

带Poisson跳的随机时滞微分方程的矩有界性

林宇璇, 李光洁*

广东外语外贸大学数学与统计学院, 广东 广州

Email: *scutliguangjie@163.com

收稿日期: 2021年7月9日; 录用日期: 2021年8月12日; 发布日期: 2021年8月19日

摘 要

研究一类带Poisson跳的随机时滞微分方程解的有界性。运用随机分析以及不等式技巧证明了该方程的解是 p ($p \in (0,1)$) -阶矩有界的。

关键词

随机时滞微分方程, 矩有界性, Poisson跳

Moment Boundedness of Stochastic Delay Differential Equations with Poisson Jumps

Yuxuan Lin, Guangjie Li*

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong

Email: *scutliguangjie@163.com

Received: Jul. 9th, 2021; accepted: Aug. 12th, 2021; published: Aug. 19th, 2021

Abstract

The boundedness of solutions for stochastic delay differential equations with Poisson jumps is investigated in this paper. By using stochastic analysis and inequality techniques, it is proved that the p -th p ($p \in (0,1)$) moment of the solution of such equations is bounded.

*通讯作者。

Keywords

Stochastic Delay Differential Equations, Moment Boundedness, Poisson Jumps

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随机微分方程广泛地应用于生物学、数学、经济、金融领域以及控制工程等诸多领域, 见文献[1] [2] [3]及其中的参考文献。在许多实际工程系统中, 时滞是这些实际系统经常发生振荡、不稳定性和性能差的原因。因此, 很有必要研究带有时滞的随机微分方程, 学者们在研究随机时滞微分方程方面做出了许多努力, 参阅文献[4] [5] [6] [7]。王等人在文献[8]和文献[9]中分别研究了带分布时滞的线性随机时滞微分方程的矩有界性和线性随机时滞微分方程的二阶矩有界性。文献[10]研究了脉冲随机时滞微分方程的有界性。

Brown 运动是连续的随机过程, 可以用来刻画连续的随机系统。然而许多实际的随机系统会遭遇跳跃形式的随机突发扰动。在这些情形下, 不能用 Brown 运动来刻画这些随机系统, 因此将带 Poisson 跳的过程引入到这些随机系统中来处理这些实际情形是合理的[11] [12] [13]。本文研究了一类带 Poisson 跳的随机时滞微分方程的 $p(p \in (0,1))$ -阶矩有界性。该文结构如下: 第 2 节给出预备知识, 第 3 节给出本文的主要结果。

2. 预备知识

记 R^n 表示 n -维的欧式空间。若 $x \in R^n$, $|x|$ 表示欧式范数。记 $R = (-\infty, +\infty)$, $R^+ = [0, +\infty)$ 。记一个完备的概率空间为 (Ω, \mathcal{F}, P) , 其滤子 \mathcal{F}_t 满足通常的条件, 即 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 是右连续的且 \mathcal{F}_0 包含所有的零测集。令 $\delta > 0$, $C([-\delta, 0]; R^n)$ 表示所有定义在 $[-\delta, 0]$ 上的 R^n -值连续函数 φ 。 $C_{\mathcal{F}_0}^b(\Omega; R^n)$ 表示所有 \mathcal{F}_0 -可测的且定义在 $C([-\delta, 0]; R^n)$ 上的有界函数全体, 且其上的范数为 $\|\varphi\| = \sup_{-\delta \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$ 。对 $\forall x, y \in R^n$, $\langle x, y \rangle$ 和 $x^T y$ 均表示内积。

$\{r(t)\}_{t \geq 0}$ 表示的是定义在完备概率空间上的一个取值为 $S = \{1, 2, \dots, N\}$ 的右连续时齐 Markov 链, 其生成元(密度矩阵) $\Gamma = (\gamma_{ij})_{N \times N}$ 由转移概率矩阵确定, 即

$$P\{r(t+\Delta) = j | r(t) = i\} = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta), & \text{当 } i \neq j, \\ 1 + \gamma_{ii}\Delta + o(\Delta), & \text{当 } i = j, \end{cases}$$

这里, $\Delta > 0$, $\lim_{\Delta \rightarrow 0} o(\Delta)/\Delta = 0$, 对于 $i \neq j$, $\gamma_{ij} \geq 0$ 表示从状态 i 到状态 j 的转移速率且 $\gamma_{ii} = -\sum_{j \neq i} \gamma_{ij}$ 。作为一个事实, $r(\cdot)$ 的每个样本轨道是一个右连续的阶梯函数, 且在 $R^+ = [0, +\infty)$ 上的任何一个有限区间里至多存在有限个跳跃点(参阅[14])。

考虑如下形式的带 Poisson 跳的随机时滞微分方程:

$$\begin{aligned} dx(t) = & \left[f(x(t), t, r(t)) + u(x(t-\delta), t, r(t)) \right] dt + g(x(t), t, r(t)) d\omega(t) \\ & + h(x(t), t, r(t)) dN(t), \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (1)$$

初始值 $x_0 = \varphi(\theta) = \{x(t_0 + \theta) : -\delta \leq \theta \leq 0\} \in C_{F_0}^b(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $r(0) = i_0 \in S$, 其中 $f, g, h, u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\omega(t)$ 和 $N(t)$ 分别是定义在该概率空间上的 1-维 Brown 运动和强度为 λ 的 Poisson 过程, 这里假设 Markov 链 $r(t)$ 与 Brown 运动 $B(t)$ 和 Poisson 过程 $N(t)$ 是相互独立的。 $\tilde{N}(t) = N(t) - \lambda t$ 表示 $N(t)$ 的补偿 Poisson 过程。本文假设对于任意的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+$ 和 $i \in S$, 函数 f, g, h, u 满足如下条件:

$$\begin{aligned} |f(x_1, t, i) - f(x_2, t, i)| &\leq L_1 |x_1 - x_2|, \\ |g(x_1, t, i) - g(x_2, t, i)| &\leq L_2 |x_1 - x_2|, \\ |h(x_1, t, i) - h(x_2, t, i)| &\leq L_3 |x_1 - x_2|, \\ |u(x_1, t, i) - u(x_2, t, i)| &\leq K |x_1 - x_2|. \end{aligned} \quad (2)$$

且对 $\forall t \geq 0$ 和 $i \in S$, 假设 $f(0, t, i) = g(0, t, i) = h(0, t, i) = 0$ 。因此, 当方程(1)的初始值 $x_0 = 0$ 时, 该方程存在平凡解 $x(t) \equiv 0$ 。进一步, 经计算对 $\forall (x, i, t) \in \mathbb{R}^n \times S \times \mathbb{R}^+$ 有

$$|f(x, t, i)| \leq L_1 |x|, |g(x, t, i)| \leq L_2 |x|, |h(x, t, i)| \leq L_3 |x|, |u(x, t, i)| \leq K |x|.$$

注在假设条件(2)下, 方程(1)存在唯一的全局解且 $E|x(t)|^2 < \infty$ ($\forall t \geq 0$)。

令 $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times S; \mathbb{R}^+)$ 表示的是对 $\forall i \in S$ 关于变量 x 二阶连续可导且关于变量 t 一阶连续可导的全体非负函数 $V(x, t, i)$ 的集合。给定任意的 $V(x, t, i) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times S; \mathbb{R}^+)$, 定义算子

$$\begin{aligned} LV(x, t, i) &= V_t(x, t, i) + V_x(x, t, i)[f(x, t, i) + u(x, t, i)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{trace}[g^T(x, t, i) V_{xx}(x, t, i) g(x, t, i)] \\ &\quad + \lambda [V(x + h(x, t, i), t, i) - V(x, t, i)] \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} V(x, t, j), \end{aligned}$$

$$\text{其中, } V_t(x, t, i) = \frac{\partial v(x, t, i)}{\partial t}, \quad V_{xx}(x, t, i) = \left(\frac{\partial^2 v(x, t, i)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n},$$

$$V_x(x, t, i) = \left(\frac{\partial v(x, t, i)}{\partial x_1}, \frac{\partial v(x, t, i)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial v(x, t, i)}{\partial x_n} \right).$$

3. 主要结果

令 $p \in (0, 1)$ 。本节将证明方程(1)的解是 p -阶矩有界的。

定理 若条件(1)成立, 则对所有的 $t_0 \geq 0$ 和 $T \geq 0$,

$$\sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + T + \delta} E|x(t)|^p \leq M_1^{\frac{p}{2}} E\|\varphi\|^2, \quad (3)$$

$$E\left(\sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + T + \delta} |x(t)|^p \right) \leq M_2^{\frac{p}{2}} E\|\varphi\|^2, \quad (4)$$

其中, $M_1 = M_1(p, \delta, T) = (1 + k\delta) e^{[2(L_1 + \lambda L_3) + L_2^2 + \lambda L_3^2 + 2K](T + \delta)}$,

$M_2 = M_2(p, \delta, T) = 5 \left[1 + L_1^2(T + \delta) + K^2(T + \delta) + 4L_2^2 + 2\lambda^2 L_3^2(T + \delta) + 8\lambda L_3^2 \right] (T + \delta) M_1$ 。

证明(1) 对 $|x(t)|^2$ 应用 Itô 公式, 由方程(1)可得

$$\begin{aligned}
d|x(t)|^2 &= 2\langle x(t), f(x(t), t, r(t)) + u(x(t-\delta), t, r(t)) \rangle dt \\
&\quad + 2\langle x(t), g(x(t), t, r(t)) \rangle d\omega(t) + |g(x(t), t, r(t))|^2 dt \\
&\quad + \left[|x(t) + h(x(t), t, r(t))|^2 - x^2 \right] dN(t) \\
&= 2\langle x(t), f(x(t), t, r(t)) + u(x(t-\delta), t, r(t)) \rangle dt \\
&\quad + 2\langle x(t), g(x(t), t, r(t)) \rangle d\omega(t) + |g(x(t), t, r(t))|^2 dt \\
&\quad + \lambda \left[h^2(x(t), t, r(t)) + 2x^T(t)h(x(t), t, r(t)) \right] dt \\
&\quad + \left[h^2(x(t), t, r(t)) + 2x^T(t)h(x(t), t, r(t)) \right] d\tilde{N}(t)
\end{aligned} \tag{5}$$

对(3)式两边同时取期望, 计算得

$$\begin{aligned}
E|x(t)|^2 &= E|x(t_0)|^2 + 2E \int_{t_0}^t x^T(s) f(x(s), s, r(s)) ds \\
&\quad + 2E \int_{t_0}^t x^T(s) u(x(s-\delta), s, r(s)) ds \\
&\quad + 2E \int_{t_0}^t |g(x(s), s, r(s))|^2 ds \\
&\quad + \lambda E \int_{t_0}^t \left[h^2(x(s), s, r(s)) + 2x^T(s)h(x(s), s, r(s)) \right] ds.
\end{aligned} \tag{6}$$

利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}
&2KE \int_{t_0}^t |x(s)||x(s-\delta)| ds \\
&\leq KE \int_{t_0}^t |x(s)|^2 ds + KE \int_{t_0}^t |x(s-\delta)|^2 ds \\
&= KE \int_{t_0}^t |x(s)|^2 ds + KE \int_{t_0-\delta}^{t-\delta} |x(\nu)|^2 d\nu \\
&= KE \int_{t_0}^t |x(s)|^2 ds + KE \int_{t_0-\delta}^{t_0} |x(\nu)|^2 d\nu + KE \int_{t_0}^{t-\delta} |x(\nu)|^2 d\nu \\
&\leq 2KE \int_{t_0}^t |x(s)|^2 ds + K\delta E \|\varphi\|^2.
\end{aligned} \tag{7}$$

将(7)代入到(6)中可得

$$\begin{aligned}
E|x(t)|^2 &\leq E|x(t_0)|^2 + \left[2(L_1 + \lambda L_3) + L_2^2 + \lambda L_3^2 + 2K \right] \int_{t_0}^t E|x(s)|^2 ds + K\delta E \|\varphi\|^2 \\
&\leq (1 + K\delta) E \|\varphi\|^2 + \left[2(L_1 + \lambda L_3) + L_2^2 + \lambda L_3^2 + 2K \right] \int_{t_0}^t \left(\sup_{t_0 \leq \nu \leq s} E|x(\nu)|^2 \right) ds.
\end{aligned} \tag{8}$$

从而

$$\sup_{t_0 \leq \nu \leq t_0 + T + \delta} E|x(\nu)|^2 \leq (1 + K\delta) E \|\varphi\|^2 + \left[2(L_1 + \lambda L_3) + L_2^2 + \lambda L_3^2 + 2K \right] \int_{t_0}^{t_0 + T + \delta} \left(\sup_{t_0 \leq \nu \leq s} E|x(\nu)|^2 \right) ds. \tag{9}$$

进一步利用 Gronwall 不等式得

$$\sup_{t_0 \leq \nu \leq t_0 + T + \delta} E|x(\nu)|^2 \leq (1 + K\delta) e^{\left[2(L_1 + \lambda L_3) + L_2^2 + \lambda L_3^2 + 2K \right] (T + \delta)} E \|\varphi\|^2 = M_1 E \|\varphi\|^2.$$

最后运用 Hölder 不等式, 进一步得

$$\sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + T + \delta} E|x(t)|^p \leq M_1^{\frac{p}{2}} E\|\varphi\|^p.$$

(2)由方程(1)可得

$$\begin{aligned} x(t) = & x(t_0) + \int_{t_0}^t [f(x(s-\delta), s, r(s)) + u(x(s-\delta), s, r(s))] ds \\ & + \int_{t_0}^t g(x(s), s, r(s)) d\omega(s) + \int_{t_0}^t h(x(s), s, r(s)) dN(s). \end{aligned} \quad (10)$$

利用 Hölder 不等式和条件(2)可得

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 \leq & 5|x(t_0)|^2 + 5\left|\int_{t_0}^t f(x(s), s, r(s)) ds\right|^2 + 5\left|\int_{t_0}^t u(x(s-\delta), s, r(s)) ds\right|^2 \\ & + 5\left|\int_{t_0}^t g(x(s), s, r(s)) d\omega(s)\right|^2 + 5\left|\int_{t_0}^t h(x(s), s, r(s)) dN(s)\right|^2 \\ \leq & 5|x(t_0)|^2 + 5(t-t_0)\int_{t_0}^t f^2(x(s), s, r(s)) ds + 5(t-t_0)\int_{t_0}^t u^2(x(s-\delta), s, r(s)) ds \\ & + 5\left|\int_{t_0}^t g(x(s), s, r(s)) d\omega(s)\right|^2 + 10\lambda^2(t-t_0)\int_{t_0}^t h^2(x(s), s, r(s)) ds \\ & + 10\left|\int_{t_0}^t h(x(s), s, r(s)) d\tilde{N}(s)\right|^2. \end{aligned}$$

利用 Doob 鞅不等式可得

$$\begin{aligned} & E\left(\sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + T + \delta} |x(t)|^2\right) \\ \leq & 5E|x(t_0)|^2 + 5(T+\delta)E\int_{t_0}^{t_0+T+\delta} f^2(x(s), s, r(s)) ds \\ & + 5(T+\delta)E\int_{t_0}^{t_0+T+\delta} u^2(x(s-\delta), s, r(s)) ds + 20E\int_{t_0}^{t_0+T+\delta} g^2(x(s), s, r(s)) ds \\ & + 10\lambda^2(T+\delta)E\int_{t_0}^{t_0+T+\delta} h^2(x(s), s, r(s)) ds + 40\lambda E\int_{t_0}^{t_0+T+\delta} h^2(x(s), s, r(s)) ds \\ \leq & 5E\|\varphi\|^2 + 5L_1^2(T+\delta)\int_{t_0}^{t_0+T+\delta} E|x(s)|^2 ds + 5K^2(T+\delta)\int_{t_0}^{t_0+T+\delta} E|x(s-\delta)|^2 ds \\ & + 20L_2^2\int_{t_0}^{t_0+T+\delta} E|x(s)|^2 ds + 40\lambda L_3^2 E\int_{t_0}^{t_0+T+\delta} E|x(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

利用(3), 进一步可得

$$\begin{aligned} & E\left(\sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + T + \delta} |x(t)|^2\right) \\ \leq & 5\left[1 + L_1^2(T+\delta) + K^2(T+\delta) + 4L_2^2 + 2\lambda^2 L_3^2(T+\delta) + 8\lambda L_3^2\right] \times (T+\delta)M_1 E\|\varphi\|^2 \\ =: & M_2 E\|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

再次运用Hölder不等式可得

$$E\left(\sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + T + \delta} |x(t)|^2\right) \leq M_3^{\frac{p}{2}} E\|\varphi\|^2.$$

证毕。

基金项目

国家自然科学基金项目(No. 11901398)。

参考文献

- [1] Mao, X. (1997) Stochastic Differential Equations and Application. Horwood Publication, Chichester.
- [2] Mao, X. and Yuan, C. (2006) Stochastic Differential Equations with Markovian Switching. Imperial College Press, London.
- [3] Arnold, L. (2007) Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. World Scientific, Singapore.
- [4] Buckwar, E. (2000) Introduction to the Numerical Analysis of Stochastic Delay Differential Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **125**, 297-307. [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(00\)00475-1](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00475-1)
- [5] Rodkina, A. and Basin, M. (2006) On Delay-Dependent Stability for a Class of Nonlinear Stochastic Delay-Differential Equations. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, **18**, 187-197. <https://doi.org/10.1007/s00498-006-0163-1>
- [6] Ngoc, P. (2020) New Criteria for Mean Square Exponential Stability of Stochastic Delay Differential Equations. *International Journal of Control*, **2020**, 1-17.
- [7] Cao, W. and Zhu, Q. (2021) Stability Analysis of Neutral Stochastic Delay Differential Equations via the Vector Lyapunov Function Method. *Applied Mathematics and Computation*, **405**, Article ID: 126257.
- [8] Wang, Z., Li, X. and Lei, J. (2014) Moment Boundedness of Linear Stochastic Delay Differential Equations with Distributed Delay. *Stochastic Process and Application*, **124**, 586-612. <https://doi.org/10.1016/j.spa.2013.09.002>
- [9] Wang, Z., Li, X. and Lei, J. (2017) Second Moment Boundedness of Linear Stochastic Delay Differential Equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **19**, 2963-2991.
- [10] Xu, L., Dai, Z. and He, D. (2018) Exponential Ultimate Boundedness of Impulsive Stochastic Delay Differential Equations. *Applied Mathematics Letters*, **85**, 70-76. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.05.019>
- [11] Wu, S., Dong, H., and Meng, X. (2004) p-Moment Stability of Stochastic Differential Equations with Jumps. *Applied Mathematics and Computation*, **152**, 505-519. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(03\)00573-3](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00573-3)
- [12] Liu, D., Yang, G. and Zhang, W. (2011) The Stability of Neutral Stochastic Delay Differential Equations with Poisson Jumps by Fixed Points. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **235**, 3115-3120. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.10.030>
- [13] Wei, Y. and Yang, Q. (2018) Dynamics of the Stochastic Low Concentration Trimolecular Oscillatory Chemical System with Jumps. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **59**, 396-408. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.11.019>
- [14] Anderson, W. (1991) Continuous-Time Markov Chains. Springer, Berlin.