Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(5), 832-840
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.115096

长区间上欧拉函数相关的均值问题

张美玲

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛
Email: skm15736959675@163.com

收稿日期：2021年4月12日；录用日期：2021年5月14日；发布日期：2021年5月21日

摘 要

设 $\varphi(n)$ 为欧拉函数，本文将应用Selberg-Delange方法研究 $\varphi(n)$ 及 $g(n)=\frac{\varphi(n)}{n}$ 的均值问题并得到了一个较好的主项。

关键词

欧拉函数，均值问题，Selberg-Delange方法

The Average of the Functions Associated Euler Function in Long Intervals

Meiling Zhang

College of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: skm15736959675@163.com

Received: Apr. 12th, 2021; accepted: May 14th, 2021; published: May 21st, 2021

Abstract

Let $\varphi(n)$ be the Euler function. In this paper, we use Selberg-Delange method to study the average behavior of $\varphi(n)$ and $g(n)=\frac{\varphi(n)}{n}$ and get a better main term.

Keywords

Euler Function, Average Estimation, Selberg-Delange Method

文章引用: 张美玲. 长区间上欧拉函数相关的均值问题[J]. 理论数学, 2021, 11(5): 832-840.
DOI: 10.12677/pm.2021.115096

1. 引言和主要结果

若自然数 $n \ge 1$，欧拉函数 $\varphi(n)$ 表示不超过 n 且和 n 互素的正整数的个数。众所周知

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n,$$

由 Möbius 变换有

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d},$$

由此 $\varphi(n)$ 也可以表示为遍历 n 的不同素因子的乘积的形式，即

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

我们记

$$\sum_{n \le x} \varphi(n) = M(x) + R(x).$$

Dirichlet 证明了对于任意的 $\varepsilon > 0$，

$$M(x) = \frac{x^2}{2\zeta(2)}, R(x) = O\left(x^{1+\varepsilon}\right).$$

1874 年，F. Mertens [1]进一步得出以下结论：

$$R(x) = O(x \log x).$$

我们在很多数论相关的书里可见到该结论的证明(例[2]，定理 330)。1963 年，Walfisz [3]改进了余项：

$$R(x) = O\left(x \log^{\frac{2}{3}} x (\log\log x)^{\frac{4}{3}}\right).$$

若令 $g(n) = \dfrac{\varphi(n)}{n}$，可以得到：

$$\sum_{n \le x} g(n) = J(x) + E(x),$$

其中 $J(x) = \dfrac{x}{\zeta(2)}$，$E(x) \ll \log x$。1987 年，Montgomery [4]明确给出了 $R(x)$ 和 $E(x)$ 的关系，即

$$R_0(x) = \frac{R(x)}{x} + O\left(\exp\left(-c\sqrt{\log x}\right)\right),$$

其中 $c > 0$ 是绝对常数。这改进了 Pillai 和 Chowla [5]以及 Erdös 和 Shapiro [6]先前的结果。

本文利用 Selberg-Delange 方法研究 $g(n)$ 和 $\varphi(n)$ 在长区间上的均值问题，并得到了较好的主项，结果如下：

定理 1 $\mathcal{D}(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s}$ 和 $\mathcal{F}(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s}$ 是 $\mathcal{P}(z;c_0,\delta,M)$ 型 Dirichlet 级数($\mathcal{P}$ 型级数的定义参见第二部分)。对 $x\ge 3$，$N\ge 0$，$A>0$，$|z|\le A$ 有

$$\sum_{n\le x}g(n)=x\left\{\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda_k(z)}{(\log x)^k}+O\left(M\left(\frac{c_6N+1}{\log x}\right)^{N+1}\right)\right\} \tag{1}$$

$$\sum_{n\le x}\varphi(n)=x^2\left\{\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda_k(z)}{(\log x)^k}+O\left(M\left(\frac{c_7N+1}{\log x}\right)^{N+1}\right)\right\} \tag{2}$$

其中正常数 c_6，c_7 以及 O 符号中的隐含常数至多依赖于 c，δ 和 A。

基于对式(1), (2)主项的观察可以发现，本文结果的主项较 $J(x)$ 和 $M(x)$ 更为精细，它是关于 $1/\log x$ 的 N 次多项式，而 N 可取任意自然数。

2. 预备知识

符号说明： $A\ge 0$，$M>0$，$c>0$，$0<\delta\le 1$ 是一些常数，ε 是任意小的正常数，$s=\sigma+i\tau$，σ,τ 为实数，$\varphi(n)$ 为欧拉函数，$\Gamma(s)$ 为伽马函数，$\zeta(s)$ 是 Riemann Zeta 函数。

由 de la Vallée-Poussin [7]，存在正常数 c，使得 $\zeta(s)$ 的非零区域 $\mathcal{K}'$ 为

$$\sigma\ge 1-c/\left(1+\log^+|\tau|\right),$$

其中 $\log^+|\tau|=\max\{0,\log\tau\}$，我们用 $\mathcal{K}$ 表示区域 $\mathcal{K}'$ 除去实线段 $[1-c,1]$ 后得到的单连通区域。

定义 1 设 $z\in\mathbb{C}$，$c>0$，$0<\delta\le 1$，$M>1$，$f(n)$ 是一个数论函数，其对应的 Dirichlet 级数为

$$\mathcal{F}(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}.$$

若 Dirichlet 级数

$$G(s,z):=\mathcal{F}(s)\zeta(s)^{-z}$$

在 $\mathcal{K}'$ 上可延拓为全纯函数且在其上满足上界估计

$$|G(s,z)|\le M\left(1+|\tau|\right)^{1-\delta},$$

则称级数 $\mathcal{F}(s)$ 具有性质 $\mathcal{P}(z;c,\delta,M)$。

在 $G(s;z)$ 的全纯区域中，其 k 阶偏导为

$$G^{(k)}(s;z)=\frac{\partial^k}{\partial s^k}G(s;z),$$

及

$$\lambda_k(z):=\frac{1}{\Gamma(z-k)}\sum_{h+j=k}\frac{1}{h!l!}G^{(h)}(1;z)\gamma_j(z).$$

考虑到 $\varphi(n)$ 和 $g(n)$ 对应的 Dirichlet 级数与 $\zeta(s)$ 的关系，$s=1$ 是 $\zeta(s)$ 的一阶极点，定义函数

$$Z(s;z):=\frac{\{(s-1)\zeta(s)\}^z}{s},$$

我们有

引理 1 函数 $Z(s;z)$ 在圆盘 $|s-1|<1$ 上全纯，具有 Taylor 展式

$$Z(s;z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\gamma_j(z)(s-1)^j \tag{3}$$

其中 $\gamma_j(z)$ 是 z 的整函数，对任意的 $A>0$，$\varepsilon>0$ 满足上界估计

$$\frac{1}{j!}\gamma_j(z)\ll_{A,\varepsilon}(1+\varepsilon)^j \qquad (|z|\le A). \tag{4}$$

证明：参见[8]中定理 II.5.1。

引理 2 存在正常数 c，使得对 $|\tau|>3$ 及 $\sigma\ge 1-c/\log|\tau|$ 有

$$|\log\zeta(s)|\le\log\log|\tau|+O(1).$$

证明：参见[8]中定理 II.3.16。

引理 3 设 $\mathcal{H}$ 为 Hankel 围道，对每个 $X>1$，令 $\mathcal{H}(X)$ 为 Hankel 围道在半平面 $\sigma>-X$ 的部分，那么对 $z\in\mathbb{C}$ 一致地有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{H}(X)}s^{-z}e^s\mathrm{d}s=\frac{1}{\Gamma(z)}+O\left(47^{|z|}\Gamma(1+|z|)\mathrm{e}^{-\frac{X}{2}}\right).$$

证明：参见[8]中推论 II.5.2.1。

3. 定理的证明

由欧拉函数 $\varphi(n)$ 是乘性函数(见[9])，有

$$\mathcal{F}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\left(1+\frac{1}{p^{s-1}}+\frac{1}{p^{2(s-1)}}+\cdots\right)$$
$$=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \qquad (\sigma>2).$$

同理可得

$$\mathcal{D}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+1)} \qquad (\sigma>1).$$

我们先证明定理中的式(1)。

$\mathcal{D}(s)=\zeta(s)G(s;z)$ 在区域 $\mathcal{K}$ 内全纯，且 $G(s;z)=\dfrac{1}{\zeta(s+1)}$，由于

$$\frac{\sigma-1}{\sigma}\le|\zeta(s)|\le\frac{\sigma}{\sigma-1} \quad (\sigma>1),$$

我们有

$$|G(s;z)|=\left|\frac{1}{\zeta(s+1)}\right|\le\frac{\sigma+1}{\sigma}\le M(1+|\tau|)^{1-\delta} \qquad (s\in\mathcal{K}). \tag{5}$$

从而级数 $\mathcal{D}(s)$ 具有性质 $\mathcal{P}(z;c,\delta,M)$。

在 $s \in \mathcal{K}$ 上有解析延拓

$$\zeta(s)^z = sZ(s,z)(s-1)^{-z}.$$

取 $z=1$，我们有

$$\zeta(s) = sZ(s;1)(s-1)^{-1}.$$

另外由引理 2 的上界估计可得，对任意常数 $A>0$，有

$$\zeta(s) \ll_A \left(1+\log^+|\tau|\right)^A \qquad \left(|z|\le A, s\in\mathcal{K}, |s-1|\gg 1\right), \tag{6}$$

由(5)和(6)知对 $|z|\le A$，$s\in\mathcal{K}$，$|s-1|\gg 1$ 一致地有

$$\mathcal{D}(s) \ll M\left(1+\log^+|\tau|\right)^A\left(1+|\tau|\right)^{1-\delta} \ll_{A,\delta} M\left(1+|\tau|\right)^{1-\frac{\delta}{2}}. \tag{7}$$

令 $A(x) := \sum_{n\le x} g(n)$，由 Perron 公式有

$$\int_0^x A(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} \mathcal{D}(s)x^{s+1}\frac{\mathrm{d}s}{s(s+1)},$$

其中 $\kappa = 1+\frac{1}{\log x}$。取 $T>1$ 为待定参数，令 Γ 是包括以下三部分的 Hankel 围道：

1) 以 $s=1$ 为圆心，$r = 1/(2\log x)$ 为半径，并且除去点 $s=1-r$ 的圆，
2) 由 $1-\frac{c}{2}$ 到 $1-r$ 的线段，幅角 $\theta=-\pi$，
3) 由 $1-r$ 到 $1-\frac{c}{2}$ 的线段，幅角 $\theta=\pi$。

$\sigma(\tau)$ 是 $0\le\tau\le T$ 及 $-T\le\tau\le 0$ 上的曲线 $\sigma(\tau) := 1-\frac{1}{2}c/\left(1+\log^+|\tau|\right)$。由留数定理，可将积分线段 $[\kappa-iT, \kappa+iT]$ 转化成

$$\Gamma\cup\sigma(\tau)\cup\left[\sigma(T)\pm iT, \kappa\pm iT\right].$$

我们利用(7)可算得 $[\kappa\pm iT, \kappa\pm i\infty]$ 及 $[\sigma(\tau)\pm iT, \kappa\pm iT]$ 上的贡献 $\ll_{A,\delta} Mx^2T^{-\frac{\delta}{2}}$。事实上，

$$\begin{aligned} I_1 &:= \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa+iT}^{\kappa+i\infty} \mathcal{D}(s)x^{s+1}\frac{\mathrm{d}s}{s(s+1)} \\ &\ll_{A,\delta} \int_T^\infty M\left(1+|\tau|\right)^{1-\frac{\delta}{2}} x^{1+\kappa}\frac{\mathrm{d}\tau}{|\kappa+i\tau||\kappa+1+i\tau|} \\ &\ll_{A,\delta} Mx^2T^{-\frac{\delta}{2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &:= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma(T)+iT}^{\kappa+iT} \mathcal{D}(s)x^{s+1}\frac{\mathrm{d}s}{s(s+1)} \\ &\ll_{A,\delta} \int_{\sigma(T)}^{\kappa} M\left(1+|\tau|\right)^{1-\frac{\delta}{2}} x^{\sigma+1}\frac{\mathrm{d}\sigma}{|\sigma+iT||\sigma+1+iT|} \\ &\ll_{A,\delta} MT^{-1-\frac{\delta}{2}}x^2. \end{aligned}$$

下面计算曲线 $\sigma=\sigma(\tau)$ 的贡献，

$$\begin{aligned}I_3 &:= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma(\tau)+i\tau}\mathcal{D}(s)x^{s+1}\frac{\mathrm{d}s}{s(s+1)}\\ &\ll_{A,\delta} M\int_{\sigma(\tau)+i\tau}(1+|\tau|)^{1-\frac{\delta}{2}}x^{\sigma(T)+1}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2}\\ &\ll_{A,\delta} Mx^{\sigma(T)+1}\int_0^T\tau^{1-\frac{\delta}{2}}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2}\\ &\ll_{A,\delta} Mx^2T^{-\frac{\delta}{2}},\end{aligned}$$

取 $T=\exp\left(\sqrt{c\delta^{-1}\log x}\right)$，则对 $x\ge x_0$ 有

$$T^{-\frac{\delta}{2}}=\exp\left(-\sqrt{\frac{c\delta}{4}}\sqrt{\log x}\right)=\exp\left(-c_1\sqrt{\log x}\right),$$

综上所述有

$$I_1+I_2+I_3\ll_{A,\delta} Mx^2\exp\left(-c_1\sqrt{\log x}\right),$$

于是

$$\int_0^x A(t)\mathrm{d}t=\Phi(x)+O_{A,\delta}\left(Mx^2\mathrm{e}^{-c_1\sqrt{\log x}}\right),$$

其中

$$\Phi(x):=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\mathcal{D}(s)x^{s+1}\frac{\mathrm{d}s}{s(s+1)}.$$

易知道 $\Phi(x)$ 是 $\mathbb{R}^+$ 上关于 x 的无穷阶可微函数，我们有

$$\Phi'(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\mathcal{D}(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s,$$

对 $s\in\mathcal{K}$，有

$$\mathcal{D}(s)=sG(s;z)Z(s;z)(s-1)^{-1},$$

从而由(3)、(4)和(5)得

$$\mathcal{D}(s)\ll M|s-1|^{-A}\quad(s\in\Gamma).$$

当 $s\in\Gamma$ 时，$G(s;z)Z(s;z)$ 在 $s=1$ 处有 Taylor 展式：

$$\begin{aligned}G(s;z)Z(s;z)&=\sum_{k=0}^{\infty}g_k(z)(s-1)^k\\ &=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{G^{(h)}(1;z)}{h!}(s-1)^h\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_l(z)}{l!}(s-1)^l\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{h+l=k}\frac{1}{h!l!}r_l(z)G^{(h)}(1;z)\right)(s-1)^k,\end{aligned}$$

于是

$$g_k(z)=\sum_{h+l=k}\frac{1}{h!l!}r_l(z)G^{(h)}(1;z)=\frac{1}{k!}\sum_{h+l=k}\binom{k}{l}r_l(z)G^{(h)}(1;z)=\Gamma(z-k)\lambda_k(z).$$

而 $G(s;z)Z(s;z)$ 全纯且在圆盘 $|s-1|\le c$ 中为 $O(M)$，由 Cauchy 公式可得到

$$\begin{aligned} g_k(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|s-1|=c} \frac{G(s;z)Z(s;z)}{(s-1)^{k+1}}\mathrm{d}s \\ &\ll \oint_{|s-1|=c} \frac{M}{|s-1|^{k+1}}|\mathrm{d}s| \\ &\ll \frac{M}{c^k} \qquad (k \ge 0). \end{aligned}$$

考虑到 Γ 包含于 $|s-1| \le \frac{1}{2}c$ 中，我们有

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} g_k(z)(s-1)^k \ll \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{M}{c^k}|s-1|^k \ll M\left(\frac{|s-1|}{c}\right)^{N+1},$$

因此，对于 $s \in \Gamma$， $N \ge 0$ 有

$$G(s;z)Z(s;z) = \sum_{k=0}^{N} g_k(z)(s-1)^k + O\left(M\left(\frac{|s-1|}{c}\right)^{N+1}\right).$$

从而

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma sG(s;z)Z(s;z)(s-1)^{-1}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s \\ &= \sum_{k=0}^{N} g_k(z)\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (s-1)^{k-1}x^s\mathrm{d}s + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma O\left(M\left(\frac{|s-1|}{c}\right)^{N+1}\right)\frac{1}{s-1}x^s\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{N} g_k(z)\int_\Gamma (s-1)^{k-1}x^s\frac{s-1}{s}\mathrm{d}s + O\left(Mc^{-N}R(x)\right), \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned} Mc^{-N}R(x) &:= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma O\left(M\left(\frac{|s-1|}{c}\right)^{N+1}\right)\frac{1}{s-1}x^s\mathrm{d}s \\ &\ll Mc^{-N-1}\int_\Gamma |s-1|^{N+1}\left|(s-1)^{-1}\right|\left|x^s\right||\mathrm{d}s| \\ &\ll Mc^{-N}\int_\Gamma |s-1|^N\left|x^s\right||\mathrm{d}s| \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} R(x) &\ll \int_{1-\frac{c}{2}}^{1-r}(1-\sigma)^N x^\sigma \mathrm{d}\sigma + \oint_{|s-1|=c} r^N x^{r\cos\theta+1}|\mathrm{d}s| \\ &\ll \int_{\frac{c}{2}}^{r} x^{1-t}t^N\mathrm{d}(-t) + x^{1+r}r^{N+1} \\ &\ll x\int_r^{\frac{c}{2}} x^{-t}t^N\mathrm{d}t + x\left(\frac{1}{2\log x}\right)^{N+1}. \end{aligned}$$

令 $u = t\log x$， 则 $x^{-t} = \mathrm{e}^{-t\log x} = \mathrm{e}^{-u}$， 有

$$\begin{aligned} R(x) &\ll x(\log x)^{-N-1}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{c}{2}\log x} \mathrm{e}^{-u}u^N\mathrm{d}u + x(\log x)^{-N-1}2^{-N} \\ &\ll x(\log x)^{-N-1}\Gamma(N+1) \\ &\ll x\left(\frac{c_2N+1}{\log x}\right)^{N+1}. \end{aligned}$$

我们利用引理 3 来估计主项 $\Phi'(x)$，作变量代换 $\omega=(s-1)\log x$，则 $x^s=x^{\frac{\omega}{\log x}+1}=x\mathrm{e}^{\omega}$，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(s-1)^{k-1}x^s\mathrm{d}s&=x(\log x)^{-k}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{H}\left(\frac{c}{2}\log x\right)}\mathrm{e}^{\omega}\omega^{k-1}\mathrm{d}\omega\\&=x(\log x)^{-k}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-k)}+O\left(47^{|1-k|}\Gamma(1+|1-k|)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\log x}\right)\right\}\\&=x(\log x)^{-k}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-k)}+O\left((c_3k+1)^k x^{-\frac{c}{4}}\right)\right\}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\Phi'(x)&=\sum_{k=0}^{N}g_k(z)\left[x(\log x)^{-k}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-k)}+O\left((c_3k+1)^k x^{-\frac{c}{4}}\right)\right\}\right]+O\left(Mc^{-N}R(x)\right)\\&=\sum_{k=0}^{N}g_k(z)\frac{x}{(\log x)^k}\frac{1}{\Gamma(1-k)}+\sum_{k=0}^{N}g_k(z)\frac{x}{(\log x)^k}O\left((c_3k+1)^k x^{-\frac{c}{4}}\right)+O\left(Mc^{-N}R(x)\right)\\&=x\left\{\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda_k(z)}{(\log x)^k}+O(E_N)\right\}+O\left(Mc^{-N}R(x)\right),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}E_N&:=x^{-\frac{c}{4}}\sum_{k=0}^{N}g_k(z)\left(\frac{c_3k+1}{\log x}\right)^k\ll Mx^{-\frac{c}{4}}c_4^N\sum_{k=0}^{N}k!\left(\frac{5}{c\log x}\right)^k\\&\ll Mx^{-\frac{c}{4}}\left(\frac{5c_4}{c\log x}\right)^N\sum_{k=0}^{N}\frac{N!}{(N-k)!}\left(\frac{5}{c\log x}\right)^{k-N}\\&\ll M\left(\frac{5c_4}{c\log x}\right)^N N!x^{-\frac{c}{20}}\ll M\left(\frac{c_5N+1}{\log x}\right)^{N+1},\end{aligned}$$

将其代入(8)得

$$\begin{aligned}\Phi'(x)&=x\left\{\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda_k(z)}{(\log x)^k}+O\left(M\left(\frac{c_5N+1}{\log x}\right)^{N+1}\right)\right\}+O\left(Mc^{-N}x\left(\frac{c_2N+1}{\log x}\right)^{N+1}\right)\\&=x\left\{\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda_k(z)}{(\log x)^k}+O\left(M\left(\frac{c_6N+1}{\log x}\right)^{N+1}\right)\right\}.\end{aligned}$$

证毕。

式(2)的证明与式(1)的证明类似，故在此做简要说明而不再赘述。由于 $\varphi(n)$ 的 Dirichlet 级数可表为

$$\mathcal{F}(s)=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\qquad(\sigma>2).$$

我们将用 $H(s;z):=\frac{\{(s-2)\zeta(s-1)\}^z}{s}$ 替换证明过程中的函数 $Z(s;z)$，它在 $|s-2|<1$ 上全纯，取 $z=1$，$G(s;z)=\frac{1}{\zeta(s)}$，$\kappa=2+\frac{1}{\log x}$，证明过程可类似推出。

参考文献

[1] Mertens, F. (1874) Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie. *Journal für die reine und angewandte athematik*, **1874**, 289-338. https://doi.org/10.1515/crll.1874.77.289

[2] Hardy, G.H. and Wright, E.M. (1965) An Introduction to the Theory of Numbers.4th Edition, Clarendon Press, Oxford, England.

[3] Walfisz, A. (1963) Weylsche Exponentialsummen in der Neueren Zahlentheorie. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

[4] Montgomery, H.L. (1987) Fluctuations in the Mean of Euler's Phi Function. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences Section A*, **97**, 1-3. https://doi.org/10.1007/BF02837826

[5] Pillai, S.S. and Chowla, S.D (1930) On the Error Terms in Some Asymptotic Formulae in the Theory of Numbers (1). *Journal of the London Mathematical Society*, **2**, 95. https://doi.org/10.1112/jlms/s1-5.2.95

[6] Erdös, P. and Shapiro, H.N. (1951) On the Changes of Sign of Function a Certain Error. *Canadian Journal of Mathematics*, **3**, 375-385. https://doi.org/10.4153/CJM-1951-043-3

[7] Karatsuba, A.A. (1991) Basic Analytic Number Theory. Springer-Verlag, Berlin.

[8] Tenenbaum, G. (1995) Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory. In: Thomas, C.B., Trans., *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 46, Second French Edition, Cambridge University Press, Cambridge, xvi + 448.

[9] Apostol, T.M. (1976) Introduction to Analytic Number Theory. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-5579-4