Pure Mathematics 理论数学, 2021, 11(6), 979-989
Published Online June 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2021.116112

一类非线性三阶奇摄动边值问题解的存在性和渐近估计

张瑞燕

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: zry1753574260@163.com

收稿日期：2021年4月26日；录用日期：2021年5月27日；发布日期：2021年6月3日

摘 要

本文研究一类三点边值条件下非线性三阶奇摄动边值问题

$$\begin{cases} \epsilon x'''(t) = f(t, x(t), x'(t), x''(t)), \qquad 0 \le t \le 1, 0 < \epsilon \ll 1, \\ x(0, \epsilon) = x'(0, \epsilon) = 0, \quad x'(1, \epsilon) - \xi x'(\eta, \epsilon) = 0 \end{cases}$$

解的存在性和渐近估计, 其中 $0 < \eta < 1$, $0 < \xi\eta < 1$. 通过构造一个恰当的广义上下解对和运用 **Nagumo** 条件和边界层函数, 我们得到上述问题解的存在性, 并且给出了解的一致有效渐近估计.

关键词

三阶，奇异摄动，存在性，渐近估计

Existence and Asymptotic Estimates of Solutions for a Class of Nonlinear Third-Order Singularly Perturbed Boundary Value Problems

Ruiyan Zhang

文章引用: 张瑞燕. 一类非线性三阶奇摄动边值问题解的存在性和渐近估计[J]. 理论数学, 2021, 11(6): 979-989.
DOI: 10.12677/pm.2021.116112

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: zry1753574260@163.com

Received: Apr. 26^{th}, 2021; accepted: May 27^{th}, 2021; published: Jun. 3^{rd}, 2021

Abstract

This paper is devoted to study the existence and asymptotic estimates of solutions for a class of nonlinear third-order singularly perturbed boundary value problems with three-point boundary value conditions

$$\begin{cases} \epsilon x'''(t) = f(t, x(t), x'(t), x''(t)), \quad 0 \le t \le 1, 0 < \epsilon \ll 1, \\ x(0, \epsilon) = x'(0, \epsilon) = 0, \quad x'(1, \epsilon) - \xi x'(\eta, \epsilon) = 0, \end{cases}$$

where $0 < \eta < 1,\ 0 < \xi\eta < 1$**. By constructing an appropriate generalized upper- and lower-solution pair and employing the Nagumo conditions and boundary layer functions, we obtain the existence of solutions to the above problem and give uniformly valid asymptotic estimates of the solutions.**

Keywords

Third-Order, Singularly Perturbed, Existence, Asymptotic Estimates

1. 介绍

三阶常微分方程边值问题在流体力学, 生物学和天文学等学科中的应用日益广泛, 逐渐引起了许多学者的关注. 三阶边值问题是常微分方程中的经典问题, 对其解的存在性的研究, 目前已有一些结果. 例如, 在文献 [1]中, Guo 研究了三阶三点边值问题

$$\begin{cases} u'''(t) + a(t)f(u(t)) = 0, \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad u'(1) = \alpha u'(\eta), \end{cases} \tag{P}$$

其中 $0<\eta<1,\ 1<\alpha<\frac{1}{\eta}$, 并运用锥拉伸与压缩不动点定理得到如下结果:

定理 A 设 $f\in C([0,\infty),\ [0,\infty)), a\in C([0,1],\ [0,\infty))$ 且在 $t\in[\frac{\eta}{\alpha},\eta]$ 上不恒为零. 若 f 满足

(i) $f_0=0,\ f_\infty=\infty$,

或

(ii) $f_0=\infty,\ f_\infty=0$,

则问题 (P) 至少存在一个正解, 其中

$$f_0=\lim_{u\to0^+}\frac{f(u)}{u},\ f_\infty=\lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}.$$

在文献 [2]中, Torres 运用锥拉伸与压缩不动点定理研究了非线性项 f 满足超线性与次线性情形时，三阶三点边值问题

$$\begin{cases} u'''(t)+a(t)f(t,u(t))=0, & 0<t<1,\\ u(0)=0, \quad u'(0)=u'(1)=\alpha u'(\eta) \end{cases}$$

正解的存在性, 其中 $\eta\in(0,1),\ \alpha\in[0,\frac{1}{\eta}),\ f\in C([0,1]\times[0,\infty),[0,\infty)), a\in L^1[0,1]$ 非负, 且在 $[0,1]$ 上不恒为零. 三阶三点边值问题的其他相关结果, 参见文献 [3–7].

然而, 在上述文献 [1–7]中, 研究的问题均为是否存在解? 存在几个解? 对非线性三阶奇异摄动三点边值问题的研究很少. 所以, 本文运用广义上下解方法和边界层函数, 研究以下非线性三阶奇异摄动三点边值问题

$$\epsilon x'''(t)=f(t,x(t),x'(t),x''(t)), \qquad 0\le t\le 1, 0<\epsilon\ll 1, \tag{1}$$

$$x(0,\epsilon)=x'(0,\epsilon)=0, \quad x'(1,\epsilon)-\xi x'(\eta,\epsilon)=0 \tag{2}$$

解的存在性结果和渐近估计, 其中 $0<\eta<1,\ 0<\xi\eta<1$.

为了研究边值问题 (1)-(2), 我们需要讨论以下奇摄动二阶边值问题

$$\epsilon y''(t)=f(t,\int_0^t y(s)ds, y(t), y'(t)), \qquad 0\le t\le 1, 0<\epsilon\ll 1, \tag{3}$$

$$y(0,\epsilon)=0, \quad y(1,\epsilon)-\xi y(\eta,\epsilon)=0. \tag{4}$$

首先讨论以下问题

$$y''(t)=f(t,\int_0^t y(s)ds, y(t), y'(t)), \qquad 0\le t\le 1, \tag{5}$$

$$y(0)=0, \quad y(1)-\xi y(\eta)=0. \tag{6}$$

2. 预备知识

定义 1 若 $\alpha(t) \in C^2[0,1]$ 满足

$$\begin{cases} \alpha''(t) \le f(t, \int_0^t \alpha(s)ds, \alpha(t), \alpha'(t)), & 0 \le t \le 1, \\ \alpha(0) \ge 0, \quad \alpha(1) - \xi\alpha(\eta) \ge 0, \end{cases}$$

则称 $\alpha(t)$ 为边值问题 (5)-(6) 的一个上解.

若 $\beta(t) \in C^2[0,1]$ 满足

$$\begin{cases} \beta''(t) \ge f(t, \int_0^t \beta(s)ds, \beta(t), \beta'(t)), & 0 \le t \le 1, \\ \beta(0) \le 0, \quad \beta(1) - \xi\beta(\eta) \le 0, \end{cases}$$

则称 $\beta(t)$ 为边值问题 (5)-(6) 的一个下解.

定义 2 $f(t,x,y,z)$ 在 $[0,1] \times \mathbb{R}^3$ 上满足 Nagumo 条件, 就是说, f 连续且对 $\forall a > 0$, 存在正函数 $\Phi : [0,+\infty) \to [a,+\infty)$, 对 $\forall (t,x,y,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}^3$, 都有 $|f(t,x,y,z)| \le \Phi(|z|)$, 且 $\int_0^{+\infty} \frac{s}{\Phi(s)} ds = +\infty$.

定义 3 定义

$$f^*(t, \int_0^t y(s)ds, y(t), y'(t)) = \begin{cases} f(t, \int_0^t \alpha(s)ds, \alpha(t), \alpha'(t)), & y(t) > \alpha(t), \\ f(t, \int_0^t y(s)ds, y(t), y'(t)), & \beta(t) \le y(t) \le \alpha(t), \\ f(t, \int_0^t \beta(s)ds, \beta(t), \beta'(t)), & y(t) < \beta(t), \end{cases}$$

则函数 $f^*(t, \int_0^t y(s)ds, y(t), y'(t)) \in C([0,1] \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ 为 $f(t, \int_0^t y(s)ds, y(t), y'(t))$ 关于 $(\beta(t), \alpha(t))$ 的修正函数.

注1: 若 $\alpha(t), \beta(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续, f 在 $[0,1] \times \mathbb{R}^3$ 上连续, 则修正函数 f^* 在 $[0,1] \times \mathbb{R}^3$ 上连续且有界. 此外, 当 $\alpha(t) \le \beta(t)$ 时, $f^* = f$.

引理 1 [8] 若 $f(t, \int_0^t y(s)ds, y(t), y'(t))$ 在 $[0,1] \times \mathbb{R}^3$ 上连续且有界, 则边值问题 (5)-(6) 存在一个解 $y(t) \in C^2([0,1], \mathbb{R})$.

引理 2 假定

(i) $f(t,x,y,z)$ 在 $[0,1] \times \mathbb{R}^3$ 上连续,

(ii) 对 $\forall (t,x,y,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}^3$, $f(t,x,y,z)$ 关于 z 满足 Nagumo 条件,

(iii) 边值问题 (5)-(6) 存在上解 $\alpha(t)$ 和下解 $\beta(t)$, 满足

$$\beta(0) \le 0 \le \alpha(0), \tag{7}$$

$$\beta(1)-\xi\beta(\eta)\leq 0\leq \alpha(1)-\xi\alpha(\eta), \tag{8}$$

则边值问题 (5)-(6) 存在一个解 $y(t)\in C^2([0,1],\mathbb{R})$, 使得

$$\beta(t)\leq y(t)\leq \alpha(t),\ |y'(t)|\leq D,\ t\in[0,1],$$

其中 $D>0$ 是一个常数.

证明 令

$$\lambda=\max_{t\in[0,1]}\alpha(t)-\min_{t\in[0,1]}\beta(t).$$

由条件 (ii), 存在 $M>0$, 使得 $\int_\lambda^M \frac{s}{\Phi(s)}ds>\lambda$.

定义

$$N=\max\{|\alpha'(t)|,|\beta'(t)|,M,2\lambda\},$$

则 $N>0$. 由注 1 和引理 1, 可以得到修正问题

$$\begin{cases} y''(t)=f^*(t,\int_0^t y(s)ds,y(t),y'(t)), \quad 0\leq t\leq 1,\\ y(0)=0,\quad y(1)-\xi y(\eta)=0, \end{cases} \tag{9}$$

存在一个解 $y(t)\in C^2([0,1],\mathbb{R})$.

由 f^* 的定义, 容易证明问题 (9) 的解满足

$$\beta(t)\leq y(t)\leq \alpha(t),\ |y'(t)|\leq N,\ t\in[0,1]. \tag{10}$$

下面分两步证明 (10) 成立.

(1) 证明 $\beta(t)\leq y(t)\leq\alpha(t),\ t\in[0,1]$.

先证 $\beta(t)\leq y(t),\ t\in[0,1]$. 反设 $\beta(t)\leq y(t)),\ t\in[0,1]$ 不成立, 则存在 $t_0\in[0,1]$, 使得

$$\beta(t_0)>y(t_0).$$

令 $p(t)=:\beta(t)-y(t)$, 则 $p(c)=\max\{\beta(t)-y(t),\ t\in[0,1]\}>0$.

若 $c=0$, 则 $\beta(0)-y(0)>0$, 由 (7) 可以得到 $\beta(0)\leq 0=y(0)$, 矛盾.

若 $c=1$, 则 $\beta(1)-y(1)>0$, 由 (8) 可以得到 $\beta(1)-\xi\beta(\eta)\leq 0=y(1)-\xi y(\eta)$, 即 $\beta(1)-y(1)\leq \xi(\beta(\eta)-y(\eta))<\beta(\eta)-y(\eta)$, 矛盾.

若 $c\in(0,1)$, 则 $\beta(c)-y(c)>0,\ \beta''(c)-y''(c)<0$.

另一方面,

$$\begin{aligned}\beta''(c)-y''(c) &\geq f(c,\int_0^c\beta(s)ds,\beta(c),\beta'(c))-f^*(c,\int_0^c y(s)ds,y(c),y'(c))\\ &= f(c,\int_0^c\beta(s)ds,\beta(c),\beta'(c))-f(c,\int_0^c\beta(s)ds,\beta(c),\beta'(c))\\ &=0,\end{aligned}$$

矛盾. 因此 $\beta(t)\leq y(t),\ t\in[0,1]$. 同理可证 $y(t)\leq\alpha(t),\ t\in[0,1]$.
所以,

$$\beta(t)\leq y(t)\leq\alpha(t),\ t\in[0,1].$$

(2) 证明 $|y'(t)|\leq N,\ t\in[0,1]$.

反设上面的结论不成立, 则存在 $t_1\in[0,1]$, 使得 $y'(t_1)>N$.
令

$$d=\max\{y'(t)-N,\ t\in[0,1]\}>0,$$

则由中值定理和 $\beta(t)\leq y(t)\leq\alpha(t),\ t\in[0,1]$ 可知, 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$|y'(\theta)|=|y(1)-y(0)|\leq\lambda<N.$$

由于 $y'(t)\in C[0,1]$, 则存在区间 $[t_2,t_3]\subseteq[0,1]$ (或者 $[t_3,t_2]\subseteq[0,1]$), 使得

$$y'(t_2)=\lambda,\ y'(t_3)=N,\ \lambda<y'(t)<N,\ t\in(t_2,t_3),$$

因此,

$$\begin{aligned}|y''(t)| &= |f^*(t,\int_0^t y(s)ds,y(t),y'(t))|\\ &= |f(t,\int_0^t y(s)ds,y(t),y'(t))|\\ &\leq\Phi(|y'(t)|),\ t\in(t_2,t_3).\end{aligned}$$

那么,

$$|\int_{t_2}^{t_3}\frac{y'(t)y''(t)}{\Phi(y'(t))}dt|\leq|\int_{t_2}^{t_3}y'(t)dt|\leq\lambda, \tag{11}$$

另一方面,

$$|\int_{t_2}^{t_3}\frac{y'(t)y''(t)}{\Phi(y'(t))}dt|=|\int_{\lambda}^{N}\frac{s}{\Phi(s))}ds|>\lambda, \tag{12}$$

(11) 和 (12) 矛盾, 故假设不成立, 所以 $|y'(t)|\leq N,\ t\in[0,1]$.

3. 主要定理及其证明

定理 1 [9]　假定

(i) 边值问题 (3)-(4) 的退化问题(即 $f(t,\int_0^t y(s)ds,y(t),y'(t))=0,\ 0\leq t\leq1,\ y(0)=0$)有一个

退化解 $y_0(t) \in C^2([0,1],\mathbb{R})$, 满足 $y_0'(t) > 0,\ 0 \le t \le 1$, 且 $C =: y_0(1) - \xi y_0(\eta) > 0$,

(ii) 对 $\forall (t,x,y,z) \in [0,1]\times\mathbb{R}^3$, $f(t,x,y,z)$ 关于 z 满足 Nagumo 条件,

(iii) 存在正常数 $m = \frac{2\epsilon\xi}{C(1-\eta)(\xi+1)}$, 使得 $f_{yz} = \frac{\partial^2 f(t,x,y,z)}{\partial y \partial z} \ge m > 0$, $f_x = \frac{\partial f(t,x,y,z)}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f(t,x,y,z)}{\partial y}$, $f_z = \frac{\partial f(t,x,y,z)}{\partial z}$ 均为非负函数,

则当 $\epsilon > 0$ 充分小时, 边值问题 (3)-(4) 存在一个解 $y(t,\epsilon)$ 满足

$$|y(t,\epsilon) - y_0(t)| \le \omega(t,\epsilon) + r\epsilon,\ 0 \le t \le 1,\ 0 < \epsilon << 1,$$

其中, r 是一个待定的足够大的常数, 且

$$\omega(t,\epsilon) = \frac{2\epsilon C}{2\epsilon + mC(\eta - t)}. \tag{13}$$

证明 构造函数 $\alpha(t,\epsilon),\ \beta(t,\epsilon)$ 如下:

$$\begin{cases} \alpha(t,\epsilon) = y_0(t) + \omega(t,\epsilon) + r\epsilon, \\ \beta(t,\epsilon) = y_0(t) - r\epsilon, \end{cases}$$

事实上, $\omega(t,\epsilon)$ 是 $t = \eta$ 处的边界函数, 满足

$$\begin{cases} \epsilon\omega''(t,\epsilon) - m\omega(t,\epsilon)\omega'(t,\epsilon) = 0, \qquad 0 \le t \le 1, \\ \omega(1,\epsilon) - \xi\omega(\eta,\epsilon) = C, \end{cases}$$

显然, $\omega(t,\epsilon) > 0,\ \omega''(t,\epsilon) > 0,\ 0 \le t \le 1.$

下面证明 $\alpha(t,\epsilon),\ \beta(t,\epsilon)$ 分别为问题 (3) 的上解和下解.

对 $\forall \epsilon > 0$, 不难证明存在充分大的正常数 r_1, 当 $r > r_1$ 时,

$$\alpha(t,\epsilon),\ \beta(t,\epsilon) \in C^2([0,1]),\ \alpha(t,\epsilon) \ge \beta(t,\epsilon),\ 0 \le t \le 1,$$

$$\alpha(0,\epsilon) = y_0(0) + \omega(0,\epsilon) + r\epsilon = \omega(0,\epsilon) + r\epsilon \ge 0,$$

$$\beta(0,\epsilon) = y_0(0) - r\epsilon = -r\epsilon \le 0,$$

$$\begin{aligned} \alpha(1,\epsilon) - \xi\alpha(\eta,\epsilon) &= y_0(1) + \omega(1,\epsilon) + r\epsilon - \xi(y_0(\eta) + \omega(\eta,\epsilon) + r\epsilon) \\ &= y_0(1) - \xi y_0(\eta) + \omega(1,\epsilon) - \xi\omega(\eta,\epsilon) + (1-\xi)r\epsilon \ge 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta(1,\epsilon) - \xi\beta(\eta,\epsilon) &= y_0(1) - r\epsilon - \xi(y_0(\eta) - r\epsilon) \\ &= y_0(1) - \xi y_0(\eta) - (1-\xi)r\epsilon, \\ &= C - (1-\xi)r\epsilon \le 0, \end{aligned}$$

即 $\alpha(t,\epsilon)$, $\beta(t,\epsilon)$ 满足不等式 (7)-(8), 由中值定理及 (i) 和 (iii), 可以得到

$$\begin{aligned}
&f\Big(t,\int_0^t\alpha(s)ds,\alpha,\alpha'\Big)\\
&=f\Big(t,\int_0^t\alpha(s)ds,\alpha,\alpha'\Big)-f\Big(t,\int_0^t\alpha(s)ds,\alpha,y_0'\Big)\\
&+f\Big(t,\int_0^t\alpha(s)ds,\alpha,y_0'\Big)-f\Big(t,\int_0^t\alpha(s)ds,y_0,y_0'\Big)\\
&+f\Big(t,\int_0^t\alpha(s)ds,y_0,y_0'\Big)-f\Big(t,\int_0^t y_0(s)ds,y_0,y_0'\Big)+f\Big(t,\int_0^t y_0(s)ds,y_0,y_0'\Big)\\
&=\omega'(t,\epsilon)\int_0^1 f_z\Big(t,\int_0^t\alpha(s)ds,\alpha,y_0'+\theta(\alpha'-y_0')\Big)d\theta\\
&+(\omega(t,\epsilon)+r\epsilon)\int_0^1 f_y\Big(t,\int_0^t\alpha(s)ds,y_0+\theta(\alpha-y_0),y_0'\Big)d\theta\\
&+\int_0^t(\omega(s,\epsilon)+r\epsilon)ds\int_0^1 f_x\Big(t,\int_0^t[y_0(s)+\theta(\alpha(s)-y_0(s))]ds,y_0,y_0'\Big)d\theta\\
&\geq(\omega(t,\epsilon)+r\epsilon)\int_0^1 f_y\Big(t,\int_0^t\alpha(s)ds,y_0+\theta(\alpha-y_0),y_0'\Big)d\theta\\
&-(\omega(t,\epsilon)+r\epsilon)\int_0^1 f_y\Big(t,\int_0^t\alpha(s)ds,y_0+\theta(\alpha-y_0),y_0'+\alpha'\Big)d\theta\\
&+(\omega(t,\epsilon)+r\epsilon)\int_0^1 f_y\Big(t,\int_0^t\alpha(s)ds,y_0+\theta(\alpha-y_0),y_0'+\alpha'\Big)d\theta\\
&\geq(\omega(t,\epsilon)+r\epsilon)(y_0'+\omega'(t,\epsilon))\int_0^1\int_0^1 f_{yz}\Big(t,\int_0^t\alpha(s)ds,y_0+\theta(\alpha-y_0),y_0'+s\alpha'\Big)d\theta ds\\
&\geq m(\omega(t,\epsilon)+r\epsilon)(y_0'+\omega'(t,\epsilon)).
\end{aligned}$$

由 $y_0(t)\in C^2([0,1])$, $y_0'(t)>0$, $0\leq t\leq 1$ 可知, $y_0'(t)$, $y_0''(t)$ 在 $[0,1]$ 上有界. 因此, 存在正常数 n_1, n_2, 使得

$$|y_0''(t)|\leq n_1,\ |y_0'(t)|\geq n_2,\ t\in[0,1].$$

那么,

$$\begin{aligned}
\epsilon\alpha''(t)-f\Big(t,\int_0^t\alpha(s)ds,\alpha(t),\alpha'(t)\Big)&\leq\epsilon(y_0''+\omega'')-m(\omega+r\epsilon)(y_0'+\omega')\\
&=\epsilon y_0''+\epsilon\omega''-m\omega y_0'-m\omega\omega'-mr\epsilon y_0'-mr\epsilon\omega'\\
&\leq\epsilon y_0''-mr\epsilon y_0'\leq\epsilon(n_1-mrn_2),
\end{aligned}$$

当 $r\geq r_2=\frac{n_1}{mn_2}$ 时, 就有

$$\epsilon\alpha''(t)\leq f\Big(t,\int_0^t\alpha(s)ds,\alpha(t),\alpha'(t)\Big),\ 0\leq t\leq 1.$$

类似的, 可以得到

$$f\left(t,\int_0^t\beta(s)ds,\beta(t),\beta'(t)\right)\le -mr\epsilon y_0',$$

那么,

$$\begin{aligned}\epsilon\beta''(t)-f\left(t,\int_0^t\beta(s)ds,\beta(t),\beta'(t)\right)&\ge \epsilon y_0''+mr\epsilon y_0'\\&\ge \epsilon(mrn_2-n_1),\end{aligned}$$

当 $r\ge r_2=\frac{n_1}{mn_2}$ 时, 就有

$$\epsilon\beta''(t)\ge f\left(t,\int_0^t\beta(s)ds,\beta(t),\beta'(t)\right),\ 0\le t\le 1.$$

因此, 当 $r\ge\max\{r_1,r_2\}$ 时, $\alpha(t,\epsilon)$, $\beta(t,\epsilon)$ 就分别为问题 (3) 的上解和下解. 由引理 2 可以得到, 边值问题 (3)-(4) 存在一个解 $y(t)\in C^2([0,1],\mathbb{R})$, 使得 $\alpha(t,\epsilon)\le y(t,\epsilon)\le\beta(t,\epsilon)$, $0\le t\le 1$.

定理 2 假定

(i) 边值问题 (1)-(2) 的退化问题

$$\begin{cases}f(t,x(t),x'(t),x''(t))=0, & 0\le t\le 1,\\ x(0)=x'(0)=0,\end{cases}$$

有一个退化解 $x_0(t)\in C^3([0,1],\mathbb{R})$, 满足 $x_0''(t)>0,\ 0\le t\le 1$, 且 $C^*=:x_0'(1)-\xi x_0'(\eta)>0$,

(ii) 对 $\forall(t,x,y,z)\in[0,1]\times\mathbb{R}^3$, $f(t,x,y,z)$ 关于 z 满足 Nagumo 条件,

(iii) 存在正常数 $m=\frac{2\epsilon\xi}{C(1-\eta)(\xi+1)}$, 使得 $\frac{\partial^2 f(t,x,y,z)}{\partial y\partial z}\ge m>0$, 且 $\frac{\partial f(t,x,y,z)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(t,x,y,z)}{\partial y}$, $\frac{\partial f(t,x,y,z)}{\partial z}$ 是非负函数,

则当 $\epsilon>0$ 充分小时, 边值问题 (1)-(2) 存在一个解 $x(t,\epsilon)\in C^3([0,1],\mathbb{R})$ 满足

$$|x(t,\epsilon)-x_0(t)|\le\omega(t,\epsilon)+r\epsilon. \tag{14}$$

证明 令

$$x'(t)=u(t), \tag{15}$$

则边值问题 (1)-(2) 可以转化为

$$\begin{cases}\epsilon u''(t)=f(t,\int_0^t u(s),u(s),u'(s)), & 0\le t\le 1,\ 0<\epsilon\ll 1,\\ u(0,\epsilon)=0,u(1,\epsilon)-\xi u(\eta,\epsilon)=0,\end{cases} \tag{16}$$

(16) 的退化问题

$$\begin{cases}f(t,\int_0^t u(s),u(s),u'(s))=0, & 0\le t\le 1,\\ u(0)=0,\end{cases} \tag{17}$$

有一个退化解 $u_0(t) \in C^2([0,1],\mathbb{R})$, 满足

$$u_0'(t) > 0,\ \overline{C} =: u(1) - \xi u(\eta) > 0.$$

故定理 1 中的条件均满足, 那么边值问题 (16) 存在一个解 $u(t,\epsilon) \in C^2([0,1],\mathbb{R})$, 使得

$$|u(t,\epsilon) - u_0(t)| \le \omega(t,\epsilon) + r\epsilon,\ 0 \le t \le 1,\ 0 < \epsilon << 1, \tag{18}$$

其中, $\omega(t,\epsilon)$ 为 (13) 中所定义函数, 由 (15)-(18) 不难证明边值问题 (1)-(2) 存在一个解 $x(t,\epsilon) \in C^3([0,1],\mathbb{R})$, 并且满足 (14).

基金项目

国家自然科学基金资助项目(12061064).

参考文献

[1] Guo, L.J., Sun, J.P. and Zhao, Y.H. (2008) Existence of Positive Solution for Nonlinear Third-Order Three-Point Boundary Value Problem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **68**, 3151-3158. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.03.008

[2] Torres, F.J. (2013) Positive Solutions for a Third-Order Three Point Boundary Value Problems. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2013**, 1-11.

[3] Sun, Y.P. (2005) Positive Solutions of Singular Third-Order Three-Point Boundary Value Problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **306**, 589-603. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.10.029

[4] Palamides, A.P. and Smyrlis, G. (2008) Positive Solutions to a Singular Third-Order Three-Point Boundary Value Problem with an Indefinitely Signed Green's Function. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **68**, 2104-2118. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.01.045

[5] Sun, J.P., Ren, Q.Y. and Zhao, Y.H. (2010) The Upper and Lower Solution Method for Nonlinear Third-Order Three-Point Boundary Value Problem. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **2010**, 1-8. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2010.1.26

[6] Henderson, J. and Kosmatov, N. (2014) Three-Point Third-Order Problems with a Sign-Changing Nonlinear Term. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2014**, 1-10.

[7] Graef, J.R. and Yang, B. (2005) Multiple Positive Solutions to a Three Point Third Order Boundary Value Problem. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **2005**, 337-344.

[8] Ma, R.Y. (1999) Positive Solutions of a Nonlinear Three-Point Boundary-Value Problem. *Electronic Journal of Differential Equations*, **1998**, 1-8.

[9] Lin, S.-R. (2011) The Singular Perturbation of Boundary Value Problem for Third-Order Nonlinear Vector Integro-Differential Equation and Its Application. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 1746-1751. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.06.056