Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(10), 1629-1635
Published Online October 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1210176

Hans汉斯

中学基本初等函数导数的高观点证明

刁玉存[1,2]，徐苏苏[1,2*]，徐志恒[1,2]，蒋依夏[1,2]

[1]伊犁师范大学数学与统计学院，新疆 伊宁
[2]伊犁师范大学应用数学研究所，新疆 伊宁

收稿日期：2022年9月11日；录用日期：2022年10月10日；发布日期：2022年10月18日

摘　要

初等数学作为高等数学层面上的特例，往往不一定对所有数学概念、命题和数学系统满足逻辑和结果的无矛盾性。本文以高等数学范畴的两个重要极限给出对指数函数、对数函数、正弦函数和余弦函数的导数的证明，提高和拓宽学生的思维视角和逻辑起点，并利用高观点的数学思想方法来审视中学教学。

关键词

初等数学，高等数学，特例，重要极限，高观点

A High View Proof of the Derivative of Basic Elementary Functions in Middle School

Yucun Diao[1,2], Susu Xu[1,2*], Zhiheng Xu[1,2], Yixia Jiang[1,2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang
[2]Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yining Xinjiang

Received: Sep. 11th, 2022; accepted: Oct. 10th, 2022; published: Oct. 18th, 2022

Abstract

As a special case of higher mathematics, elementary mathematics often does not necessarily satisfy the contradiction-free logic and results for all mathematical concepts, propositions and mathematical systems. This paper gives the proof of the derivative of exponential function, logarithmic function, sine function and cosine function with two important limits of the category of higher mathematics, so as to improve and broaden the students' thinking perspective and logical starting point, and use the mathematical thinking method of high point of view to examine middle school teaching.

*通讯作者。

文章引用：刁玉存，徐苏苏，徐志恒，蒋依夏．中学基本初等函数导数的高观点证明[J]．理论数学，2022，12(10): 1629-1635. DOI: 10.12677/pm.2022.1210176

Keywords

Elementary Mathematics, Advanced Mathematics, Exceptions, Important Limit, High Opinion

1. 引言

基本初等函数指的是指数函数、对数函数、幂函数和三角函数，很多复杂的函数都是通过这些基本初等函数通过加减乘除运算得到。导数是数学分析中的一个内容，为保证导数概念教学的教育形态，采用归纳的思想呈现方式置于选择性必修第二册中，课本上仅详细介绍了幂函数的导数公式，其余基本初等函数的导数公式直接给出。

从知识层面来看，导数这一概念是高中数学和大学数学的一个接力点。从现阶段的改革来看，初等数学和高等数学的内容衔接与联系高度紧密，改变了以往初等数学与高等数学结构的双脱节现象[1]，高观点的数学思想方法从原来的高深不接地气到现在逐步被一线教育工作者接受，这是时代的特征，也是数学教育不断发展进步的表现。

2. 高观点思想的内涵及理论基础

德国数学家菲力克斯•克莱因在其《高观点下的初等数学》中指出从事基础数学的教师应该高屋建瓴，需要有高阶的思想意识来指导教学实践活动，只有观点高了，数学问题才会显得简明[2]。中学数学教师应具备更高更广的知识体系去理解初等数学教育领域的知识和概念。“高观点”是指用经典高等数学和现代数学的知识、思想和方法来分析和解决初等数学知识问题，其作为一种数学思想方法体现了知识水平的高度跨越和内容结构上的深度结合，其强调知识结构上的深化、简化和统一，“高观点”与其说是高等数学指导下的初等数学，不如说是初等数学知识在高观点下的重现[3]。一般而言，高等数学是对初等数学的高度抽象，抽象性是数学的显著性之一。数学内部有着严密的逻辑体系，具有内部结构上的联结性，初等数学的概念用“等势抽象”的方式，把某一类数学概念进一步抽象为更上位的概念[4]。

高观点意在指出初等数学的知识一种有着现代数学的背景，是现代数学结构背景上的特例，许多初等数学未能解决的问题，却能够利用高等数学知识加以求解，甚至说高等数学对初等数学教学具有指导意义高观点作为一种数学思想方法，是立德树人根本任务的高度体现，是当前“四基”教学理念的落实[1]。数学思想蕴涵在数学知识形成、发展和应用的过程中，是数学知识和方法在更高层次上的抽象与概括，数学思想是数学科学发生、发展的根本，是探索研究数学所依赖的基础，也是数学课程教学的精髓，内涵十分丰富。日本著名教育家米山国藏曾提到：“学生所学的数学知识，在进入社会后几乎没有什么机会应用，因而这种作为知识的数学，通常在走出校门后不到一两年就忘掉了。然而不管他们从事什么工作，唯有深深铭刻于头脑中的数学思想和方法等随时地发生作用，使他们受益终身”。

3. 高观点提出的现实背景

3.1. 认知发展理论

瑞士心理学家皮亚杰(Piaget)从纵向上对人的认知发展做了详细的研究，他认为人的思维发展不是直

线式上升的，而是整体呈现阶梯状的阶段发展，皮亚杰(Piaget)将青少年的认知发展阶段划分为四个阶段，即：感知运动阶段、前运算阶段、具体运算阶段和形式运算阶段[1]。皮亚杰认为每一个儿童均会经历这四种阶段，不同的年龄阶段呈现不同阶段的认知水平。认知主义理论是通过反映学生学习规律的学习理论，此种观点主要指出了学生是学习的对象，学生获取知识要经历感知、注意、记忆、理解、问题解决的信息交换过程。

3.2. 教育形态的要求

数学本身的发展、学校数学教育的需要及学生认知阶段的规律性和年龄特征，数学被划分为不同的数学分支和不同的数学教育阶段，数学知识的呈现有其学术形态和教育形态。

数学的学术形态表现为一种冰冷的美丽，这是因为数学是对外部世界的本质规律的抽象表达，数学具有推理性和抽象性，因此数学呈现出一种抽象色彩的形式美，是一种冰冷的结果。而数学的教育形态则应是一种火热的思考，任何一个具有公理性性质的冰冷的数学符号、数学公式、数学定理在被发现和证明的过程中往往经历了思维上的抽象和推理，这种思考是火热的有意义的创造过程。

数学教学的目标之一即把数学知识的学术形态转换为教育形态，应该将数学的形式化链条恢复为当初数学家发明创造的火热的思考，只有经历有价值、有意义的火热的思考才能理解高认知水平的冰冷的美丽的抽象的数学形式美。

3.3. 高观点下中学数学研究的必要性

3.3.1. 实施《普通高中课程标准(2017 年版)》的需要

普通高中数学课程标准(2017 年版) [5]的基本理念是高中数学课程以学生发展为本，落实立德树人根本任务，培育科学精神和创新意识，提升数学学科素养，使得人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上的到不同的发展。这就要求数学教育在对不同数学现实和不同数学特长的学生就要因材施教。

普通高中课程标对必修板块中的函数主题的给出的建议课时最多，建议课时为 52 课时，而基本初等函数内容正是函数主题的核心内容。高中板块中的选择性必修和选修中部分高等数学背景的知识概念下放至高中学习，如导数、积分等，这也从侧面反映出，近年来，数学教育正在摆脱以往中学数学教育与高等数学教育双脱节现象，而追求高初结合思想视域下的数学整体结构观的教学。

3.3.2. 高考命题和自主命题机制的需要

高考命题还应依据人才选拔要求，发挥数学高考的选拔功能。近几年高等数学背景下的高考数学命题机制越来越热门，高等数学范畴的命题因子较多地渗透到高考实体中。一个原因是高考试题要考察学生的创新应用能力，就需要有一个公平和具有区分度的知识背景，另外一个原因是，当前的课程标准的制定、教材的编排都体现出了高初结合思想的理念导向。如：

Table 1. Summary of propositions and time zones in the background of advanced mathematics
表 1. 高等数学为背景的命题及时区汇总

以高等数学为背景的高考命题	时区
以矩阵的定义命题	2003 年北京
以行列式的定义命题	07 福建 12
以微分中值定理命题	06 全国卷理 21、06 四川卷 22、06 年北京卷 6
闭区间套定理命题	06 福建 16
以数学史为背景的命题	22 浙江省高考科目考试绍兴市适应性试卷 第Ⅱ卷 11
以概率与解析几何“交汇”命题	2008 年江苏、上海卷理

表 1 汇总了部分在高考试题中的高等数学背景的命题，涉及高等代数背景、数学分析背景、数学史背景、概率论与数学里统计及解析几何背景的命题范畴，高观点视域下的命题观也在随着数学教育学科的发展慢慢发生转变。

除此之外，自主招生考试在基于教材但又不受制于教材，规避模式越套路摒弃题海战术，挖掘潜能和创新，注重素养和选拔的原则下，自主命题数学科的命题也将命题选材聚焦至高等数学范畴，高观点的应用越来越受到关注和重视。

4. 初等函数导数的高观点证明

初等函数在高中版最新的教材中以特殊形式的幂函数为例，初等数学有着极强的高等数学背景，与高等数学是特殊与一般的关系，利用高等数学这种数学分析内容中的两个重要极限来深度探讨基本初等函数导数的证明方法，即 $\lim\limits_{t\to 0}=(t+1)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$， $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。

4.1. 对数函数 $f(x)=\log_a x$ ($a>0$，且 $a\neq 1$， $x>0$)，则 $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$

命题 1　$f(x)=\log_a x$ ($a>0$，且 $a\neq 1$， $x>0$)，则 $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$

证明：

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)\right]\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\left[\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)\right]\right\}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\log_a(x+\Delta x)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]
\end{aligned}
$$

令 $t=\frac{\Delta x}{x}$。且当 $\Delta x\to 0$ 时， $t\to 0$，所以原极限可以表示为：

$$
f'(x)=\lim\nolimits_{t\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]
$$

又因为 $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$ 所以 $f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\log_a\mathrm{e}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln\mathrm{e}}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$。

评注：指数函数的导数证明其本质上运用了定义法，接着利用换元法，将t的取值范围求出来，接着通过运算转换变形，再利用数学分析中的第一个重要极限 $\lim_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$，去求解问题。

4.2. 对数函数 $f(x)=\log_a x$ ($a>0$，且 $a\neq 1$， $x>0$)，则 $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$

命题 2　$f(x)=\log_a x$　($a>0$，且 $a\neq 1$， $x>0$)， $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$

证明：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+x)-f(x)}{x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+x)-\log_a x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x+x}{x}\right)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\log_a\left(\frac{x+x}{x}\right)\right]$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x}\log_a\left(\frac{x+x}{x}\right)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\left[\frac{x}{x}\log_a\left(\frac{x+x}{x}\right)\right]\right\}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\log_a\left(\frac{x+x}{x}\right)^{\frac{x}{x}}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{x}}\right]$$

令 $t=\frac{1}{x}$。且当 $\Delta x\to 0$ 时，$t\to 0$，所以原极限可以表示为：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]$$

又因为 $\lim_{\Delta x\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$ 所以 $f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\log_a\mathrm{e}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln\mathrm{e}}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$

评注：对数函数的导数证明其本质上运用了定义法，接着利用换元法，将t的取值范围求出来，接着运算转换变形，再利用数学分析中的第一个重要极限 $\lim_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$，去求解问题。

4.3. 正弦函数 $f(x)=\sin x$ 的导数公式证明

命题 若 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x$。

证明：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\sin\Delta x+(\sin x\cos\Delta x-\sin x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\sin\Delta x+\sin x(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\cdot\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{\Delta x}{2}\right)+\sin x\cdot\left[\left(1-2\sin^2\frac{\Delta x}{2}\right)-1\right]}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\left(\cos x\cos\frac{\Delta x}{2}\right)-2\sin x\sin^2\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\cos x\cos\frac{x}{2}-\sin x\sin\frac{x}{2}\right)}{\vartriangle x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right]$$

又 $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1$。所以 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$，所以原命题得证。

评注：三角函数的导数证明其本质上运用了定义法，接着通过三角函数变换公式推导，再利用数学分析中的第二个重要极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，去求解问题。

4.4. 余弦函数 $f(x)=\cos x$ 的导数公式证明

命题 若 $f(x)=\cos x$，则 $f'(x)=-\sin x$。

证明：

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\cos x\cos\Delta x-\sin x\sin\Delta x)-\cos x}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\cos x\cos\Delta x-\cos x)-\sin x\sin\Delta x}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x(\cos\Delta x-1)-\sin x\sin\Delta x}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\cdot\left[\left(1-2\sin^2\frac{\Delta x}{2}\right)-1\right]-\sin x\cdot\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\Delta x}{2}\cos x-2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\left(\sin x\cos\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\left(\sin\frac{\Delta x}{2}\cos x-\cos\frac{\Delta x}{2}\sin x\right)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(\frac{\Delta x}{2}-x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\sin\left(\frac{\Delta x}{2}-x\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right]\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(\frac{\Delta x}{2}-x\right)=\sin(-x)=-\sin x
\end{aligned}
$$

评注：三角函数的导数证明其本质上运用了定义法，接着通过三角函数变换公式推导，再利用数学分析中的第二个重要极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，去求解问题。

5. 总结

基本初等函数的导数证明有着高等数学背景，在中学阶段部分初等数学知识解不出来的问题就需要用到高等数学的知识，促进中学课堂教学内涵式与外延式发展，让中学课堂不在过分拘泥于特殊形态的教育模式，而让学生深度感知数学知识本身在结构上的联结性和知识及学科上的联系性，体验从低阶至高阶的思维过渡。可以更好地指导教师合理组织教材和深度把握教材，可以训练学生思维和实践创新教育。

基金项目

“高观点”下高中数学导研式教学模式研究(项目编号：2021YSYB061)。

参考文献

[1] 陈建华. 高观点下初等数学研究途径再探[J]. 阴山学刊(自然科学版), 2016, 30(4): 5-9.
[2] 菲利克斯·克莱因. 高观点下的初等数学[M]. 舒湘芹, 等, 译. 上海: 复旦大学出版社, 2008.
[3] 马吴艳. “高观点”下的数学深度学习[J]. 数学教学通讯, 2019(1): 63-64.
[4] 李士锜, 吴颖康. 数学教学心理学[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2011.
[5] 史宁忠, 王尚志. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)解读[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020.