Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(10), 1649-1654
Published Online October 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1210178

双曲 Kenmotsu 流形上的近 Yamabe 孤立子

韩和龙*，刘建成†

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2022年9月13日；录用日期：2022年10月12日；发布日期：2022年10月20日

摘 要

利用 **Lie** 导数算子, 协变微分算子以及共形向量场的性质, 证明在具有双曲 **Kenmotsu** 结构的近 **Yamabe** 孤立子中, 如果存在光滑函数 f, 使得切触$1-$形式 η 不变, 则其势向量场是 **Killing** 向量场。

关键词

双曲 **Kenmotsu** 流形，共形向量场，近 **Yamabe** 孤立子，**Killing** 向量场

Almost Yamabe Solitons on Hyperbolic Kenmotsu Manifolds

Helong Han*, Jiancheng Liu†

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Sep. 13^{th}, 2022; accepted: Oct. 12^{th}, 2022; published: Oct. 20^{th}, 2022

* 第一作者。
† 通讯作者。

文章引用: 韩和龙, 刘建成. 双曲 **Kenmotsu** 流形上的近 **Yamabe** 孤立子[J]. 理论数学, 2022, 12(10): 1649-1654.
DOI: 10.12677/pm.2022.1210178

Abstract

By using the properties of Lie-derivative operator, covariant derivative operator and conformal vector field, we prove that in almost Yamabe solitons with hyperbolic Kenmotsu structrue, if there exists a smooth function f that leaves the contact 1-form η invariant, then its potential vector fields are Killing vector fields.

Keywords

Hyperbolic Kenmotsu Manifold, Conformal Vector Field, Almost Yamabe Soliton, Killing Vector Field

1. 引言及主要结果

设 (M^n, g) 是 n 维伪黎曼流形, 记 $\mathscr{X}(M)$ 是 M 上光滑切向量场的集合. 如果存在 $V \in \mathscr{X}(M)$ 和一个常数 λ, 使得

$$\frac{1}{2}\mathscr{L}_V g = (\lambda - r)g,$$

则 M^n 称为一个 Yamabe 孤立子, 此时 V 称为 Yamabe 孤立子的势向量场, λ 称为孤立子常数, $\mathscr{L}_V g$ 表示度量 g 沿势向量场 V 方向的 Lie 导数, r 表示 M^n 的数量曲率. 在 $\lambda > 0 (= 0, < 0)$ 时, 则称 Yamabe 孤立子是收缩(稳定, 扩张)的.

在不同曲率条件下, Yamabe 孤立子已经被许多学者广泛研究([1], [2], [3], [4]), 特别地, Hsu 在 [5] 中证明了任意紧致 Yamabe 孤立子的数量曲率一定是常数. 而 Yamabe 孤立子的推广近 Yamabe 孤立子在文献 [6] 中被 Barbosa-Ribeiro 介绍如下:

定义 1 设 (M, g) 是一个伪黎曼流形, 如果存在 M 上切向量场 V 和光滑函数 λ , 使得

$$\frac{1}{2}\mathscr{L}_V g = (\lambda - r)g, \tag{1}$$

则称 M 为一个近 Yamabe 孤立子, 记为 (g, V, λ). 显然, 当 λ 为常数时, 近 Yamabe 孤立子即为

Yamabe 孤立子. 同样地, 当 $\lambda > 0 (= 0, < 0)$ 时, (g, V, λ) 称为是收缩(稳定, 扩张)的.

另一方面, Upadhyay 和 Dube [7] 提出了近切触双曲结构的概念, 同时被其他学者进一步研究. 在1972年, Kenmotsu [8] 研究了满足一些特殊条件的切触黎曼流形的分类, 并将这种流形命名为 Kenmotsu 流形. Kenmotsu 证明了 Kenmotsu 流形局部上是一个区间 I 和一个具有卷积函数 $f(t) = se^t$ 的 Kähler 流形 M 所形成的卷积 $I \times_f M$, s 是非零常数. 在 [9] 中, Ghosh 研究了 Kenmotsu 流形中的近 Ricci 孤立子和近 Yamabe 孤立子, 基于此, 本文讨论双曲 Kenmotsu 流形上近 Yamabe 孤立子的势向量场的性质, 得到下面主要定理.

定理 1 设 $(M^{2n+1}, g, V, \lambda)$ 是 $(2n+1)$ 维具有双曲 Kenmotsu 结构的一个近 Yamabe 孤立子, 如果存在光滑函数 f, 使得切触1−形式 η 不变, 即 $\mathscr{L}_V \eta = f\eta$, 则 V 是 Killing 向量场.

本文参照文献 [9] 给出了双曲 Kenmotsu 流形上的近 Yamabe 孤立子的相关性质. 其结构大致分为三个部分. 首先介绍了一些关于近 Yamabe 孤立子的研究现状并给出了本文的主要定理, 其次介绍了双曲 Kenmotsu 流形的概念及其性质, 为文中定理的证明做准备, 最后则给出了本文定理的证明过程.

2. 预备知识及引理

设 M^{2n+1} 是一个 $2n+1$ 维光滑流形, 如果存在一个 (1,1) 型张量场 ϕ, 一个切向量场 ζ 和切触1−形式 η 使得

$$\phi^2 = I + \eta \otimes \zeta, \ \ \eta(\zeta) = -1, \tag{2}$$

其中 I 是 M^{2n+1} 的切丛上的恒等自同态, $\otimes$ 代表张量积, 则称 M^{2n+1} 具有近切触双曲结构, 记为 (ϕ, ζ, η). 此时 M^{2n+1} 加上一个近切触双曲结构就称为一个近切触双曲流形, 记为 $(M^{n+1}, \phi, \zeta, \eta)$. 如果一个近切触双曲流形 M^{2n+1} 上存在伪黎曼度量 g 满足

$$g(\phi X, \phi Y) = -g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad \forall X, Y \in \mathscr{X}(M),$$

则称 M^{2n+1} 是近切触双曲伪度量流形, (ϕ, ζ, η, g) 称为近切触双曲伪度量结构. 更进一步对 $\forall X, Y \in \mathscr{X}(M)$ 有

$$(\nabla_X \phi)Y = g(\phi X, Y)\zeta - \eta(Y)\phi(X)$$

成立, 则称其为双曲 Kenmotsu 流形, 此时有以下等式成立 ([10])

$$\nabla_X \zeta = -X - \eta(X)\zeta, \tag{3}$$

$$(\nabla_X \eta)Y = g(\phi X, \phi Y) = -g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

$$R(X, Y)\zeta = \eta(Y)X - \eta(X)Y,$$

$$R(X, \zeta)\zeta = -X - \eta(X)\zeta, \tag{4}$$

$$R(\zeta, X)Y = g(X, Y)\zeta - \eta(Y)X,$$

$$S(X,\zeta)=2n\eta(X),\ \ S(\zeta,\zeta)=-2n,\quad Q\zeta=2n\zeta. \tag{5}$$

其中 R, S 和 Q 分别是 M^{2n+1} 上的曲率张量, Ricci 张量和 Ricci 算子, 且 $S(X,Y)=g(QX,Y)$.

定义 2 伪黎曼流形 (M^n,g) 上的向量场 V 如果满足

$$\mathscr{L}_V g=2\rho g,$$

则称 V 是一个共形向量场, 其中 ρ 是 M 上的光滑函数, 称为 V 的共形因子. 如果 $\rho=0$, 则 V 是 Killing 向量场. 显然在一个近 Yamabe 孤立子中, V 是以 $\rho=(r-\lambda)$ 为共形因子的共形向量场.

另外为了证明本文的结论, 我们需要下面的引理(见 [11]).

引理 1 对在 $2n+1$ 维黎曼流形 M 上的一个共形向量场 V, 有下列公式成立

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_V R)(X,Y)Z=&g(\nabla_X D\rho,Z)Y-g(\nabla_Y D\rho,Z)X\\&+g(X,Z)\nabla_Y D\rho-g(Y,Z)\nabla_X D\rho,\end{aligned} \tag{6}$$

$$(\mathscr{L}_V S)(X,Y)=(1-2n)g(\nabla_X D\rho,Y)+(\Delta\rho)g(X,Y), \tag{7}$$

$$\mathscr{L}_V r=-2r\rho+4n\Delta\rho,$$

其中 X, Y, Z 是 M 上的任意向量场, 且 $\Delta=-\mathrm{div}D$ 是关于度量 g 的 Laplacian 算子, div 是散度算子, D 是梯度算子.

3. 主要定理的证明

定理 1 的证明 根据方程 (1) 和定义 1 可以说势向量场 V 是共形的, 因此 $\rho=(\lambda-r)$. 对 $\eta(\zeta)=g(\zeta,\zeta)=-1$ 求沿 V 方向的 Lie 导数, 用方程 (1) 和 (2) 得到

$$(\mathscr{L}_V\eta)\zeta=-\eta(\mathscr{L}_V\zeta)=-\rho.$$

此时假设势向量场 V 使得切触形 η 不变, 即 $\mathscr{L}_V\eta=f\eta$, $f\in C^\infty(M)$, 则有 $(f\eta)\zeta=-\rho$, 得到 $f=\rho$. 于是

$$\mathscr{L}_V\eta=\rho\eta,\quad \mathscr{L}_V\zeta=-\rho\zeta. \tag{8}$$

对 (5) 式中的第一式求沿 V 方向的 Lie 导数, 并利用其性质有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_V S(X,\zeta)=&(\mathscr{L}_V S)(X,\zeta)+S(\mathscr{L}_V X,\zeta)+S(X,\mathscr{L}_V\zeta)\\&=(\mathscr{L}_V S)(X,\zeta)+g(\mathscr{L}_V X,Q\zeta)+S(X,\mathscr{L}_V\zeta)\\&=(\mathscr{L}_V S)(X,\zeta)+2ng(\mathscr{L}_V X,\zeta)+S(X,\mathscr{L}_V\zeta)\\&=2n(\mathscr{L}_V\eta)X+2n\eta(\mathscr{L}_V X),\end{aligned}$$

从而得到

$$(\mathscr{L}_V S)(X,\zeta)+S(X,\mathscr{L}_V\zeta)=2n(\mathscr{L}_V\eta)X.$$

利用 (8) 式可以得到

$$(\mathscr{L}_V S)(X,\zeta)=4n\rho\eta(X).$$

同时令 $Y=\zeta$ 代入 (7) 式中, 有

$$g(\nabla_X D\rho,\zeta)=\sigma\eta(X), \tag{9}$$

其中 $\sigma=\frac{4n\rho-\Delta\rho}{1-2n}$. 另一方面在 (6) 式中令 $Y=Z=\zeta$ 得到

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_V R)(X,\zeta)\zeta=&g(\nabla_X D\rho,\zeta)\zeta-g(\nabla_\zeta D\rho,\zeta)X\\&+\eta(X)\nabla_\zeta D\rho+\nabla_X D\rho.\end{aligned} \tag{10}$$

给 (4) 式求沿 V 方向的 Lie 导数并将 (8) 式代入得

$$(\mathscr{L}_V R)(X,\zeta)\zeta=2\rho(-X-\eta(X)\zeta). \tag{11}$$

因此将 (9) 式和 (11) 式代入 (10) 式中有

$$\nabla_X D\rho=2\rho(-X-\eta(X)\zeta)-\sigma X. \tag{12}$$

在 (12) 式中, 令 $X=e_i$, 并对 i 求和有 $\Delta\rho=4n\rho$, 从而 $\sigma=0$. 因此有

$$\nabla_X D\rho=2\rho(-X-\eta(X)\zeta). \tag{13}$$

另外对 $\mathscr{L}_V\eta=\rho\eta$ 两边求外微分 d (d 是外微分算子), 注意 d 和 $\mathscr{L}_V$ 可交换顺序, 于是有

$$\mathscr{L}_V d\eta=d\rho\wedge\eta.$$

因为 $d\eta$ 在 M 中是为零的, 所以有

$$d\rho=(\zeta\rho)\eta.$$

给上式进行外微分, 因为 $d^2=0$, 所以对 $\forall X\in\mathscr{X}(M)$ 可以得到

$$X(\zeta\rho)=-\zeta(\zeta\rho)\eta(X).$$

此时, 利用 (3) 式得到 $\nabla_\zeta\zeta=0$, 且在 (13) 式中令 $X=\zeta$ 可以得出 $\nabla_\zeta D\rho=0$, 故对 $\zeta\rho=g(\zeta,D\rho)$ 求沿 ζ 方向的协变导数有 $\zeta(\zeta\rho)=0$, 即得到 $\zeta\rho$ 是一个常数. 于是令 $D\rho=K\zeta$ (其中 $K=\zeta\rho$), 对其求沿 X 方向的协变导数, 根据 (3) 式有

$$\nabla_X D\rho=K(-X-\eta(X)\zeta).$$

将上式与 (13) 式相比较可以看出 $K=2\rho=constant$, 故 $\rho=constant$, 进一步得到 $\rho=0$, 因此 V

是 Killing 向量场, 定理证毕.

基金项目

国家自然科学基金资助项目 (12161078)，甘肃省高等学校创新能力提升项目 (2019B-045)，甘肃省科技计划资助项目 (20JR5RA515)。

参考文献

[1] Cao, H.D., Sun, X. and Zhang, Y. (2012) On the Structure of Gradient Yamabe Solitons. *Mathematical Research Letters*, **19**, 767-774. https://doi.org/10.4310/MRL.2012.v19.n4.a3

[2] Daskalopoulos, P. and Sesum, N. (2013) The Classification of Locally Conformally Flat Yamabe Solitons. *Advances in Mathematics*, **240**, 346-369. https://doi.org/10.1016/j.aim.2013.03.011

[3] Chen, B.Y. and Deshmukh, S. (2018) Yamabe and Quasi-Yamabe Solitons on Euclidean Submanifolds. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **15**, Article No. 194. https://doi.org/10.1007/s00009-018-1237-2

[4] Ma, L. and Cheng, L. (2011) Properties of Complete Non-Compact Yamabe Solitons. *Annals of Global Analysis and Geometry*, **40**, 379-387. https://doi.org/10.1007/s10455-011-9263-3

[5] Hsu, S.Y. (2018) A Note on Compact Gradient Yamabe Solitons. *Mathematical Analysis and Applications*, **388**, 725-726. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.09.062

[6] Barbosa, E. and Ribeiro, E. (2013) On Conformal Solutions of the Yamabe Flow. *Archiv der Mathematik*, **101**, 79-89. https://doi.org/10.1007/s00013-013-0533-0

[7] Upadhyay, M.D. and Dube, K.K. (1976) Almost Contact Hyperbolic (f, g, η, ξ)-Structure. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, **28**, 13-15. https://doi.org/10.1007/BF01902485

[8] Kenmotsu, K. (1972) A Class of Almost Contact Riemannian Manifolds. *Tohoku Mathematical Journal*, **24**, 93-103. https://doi.org/10.2748/tmj/1178241594

[9] Ghosh, A. (2021) Ricci Almost Soliton and Almost Yamabe Soliton on Kenmotsu Manifold. *Asian-European Journal of Mathematics*, **14**, 4-20. https://doi.org/10.1142/S1793557121501308

[10] Pankaj, S.K. and Chaubey, G.A. (2021) Yamabe and Gradient Yamabe Solitons on 3-Dimensional Hyperbolic Kenmotsu Manifolds. *Differential Geometry-Dynamical Systems*, **23**, 176-184.

[11] Yano, K. (1970) Integral Formulas in Riemannian Geometry. Marcel Dekker, New York.