and Its Applications to Equilbrium States. *Israel Journal of Mathematics*, **161**, 29-74. https://doi.org/10.1007/s11856-007-0071-1

[10] Lin, X., Ma, D. and Wang, Y. (2018) On the Measure-Theoretic Entropy and Topological Pressure of Free Semigroup Actions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **38**, 686-716. https://doi.org/10.1017/etds.2016.41

[11] Ma, D. and Liu, S. (2014) Some Properties of Topological Pressure of a Semigroup of Continuous Maps. *Dynamical Systems*, **29**, 1-17. https://doi.org/10.1080/14689367.2013.835387

[12] Ma, D. and Wu, M. (2011) Topological Pressure and Topological Entropy of a Semigroup of Maps. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, **31**, 545-556. https://doi.org/10.3934/dcds.2011.31.545

[13] Thompson, D. (2011) A Thermodynamic Definition of Topological Pressure for Non-Compact Sets. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **31**, 527-547. https://doi.org/10.1017/S0143385709001151

[14] Zhang, G. (2009) Variational Principles of Pressure. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, **24**, 1409-1435. https://doi.org/10.3934/dcds.2009.24.1409

[15] Feldman, J. (1980) *r*-Entropy, Equipartition, and Ornstein's Isonorphism Theorem inR^n. *Israel Journal of Mathematics*, **36**, 321-345. https://doi.org/10.1007/BF02762054

[16] Ren, Y., He, L., Lv, J. and Zheng, G. (2011) Topological *r*-Entropy and Measure-Theoretic *r*-Entropy of a Continuous

map. *Science China Mathematics*, **54**, 1197-1205. https://doi.org/10.1007/s11425-011-4181-1

[17] Zhu, L. and Ma, D. (2019) Topological *R*-Entropy and Topological Entropy of Free Semigroup Actions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **470**, 1056-1069. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.10.048

[18] 陈亚明. 连续自映射的测度 r 压与拓扑 r 压[D]: [硕士学位论文]. 南京: 南京师范大学, 2013.

[19] Bufetov, A. (1999) Topological Entropy of Free Semigroup Actions and Skew-Product Transformations. *Journal of Dynamical and Control Systems*, **5**, 137-143. https://doi.org/10.1023/A:1021796818247