Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(10), 1714-1719
Published Online October 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1210186

不定积分换元法的使用条件及推广

陈春宝

上海海事大学文理学院，上海

收稿日期：2022年9月18日；录用日期：2022年10月17日；发布日期：2022年10月24日

摘 要

不定积分换元法是最为常用的积分方法，本文讨论了换元法使用的充分条件，针对第一类和第二类换元法，描述了不满足条件可能引起的错误。有些积分采用常规的换元法比较麻烦，甚至无法求解，本文受定积分几何应用求参数方程给出的曲线弧长方法以及双曲函数恒等变换的启发，增加了换元方法，如双曲代换、参数方程及欧拉代换等换元方法，从而解决了一类带有根式和由隐函数方程确定函数的不定积分，推广了一些函数的不定积分换元方法。

关键词

不定积分换元法，三角代换，双曲代换，参数方程

Application Conditions and Popularization of the Indefinite Integral Element Replacement Method

Chunbao Chen

College of Arts and Sciences, Shanghai Maritime University, Shanghai

Received: Sep. 18th, 2022; accepted: Oct. 17th, 2022; published: Oct. 24th, 2022

Abstract

The indefinite integral substitution method is the most commonly used integration method. This paper discusses the sufficient conditions for the use of the substitution method, and describes the possible errors caused by not meeting the conditions for the first and second kinds of substitution methods. Some integrals are troublesome and even can't be solved by using conventional substitution methods. Inspired by the method of curve arc length given by the application of parametric

文章引用：陈春宝．不定积分换元法的使用条件及推广[J]．理论数学, 2022, 12(10): 1714-1719.
DOI: 10.12677/pm.2022.1210186

equation in definite integral geometry and hyperbolic function identity transformation, this paper adds substitution methods, such as hyperbolic substitution, parametric equation and Euler substitution, so as to solve a class of indefinite integrals with roots and functions determined by implicit function equations. In this paper, the method of indefinite integral transformation of some functions is generalized.

Keywords

Indefinite Integral Substitution Method, Trigonometric Substitution, Hyperbolic Substitution, Parametric Equation

1. 引言

高等数学不定积分的换元法是计算积分的常用方法，通常有以下几种方法，第一种，第一类换元法，也叫凑微分法，$\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x=\int f(u(x))\mathrm{d}u(x)=F(u(x))+C$，其中 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的原函数，$u=u(x)$ 可导。第二种，不定积分的第二类换元法，其常见的第二类换元法有：1) 三角代换，如 x = asin$t$，x = atan$t$，x = asec$t$ 等，应用对象通常是被积函数中含有二次三项式开平方根，如计算不定积分 $\int\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$，可令 $x=\sin t$，$\sqrt{1-x^2}=\cos t$，$\int\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\csc^2 t\mathrm{d}t=-\cot t+C=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$。2) 根幂代换如计算不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$。

$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=\int\frac{1}{x^2-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$，令 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$，$x=\frac{t^3-1}{t^3+1}=1-\frac{2}{t^3+1}$，代入原式得 $\int-\frac{3}{2}\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}t+C=-\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C$。3) 倒代换 $x=t^{-1}$，如计算不定积分 $\int\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$，$x=t^{-1}$，$\mathrm{d}x=-t^{-2}\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x&=-\int\frac{t\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t^2=-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\sqrt{1+t^4}\right)+C\\&=-\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{1+x^4}\right)+\ln|x|+C\end{aligned}$$

，以上三种代换是通常教科书上推荐的方法，很多作者都有讨论，武文娟讨论了第一换元法求不定积分的技巧[1]；王振福在不定积分换元法分类运算作了研究[2]；张煜银，田旭昌在不定积分第二类换元法的解题方法上作了探究[3]。但是针对换元法使用的条件描述的不多，本文将从实例出发，进一步强调换元法需要满足的条件。并在满足条件的基础上推广一些不常用的换元方法双曲代换，参数方程代换及欧拉代换，可以更全面求解被积函数满足一定条件下的不定积分。

2. 不定积分换元法使用的充分条件

不定积分换元法的使用有一定的要求，原函数存在定理[4]：当被积函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续时其原

函数一定存在，且其原函数的导函数连续。

2.1. 第一类换元法的条件

在第一类换元法中，由于没有真正换元，而是选用凑微分法，就有可能忽略换元函数的连续性，或只考虑了被积函数的连续性，没关注原函数导函数的连续性，导致计算出来的不定积分发生错误。如计算不定积分 $\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$ 时采用的第一类换元 $u=x-\frac{1}{x}$，

$$\begin{aligned}\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x&=\int\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)=\int\frac{1}{2+u^2}\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)+C\end{aligned}$$

，这个第一类换元法就没有考虑使用条件，尽管积分过程用起来比较方便，但出现了差错，显然被积函数是连续的，但原函数在 $x=0$ 不连续，这个解答自然是错误的。所以使用换元法时要考虑连续性，由于被积函数连续，所以其原函数也一定连续，在分段点 $x=0$ 一定连续，该点的左极限等于右极限且等于函数值，所以本题可采用分段函数解决，其正确答案应该改写为

$$\int\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)+C-\frac{\pi}{2\sqrt{2}} & x<0\\ C & x=0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)+C+\frac{\pi}{2\sqrt{2}} & x>0\end{cases}$$

当然一般参考书上推荐的本题解法为：

$$\begin{aligned}\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{\left(1+x^2-\sqrt{2}x\right)\left(1+x^2+\sqrt{2}x\right)}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{1+x^2-\sqrt{2}x}+\frac{1}{1+x^2+\sqrt{2}x}\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+C\end{aligned}$$

，这里的第一类换元法就符合要求了。

2.2. 第二类换元法的使用条件

设 $x=\phi(u)$ 是单调的可导函数，且 $\phi'(u)\neq 0$，当 $f(\phi(u))\phi'(u)$ 具有原函数时 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\phi(u))\phi'(u)\mathrm{d}u$ [4]，由于求出积分后还需代回。这里也得注意其使用条件，特别是换元函数的单调可导性，常见的三角代换一般会选择其默认区间，$x=a\sin t$，这里的 t 选择 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，在该区间上 $x=a\sin t$ 是单调递增可导的函数，当然也可以选择其它单调区间，$x=a\tan t$，t 选择 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，$x=a\sec t$，

t 选择 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，也可以推广到当 $a>0$ 时，$x\geq a$，$t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x\leq -a$，$t\in\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，如不定积分 $\int\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\mathrm{d}x$，可令 $x=2\sec t$，$\mathrm{d}x=2\sec t\tan t\mathrm{d}t$，代入被积表达式得 $\int\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{2}\mathrm{d}t=\dfrac{t}{2}+C=\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{x}+C$，这里就需要 $x>2$ 了，因为被积函数在[−2, 2]没有意义，所以其原函数在被积函数定义区间上不能用一个表达式表示，因此，其答案需要在 $x>2$ 及 $x<-2$ 分开表示，当 $x<-2$，$\int\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{x}+C$。本题还可以使用倒代换，令 $x=t^{-1}$，通常使用倒代换要求被积函数分母含有 x 因子，从而保证 x 不取 0，当然，本题使用倒代换也得考虑 $x>2$ 及 $x<-2$。当 $x>2$ 时，

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{\sqrt{1-(2t)^2}}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\mathrm{atc}\sin 2t+C=-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{x}+C$$，当 $x<-2$ 时，

$$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{1-(2t)^2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{atc}\sin 2t+C=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{x}+C$$。

3. 第二类换元法的推广

当不定积分的被积函数含有某些特殊的形式，如被积函数含有根号，被积函数既有积分变量 x，也有因变量 y 时，除了常规代换，还可以有以下变量代换的方法。

3.1. 被积函数含有根号的双曲代换

双曲正弦函数 $shx=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$，双曲余弦函数，$chx=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$，双曲正切函数 $thx=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$，它们满足常规等式 $1+sh^2x=ch^2x$，$(shx)'=chx$，$(chx)'=shx$，并由 $y=shx$ 得其本义反函数为 $x=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$，所以如果被积函数中含有 $\sqrt{a^2+x^2}$，可令 $x=asht$，$\sqrt{a^2+x^2}=acht$，$(a>0)$被积函数中含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，可令 $x=acht$，当 $x>a>0$ 时 $\sqrt{x^2-a^2}=asht$，当 $a>0$，$x<-a$ 时 $\sqrt{x^2-a^2}=-asht$。

例 1. 计算不定积分 $\int\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

解：本题可用三角代换 $x=\tan t$，$\mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$ 求解，$\int\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{\tan^2 t}{\sec t}\sec^2 t\mathrm{d}t=\int\left(\sec^3 t-\sec t\right)\mathrm{d}t$ 显然积分较为繁琐，如采用双曲代换，可令 $x=sht$，

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x&=\int\frac{sh^2t}{cht}cht\mathrm{d}t=\int sh^2t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int(ch2t-1)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{4}sh2t-\frac{1}{2}t+C=\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C\end{aligned}$$，

则积分方便很多。当然，第二类换元法最后变量需要代回，代回时双曲代换有些时候比三角代换麻烦，所以双曲代换一般可作为三角代换的一种补充，当三角代换后积分较为麻烦时，选择改用双曲代换。

例 2. 计算不定积分 $\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$，$(x>1)$

解：令 $x=cht$，$\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{sht}sht\mathrm{d}t=t+C=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$。$(x>1)$明显，本题采用双曲代换也是比较简单的，当然，采用双曲代换需要知晓一些公式。

双曲函数常见的积分公式为：

$$\int shx\mathrm{d}x = chx + C,\ \int chx\mathrm{d}x = shx + C,\ \int thx\mathrm{d}x = lnchx + C,$$

$$\int cthx\mathrm{d}x = \ln|shx| + C,\ \int sh^2x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}sh2x - \frac{1}{2}x + C,\ \int ch^2x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}sh2x + \frac{1}{2}x + C.$$

3.2. 被积函数由隐函数方程给出的积分换元

被积函数中有 y，而且 y 由隐函数方程给出，通常原函数方程解出显函数表达式比较繁琐，甚至无法求出，此时一般采用参数方程进行换元，形如 $\int f(x,y)\mathrm{d}x$，可令 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，则 $\int f(x,y)\mathrm{d}x = \int f(\phi(t),\psi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$，积分出关于 t 的表达式，因此，参数方程中要求满足以下条件，1) 函数 $x=\varphi(t)$ 具有单调连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，且此反函数能与 $y=\psi(t)$ 构成复合函数，2) 函数 $x=\varphi(t)$ 对 t 可导且导函数连续，3) 由参数方程能够方便求出 t，以便代回，当然，其解答里会含有因变量 y。

例 3. 已知函数 $y=y(x)$ 由隐函数方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定，求 $\int \frac{1}{y^2}\mathrm{d}x$。

解：本题 $y=y(x)$ 由隐函数方程给出，不方便求出其显函数表达式，故采用参数方程

令 $y=tx$，$y^2(x-y)=x^2$，所以 $x=\dfrac{1}{t^2(1-t)}$，$y=\dfrac{1}{t(1-t)}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{-2+3t}{t^3(1-t)^2}\mathrm{d}t$，

原式 $=\int \dfrac{-2+3t}{t}\mathrm{d}t = 3t-2\ln|t|+C = \dfrac{3y}{x}-2\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|+C$。

例 4. 已知曲线 $y=f(x)$ 由星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 所确定，试求不定积分 $\int \frac{y}{x}\mathrm{d}x$。

解：本题如果把 y 求解出来代入被积函数，明显不好积分，所以将隐函数方程化为参数方程令 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$，

$$\int \frac{y}{x}\mathrm{d}x = \int \tan^3 t\left(-3\cos^2 t\right)\sin t\mathrm{d}t = -3\int \frac{\sin^4 t}{\cos t}\mathrm{d}t$$

$$= -3\int \frac{\sin^4 t}{1-\sin^2 t}\mathrm{d}\sin t = 3\int\left(\sin^2+1\right)\mathrm{d}\sin t - 3\int \frac{1}{1-\sin^2 t}\mathrm{d}\sin t$$

$$= \sin^3 t + 3\sin t - \frac{3}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C = y + 3y^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}\ln\frac{1+y^{\frac{1}{3}}}{1-y^{\frac{1}{3}}} + C$$

由隐函数方程化为参数方程的方法比较多，所以该方法的换元方法可能不唯一，但都必须要求能代换掉参数，所以求出参数关于 x，y 的表达式比较方便最为重要。

3.3. 被积函数中含有根号的欧拉代换

欧拉代换有 3 种形式，当被积函数含有 $\sqrt{ax^2+bx+c}$，$a>0$，可令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t$；当 $c>0$ 时，可令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx+\sqrt{c}$；当 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不同实根 α,β 时，可令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)$ 或 $t=\sqrt{\dfrac{\alpha(x-\beta)}{x-\alpha}}$。欧拉代换计算不定积分未必是一种好的方法，它的换元给出均比较麻烦，可能有时计算积分也比其它代换复杂，但它也是不定积分为一种换元方法。

例 5. 计算不定积分 $\int \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$ $(x>1)$。

解：本题可用三角代换、倒代换及双曲代换，如果用欧拉代换，可用第一种形式令 $\sqrt{x^2-1}=t+x$，$x=-\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{2t}$，$\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{2t^2}-\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{d}t$，$\int \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = 2\int \dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = 2\arctan t + C = 2\arctan\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)+C$。本题

也符合欧拉公式的第三种形式，所以也可令 $t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$，$x=\frac{t^2+1}{t^2-1}$，$dx=\frac{-4tdt}{\left(t^2-1\right)^2}$，

$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=-2\int\frac{1}{1+t^2}dt=-2\arctan t+C=-2\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+C$。从本题看，欧拉代换在换元过程中比较麻烦，但积分较为简单，因此，欧拉代换作为某些被积函数含有根号时还是一种比较好的方法。该种积分类型除了欧拉代换，形如 $\int x^m\left(ax^n+b\right)^p dx$，其中 m，n，p 均为有理数，当满足 $\frac{m+1}{n}$ 为整数时，可令 $ax^n+b=t^N$，N 为 p 的分母，可将无理式化为有理式进行积分运算，作为欧拉代换的一种推广。

例 6. 计算不定积分 $\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+x^{-1}}}$

解：被积函数 $\frac{1}{x^3\sqrt[5]{1+x^{-1}}}=x^{-3}\left(1+x^{-1}\right)^{-\frac{1}{5}}$，所以 $m=-3$，$n=-1$，$p=-\frac{1}{5}$，$\frac{m+1}{n}=2$，令 $1+x^{-1}=t^5$，所以 $x=\left(t^5-1\right)^{-1}$，$dx=-5t^4\left(t^5-1\right)^{-2}dt$，

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+x^{-1}}}=-5\int t^3\left(t^5-1\right)dt=-\frac{5}{9}t^9+\frac{5}{4}t^4+C=-\frac{5}{9}\left(1+x^{-1}\right)^{\frac{9}{5}}+\frac{5}{4}\left(1+x^{-1}\right)^{\frac{4}{5}}+C。$$

4. 结束语

不定积分换元法的使用，首先得满足换元的条件，特别要满足换元函数的单调性。其次，一般常规的代换可以做适当地推广，双曲代换是三角代换很好的补充，当三角代换后积分不方便时可以尝试用双曲代换。而当被积函数是由隐函数方程给出，基本上采用将隐函数转换成参数方程的方法进行换元，当然要求方便代回。当被积函数中含有根式也可采用欧拉代换。以上代换法的补充，解决了一部分函数的不定积分计算，当然，不定积分换元中换元法还有其它方法如三角函数的万能置换等，本文没有加以讨论。

参考文献

[1] 武文娟. 第一换元法求不定积分的技巧[J]. 黑龙江科技, 2020, 11(14): 28-19.

[2] 王振福. 不定积分换元法分类运算方法研究[J]. 数学学习与研究, 2017(1): 24.

[3] 张煜银. 田旭昌. 不定积分第二类换元法的解题方法探究[J]. 数学学习与研究, 2019(24): 105-106.

[4] 同济大学应用数学系. 高等数学(上册) [M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2014.