Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(10), 1810-1825
Published Online October 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1210194

Banach空间上箭图表示的反射函子

阙佳华，张云南

福建师范大学数学与统计学院, 福建 福州

收稿日期：2022年9月20日；录用日期：2022年10月19日；发布日期：2022年10月26日

摘 要

本文的目的是将Hilbert空间上的一些性质推广到Banach空间上.本文首先给出箭图及其Banach表示的定义, 关于收点与发点的反射函子以及共变函子的定义, 利用开映射定理,代数同构等定理定义,说明了两类反射函子可通过共变函子建立一个等式, 然后讨论箭图的Banach 表示之间自同态集与其在反射函子作用下的Banach 表示之间自同态集对应的反射函子映射的代数性质, 证明反射函子映射是个代数同构。

关键词

Banach空间，箭图，表示，反射函子

The Reflection Functors of Representations of Quivers on Banach Spaces

Jiahua Que, Yunnan Zhang

School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian

Received: Sep. 20^{th}, 2022; accepted: Oct. 19^{th}, 2022; published: Oct. 26^{th}, 2022

文章引用: 阙佳华, 张云南. Banach空间上箭图表示的反射函子[J]. 理论数学, 2022, 12(10): 1810-1825.
DOI: 10.12677/pm.2022.1210194

Abstract

The purpose of this paper is to extend some properties of Hilbert spaces to Banach spaces. This paper gave the definitions of the quivers and their Banach representations, the definitions of the reflection functors at the sinks and the sources, and the definitions of contravariant functors. By using the open mapping theorem, algebraic isomorphism and other definition theorems, it is shown that two kinds of reflection functors can establish an equality through covariant functors. It also discussed the algebraic properties of the reflection functor map corresponding to the automorphism sets between the Banach representations of the quivers and their Banach representations under the action of the reflection functors. It proved that the reflection functor map is an algebraic isomorphism.

Keywords

Banach Spaces, Quivers, Representations, Reflection Functors

1. 引言

设Γ是箭图, Gabriel ([1])研究有限维线性空间上的箭图表示, 得到著名的Gabriel定理: 有限连通箭图仅有有限多不可约表示的充要条件是其底层无向图是Dynkin图A_n, D_n, E_6, E_7, E_8之一. 此后 [2–8]发展了有限维线性空间上的箭图表示理论. [9, 10]研究纯代数情形下的无穷维线性空间上的箭图表示. [11]在Hilbert空间范畴下研究箭图的局部纯量表示. [12] 研究无穷维Hilbert 空间上的箭图表示. Hilbert 空间上的箭图表示已经得到比较充分的研究，我们将把Hilbert 空间上的箭图表示推广到Banach 空间上，并研究它们在Banach 空间上的性质以及它们之间的关系. 本文第二节给出箭图及其Banach 表示的定义, 关于收点与发点的反射函子以及共变函子的定义, 并说明两类反射函子可通过共变函子建立一个等式, 第三节讨论箭图的Banach表示之间自同态集与其在反射函子作用下的Banach表示之间自同态集对应的反射函子映射的代数性质, 证明反射函子映射是个代数同构.

下面给出一些定义与记号. 设X是Banach空间, 以X^*表示X的共轭空间. 设X, Y是Banach 空间, 以$B(X, Y)$表示从X到Y中的有界线性算子全体, 简记$B(X, X) = B(X)$. X上的恒等算子记为I.

设$T\in B(X,Y)$, 以$\ker(T)=\{x\in X:Tx=0\}$ 与$\mathrm{Im}(T)=\{Tx:x\in X\}$分别表示$T$的零空间与值域. 设$J$是有限指标集. 设$(X_i)_{i\in J}$是Banach 空间族, 记线性空间

$$\bigoplus_{i\in J} X_i=\{(x_i)_{i\in J}:x_i\in X_i, i\in J\}.$$

$\bigoplus\limits_{i\in J} X_i$上的范数定义为:

$$\|(x_i)_{i\in J}\|=(\sum_{i\in J}\|x_i\|^2)^{\frac{1}{2}},\quad (x_i)_{i\in J}\in\bigoplus_{i\in J}X_i,$$

则$\bigoplus\limits_{i\in J} X_i$按照上述范数成为一个Banach空间, 其共轭空间为

$$(\bigoplus_{i\in J}X_i)^*=\bigoplus_{i\in J}X_i^*.$$

2. 箭图的Banach表示及其反射函子与共变函子

本节给出箭图及其Banach表示的定义, 关于收点与发点的反射函子以及共变函子的定义, 并说明两类反射函子可通过共变函子建立一个等式. 首先给出箭图及其Banach表示的定义.

定义2.1 [12] 设V是个点集, $E\subseteq V\times V$, 映射s, r: $E\to V$满足: 对任意$\alpha=(a,b)\in E$, $s(\alpha)=a$, 称为α 的支撑, $r(\alpha)=b$, 称为α的值, 称四元组$\Gamma=(V,E,s,r)$为一个箭图, 称V为顶点集, E 为箭头集. 显然箭图是个有向图.

若V,E都是有限集, 则称箭图Γ为有限箭图.

定义2.2 设$\Gamma=(V,E,s,r)$是箭图, 若$X=(X_v)_{v\in V}$是Banach空间族, $f=(f_\alpha)_{\alpha\in E}$, 其中$f_\alpha\in B(X_{s(\alpha)},X_{r(\alpha)})$, 则称$(X,f)$是$\Gamma$的Banach表示.

若对任意$v\in V$, $X_v=0$, 则记$X=(X_v)_{v\in V}=0$, 此时称Banach表示(X,f)为零表示, 记为$(X,f)=0$.

下面给出箭图的Banach表示之间的同态与同态合成的定义.

定义2.3 设$\Gamma=(V,E,s,r)$是箭图, $(X,f),(Y,g)$是Γ的Banach表示, $T=(T_v)_{v\in V}$是有界线性算子族, 其中$T_v\in B(X_v,Y_v)$. 若对任意$\alpha\in E$, $T_{r(\alpha)}f_\alpha=g_\alpha T_{s(\alpha)}$, 则称$T$是从$(X,f)$ 到(Y,g) 的同态. 记同态集

$$Hom((X,f),(Y,g))=\{\text{从}(X,f)\text{到}(Y,g)\text{的同态}\}.$$

自同态集

$$End((X,f))=Hom((X,f),(X,f)).$$

记零自同态0= $(0_v)_{v\in V}$, 恒等自同态I= $(I_v)_{v\in V}$.

引理2.4 设$\Gamma = (V, E, s, r)$是箭图, $(X, f), (Y, g), (Z, h)$是Γ的Banach表示.

(1)设$T \in Hom((Y, g), (Z, h))$, $S \in Hom((X, f), (Y, g))$, 对任意$v \in V$, 记$(TS)_v = T_v S_v$, 记$TS = ((TS)_v)_{v \in V}$, 称为$T$和$S$ 的合成, 则$TS \in Hom((X, f), (Z, h))$;

(2)设$T, S \in Hom((X, f), (Y, g))$, 对任意$v \in V$, 记$(T + S)_v = T_v + S_v$, 记$T + S = ((T + S)_v)_{v \in V}$, 称为$T$和$S$的和, 则$T + S \in Hom((X, f), (Y, g))$;

(3)设$\lambda \in \mathbb{C}$, $T \in Hom((X, f), (Y, g))$, 对任意$v \in V$, 记$(\lambda T)_v = \lambda T_v$, 记$\lambda T = ((\lambda T)_v)_{v \in V}$, 称为$T$的数$(\lambda)$乘, 则$\lambda T \in Hom((X, f), (Y, g))$.

证明 由定义可直接证得

显然箭图的Banach表示按照上述同态集及其合成构成一个范畴, 即有

命题2.5 设$\Gamma = (V, E, s, r)$是箭图, 则Γ的所有Banach表示按照定义2.3中的同态集与引理2.4中的合成构成一个范畴, 记为$BRep(\Gamma)$.

下面给出箭图的Banach表示的同构、直和、不可分解和可传递的定义.

定义2.6 设$\Gamma = (V, E, s, r)$是箭图.

(1) 设$(X, f), (Y, g)$是Γ的Banach表示. 若存在从(X, f)到(Y, g)上的同构T, 即$T = (T_v)_{v \in V} \in Hom((X, f), (Y, g))$, 且对任意$v \in V$, $T_v \in B(X_v, Y_v)$是同构算子, 则称(X, f)与(Y, g)同构, 记为$(X, f) \cong (Y, g)$.

(2) 设$(X, f), (Y, g), (Y', g')$是Γ的Banach表示. 若对任意$v \in V$, 任意$\alpha \in E$, $X_v = Y_v \bigoplus Y'_v$, $f_\alpha = g_\alpha \bigoplus g'_\alpha$, 则记$X = Y \bigoplus Y'$, $f = g \bigoplus g'$, 此时称(X, f)是(Y, g)与(Y', g')的直和, 记为$(X, f) = (Y \bigoplus Y', g \bigoplus g') = (Y, g) \bigoplus (Y', g')$.

(3) 设(X, f)是Γ的非零Banach表示. 若(X, f)同构于Γ的两个非零Banach表示的直和, 则称(X, f)是可分解的. 否则称(X, f) 是不可分解的.

接下来给出箭图的Banach表示关于收点与发点的反射函子以及共变函子的定义, 并说明两类反射函子可通过共变函子建立一个等式. 首先给出箭图中收点与发点及其相应生成的新箭图, 以及对偶箭图的定义.

定义2.7 [12] 设$\Gamma = (V, E, s, r)$是箭图, $v \in V$是个顶点.

(1) 若对任意$\alpha \in E$, $s(\alpha) \neq v$, 则称v是Γ的收点, 此时记

$$E^v = \{\alpha \in E : r(\alpha) = v\}.$$

(2) 若对任意$\alpha \in E$, $r(\alpha) \neq v$, 则称v是Γ的发点, 此时记

$$E_v = \{\alpha \in E : s(\alpha) = v\}.$$

设$F \subseteq V \times V$是个箭头集, $\alpha \in F$. 若$\alpha : x \to y$, 记$\overline{\alpha} : y \to x$. 记$\overline{F} = \{\overline{\alpha} : \alpha \in F\}$.

定义2.8 [12] 设$\Gamma = (V, E, s, r)$是箭图.

(1) 设$v \in V$是Γ的收点, 记$\sigma_v^+(V) = V$, $\sigma_v^+(E) = (E \backslash E^v) \bigcup \overline{E^v}$, 令箭图

$$\sigma_v^+(\Gamma) = (\sigma_v^+(V), \sigma_v^+(E), s, r).$$

(2) 设$v \in V$是Γ的发点, 记$\sigma_v^-(V) = V$, $\sigma_v^-(E) = (E \backslash E_v) \bigcup \overline{E_v}$, 令箭图

$$\sigma_v^-(\Gamma) = (\sigma_v^-(V), \sigma_v^-(E), s, r).$$

(3) 记$\overline{V} = V$, $\overline{E} = \{\overline{\alpha} : \alpha \in E\}$, 令$\Gamma$的对偶箭图

$$\overline{\Gamma} = (\overline{V}, \overline{E}, s, r).$$

下面给出箭图的Banach表示关于收点与发点的反射函子以及共变函子的定义. 首先给出由箭图Γ的Banach表示(X, f)关于收点v诱导的$\sigma_v^+(\Gamma)$ 的Banach表示, (X, f)关于发点v诱导的$\sigma_v^-(\Gamma)$的Banach表示, 以及(X, f)诱导的$\overline{\Gamma}$的Banach表示.

定义2.9 设$\Gamma = (V, E, s, r)$是有限箭图.

(1) 设$v \in V$是Γ的收点, (X, f)是Γ的Banach表示. 令有界线性算子

$$h_v : \bigoplus_{\alpha \in E^v} X_{s(\alpha)} \to X_v, \quad h_v((x_{s(\alpha)})_{\alpha \in E^v}) = \sum_{\alpha \in E^v} f_\alpha(x_{s(\alpha)}), \quad x_{s(\alpha)} \in X_{s(\alpha)}.$$

令

$$Y_v = \ker h_v = \{(x_{s(\alpha)})_{\alpha \in E^v} \in \bigoplus_{\alpha \in E^v} X_{s(\alpha)} : \sum_{\alpha \in E^v} f_\alpha(x_{s(\alpha)}) = 0\}.$$

对$u \in V$, $u \neq v$, 令$Y_u = X_u$.

设$\beta \in \overline{E^v}$, 则$\overline{\beta} \in E^v$, 且$s(\beta) = r(\overline{\beta}) = v$, $r(\beta) = s(\overline{\beta}) \neq v$. 令有界线性算子

$$g_\beta : Y_{s(\beta)} = Y_v \to Y_{r(\beta)} = Y_{s(\overline{\beta})} = X_{s(\overline{\beta})}, \quad g_\beta((x_{s(\alpha)})_{\alpha \in E^v}) = x_{s(\overline{\beta})}.$$

对$\beta \in E \backslash E^v$, 则$s(\beta) \neq v$, $r(\beta) \neq v$, 令$g_\beta = f_\beta \in B(X_{s(\beta)}, X_{r(\beta)}) = B(Y_{s(\beta)}, Y_{r(\beta)})$.

定义$\sigma_v^+(\Gamma)$的Banach表示

$$\Phi_{\Gamma,v}^+(X, f) = (Y, g),$$

其中$Y = (Y_u)_{u \in \sigma_v^+(V)}$, $g = (g_\beta)_{\beta \in \sigma_v^+(E)}$.

(2) 设$v\in V$是Γ的发点, (X,f)是Γ的Banach表示. 令有界线性算子

$$\widehat{h}_v:\bigoplus_{\alpha\in E_v}X^*_{r(\alpha)}\to X^*_v,\quad \widehat{h}_v((x^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v})=\sum_{\alpha\in E_v}f^*_\alpha(x^*_{r(\alpha)}),\quad x^*_{r(\alpha)}\in X^*_{r(\alpha)}.$$

令$Y_v=(\ker\widehat{h}_v)^*$, 其中

$$\ker\widehat{h}_v=\{(x^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v}\in\bigoplus_{\alpha\in E_v}X^*_{r(\alpha)}:\sum_{\alpha\in E_v}f^*_\alpha(x^*_{r(\alpha)})=0\}.$$

对$u\in V$, $u\neq v$, 令$Y_u=X^{**}_u$.

设$\beta\in\overline{E_v}$, 则$\overline{\beta}\in E_v$, 且$s(\beta)=r(\overline{\beta})\neq v$, $r(\beta)=s(\overline{\beta})=v$. 令有界线性算子

$$g_\beta:Y_{s(\beta)}=Y_{r(\overline{\beta})}=X^{**}_{r(\overline{\beta})}\to Y_{r(\beta)}=Y_v=(\ker\widehat{h}_v)^*,$$

满足: 对任意$F\in X^{**}_{r(\overline{\beta})}$, 对任意$(x^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v}\in\ker\widehat{h}_v$, 有

$$(g_\beta F)((x^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v})=F(x^*_{r(\overline{\beta})}).$$

对$\beta\in E\backslash E_v$, 则$s(\beta)\neq v$, $r(\beta)\neq v$, 令$g_\beta=f^{**}_\beta\in B(X^{**}_{s(\beta)},X^{**}_{r(\beta)})=B(Y_{s(\beta)},Y_{r(\beta)})$.

定义$\sigma^-_v(\Gamma)$的Banach表示

$$\Phi^-_{\Gamma,v}(X,f)=(Y,g),$$

其中$Y=(Y_u)_{u\in\sigma^-_v(V)}$, $g=(g_\beta)_{\beta\in\sigma^-_v(E)}$.

(3) 设(X,f)是Γ的Banach表示. 对任意$u\in V$, 令$Y_u=X^*_u$. 对任意$\beta\in\overline{E}$, 则$\overline{\beta}\in E$, 令$g_\beta=f^*_{\overline{\beta}}\in B(X^*_{r(\overline{\beta})},X^*_{s(\overline{\beta})})=B(X^*_{s(\beta)},X^*_{r(\beta)})=B(Y_{s(\beta)},Y_{r(\beta)})$.

定义$\overline{\Gamma}$的Banach表示

$$\Phi^*_\Gamma(X,f)=(Y,g),$$

其中$Y=(Y_u)_{u\in\overline{V}}$, $g=(g_\beta)_{\beta\in\overline{E}}$.

下面给出由箭图Γ的Banach表示之间的同态关于收点v诱导的$\sigma^+_v(\Gamma)$的Banach表示之间的同态, 关于发点v诱导的$\sigma^-_v(\Gamma)$ 的Banach表示之间的同态, 以及诱导的$\overline{\Gamma}$的Banach 表示之间的同态.

引理2.10 设$\Gamma=(V,E,s,r)$是有限箭图.

(1) 设$v\in V$是Γ的收点, (X,f), (X',f')是Γ的Banach表示, $(Y,g)=\Phi^+_{\Gamma,v}(X,f)$, $(Y',g')=\Phi^+_{\Gamma,v}(X',f')$ 如定义2.9(1), 是$\sigma^+_v(\Gamma)$的Banach表示. 设$T\in Hom((X,f),(X',f'))$. 令有界线性算子

$$S_v:Y_v\to Y'_v,\quad S_v((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})=(T_{s(\alpha)}(x_{s(\alpha)}))_{\alpha\in E^v}.$$

对$u \in V$, $u \neq v$, 令$S_u = T_u \in B(X_u, X'_u) = B(Y_u, Y'_u)$, 则$S = (S_u)_{u\in V} \in Hom((Y,g),(Y',g'))$. 记$S = \Phi^+_{\Gamma,v}(T)$.

(2) 设$v \in V$是Γ的发点, (X,f), (X',f')是Γ的Banach表示, $(Y,g) = \Phi^-_{\Gamma,v}(X,f)$, $(Y',g') = \Phi^-_{\Gamma,v}(Y,f')$如定义2.9(2), 是$\sigma^-_v(\Gamma)$的Banach 表示. 设$T \in Hom((X,f),(X',f'))$. 令有界线性算子

$$S_v : Y_v = (\ker \widehat{h}_v)^* \to Y'_v = (\ker \widehat{h}'_v)^*,$$

满足: 对任意$F \in Y_v$, 对任意$(x'^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v} \in \ker \widehat{h}'_v$, 有

$$(S_vF)((x'^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v}) = F((T^*_{r(\alpha)}x'^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v}).$$

对$u \in V$, $u \neq v$, 令$S_u = T^{**}_u \in B(X^{**}_u,(X'_u)^{**}) = B(Y_u, Y'_u)$, 则$S = (S_u)_{u\in V} \in Hom((Y,g),(Y',g'))$. 记$S = \Phi^-_{\Gamma,v}(T)$.

(3) 设(X,f), (X',f')是Γ的Banach表示, $(Y,g) = \Phi^*_\Gamma(X,f)$, $(Y',g') = \Phi^*_\Gamma(X',f')$如定义2.9(3), 是$\overline{\Gamma}$ 的Banach表示. 设$T \in Hom((X,f),(X',f'))$. 对任意$u \in V$, 令$S_u = T^*_u \in B(X'^*_u, X^*_u) = B(Y'_u, Y_u)$, 则$S = (S_u)_{u\in V} \in Hom((Y',g'),(Y,g))$. 记$S = \Phi^*_\Gamma(T)$.

证明 (1)与(3)的证明类似 [12]第4部分中反射函子Φ^+_v与共变函子Φ^*中的说明可证得.下证(2), 首先类似 [12]的第4 部分中反射函子Φ^-_v中的说明可证得S_v是有意义的且$S_v \in B(Y_v, Y'_v)$.

对任意$\beta \in \overline{E_v}$, 则$\overline{\beta} \in E_v$, 且$s(\beta) = r(\overline{\beta}) \neq v$, $r(\beta) = s(\overline{\beta}) = v$. 对任意$F \in X^{**}_{r(\overline{\beta})}$, 对任意$(x'^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v} \in \ker \widehat{h}'_v$, 有

$$(S_{r(\beta)}g_\beta F)((x'^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v}) = (S_v g_\beta F)((x'^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v}) = (g_\beta F)((T^*_{r(\alpha)}x'^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v}) = F(T^*_{r(\overline{\beta})}x'^*_{r(\overline{\beta})})$$

与

$$(g'_\beta S_{s(\beta)}F)((x'^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v}) = (g'_\beta S_{r(\overline{\beta})}F)((x'^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v})$$

$$= (g'_\beta T^{**}_{r(\overline{\beta})}F)((x'^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v}) = (T^{**}_{r(\overline{\beta})}F)x'^*_{r(\overline{\beta})} = F(T^*_{r(\overline{\beta})}x'^*_{r(\overline{\beta})}),$$

即$(S_{r(\beta)}g_\beta F)((x'^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v}) = (g'_\beta S_{s(\beta)}F)((x'^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v})$, 则$S_{r(\beta)}g_\beta F = g'_\beta S_{s(\beta)}F$, 故$S_{r(\beta)}g_\beta = g'_\beta S_{s(\beta)}$.

对任意$\beta \in E\backslash E_v$, 则$s(\beta) \neq v$, $r(\beta) \neq v$. 故

$$S_{r(\beta)}g_\beta = T^{**}_{r(\beta)}f^{**}_\beta = (T_{r(\beta)}f_\beta)^{**} = (f'_\beta T_{s(\beta)})^{**} = (f'_\beta)^{**}T^{**}_{s(\beta)} = g'_\beta S_{s(\beta)}.$$

综上可得$S = (S_u)_{u\in V} \in Hom((Y,g),(Y',g'))$.

箭图$\sigma^+_v(\Gamma)$按照上述诱导的Banach表示与同态集及其自然合成可得到一个由$BRep(\Gamma)$ 关于收点v诱导的范畴$BRep(\sigma^+_v(\Gamma))$, 进而可定义关于收点的反射函子. 箭图$\sigma^-_v(\Gamma)$按照上述诱导的Banach表示与同态集及其自然合成可得到一个由$BRep(\Gamma)$ 关于发点v诱导的范畴$BRep$ $(\sigma^-_v(\Gamma))$,

进而可定义关于发点的反射函子. 箭图$\overline{\Gamma}$按照上述诱导的Banach表示与同态集及其自然合成可得到一个由$BRep(\Gamma)$ 诱导的范畴$BRep(\overline{\Gamma})$, 进而可定义共变函子.

定义2.11 设$\Gamma = (V, E, s, r)$是有限箭图.

(1) 设$v \in V$是Γ的收点. 定义反射函子

$$\Phi^{+}_{\Gamma,v} : BRep(\Gamma) \to BRep(\sigma^{+}_{v}(\Gamma)),$$

其中对$BRep(\Gamma)$中的对象(X, f), $(Y, g) = \Phi^{+}_{\Gamma,v}(X, f)$如定义2.9(1), 是$BRep(\sigma^{+}_{v}(\Gamma))$中的对象, 对$BRep(\Gamma)$中的同态$T$, $S = \Phi^{+}_{\Gamma,v}(T)$如引理2.10(1), 是$BRep(\sigma^{+}_{v}(\Gamma))$中的同态, $BRep(\sigma^{+}_{v}(\Gamma))$ 中的同态合成是自然合成, 如引理2.4.

(2) 设$v \in V$是Γ的发点. 定义反射函子

$$\Phi^{-}_{\Gamma,v} : BRep(\Gamma) \to BRep(\sigma^{-}_{v}(\Gamma)),$$

其中对$BRep(\Gamma)$中的对象(X, f), $(Y, g) = \Phi^{-}_{\Gamma,v}(X, f)$如定义2.9(2), 是$BRep(\sigma^{-}_{v}(\Gamma))$中的对象, 对$BRep(\Gamma)$中的同态$T$, $S = \Phi^{-}_{\Gamma,v}(T)$如引理2.10(2), 是$BRep(\sigma^{-}_{v}(\Gamma))$中的同态, $BRep(\sigma^{-}_{v}(\Gamma))$ 中的同态合成是自然合成, 如引理2.4.

(3) 定义共变函子

$$\Phi^{*}_{\Gamma} : BRep(\Gamma) \to BRep(\overline{\Gamma}),$$

其中对$BRep(\Gamma)$中的对象(X, f), $(Y, g) = \Phi^{*}_{\Gamma}(X, f)$如定义2.9(3), 是$BRep(\overline{\Gamma})$中的对象, 对$BRep$ (Γ)中的同态T, $S = \Phi^{*}_{\Gamma}(T)$如引理2.10(3), 是$BRep(\overline{\Gamma})$中的同态. $BRep(\overline{\Gamma})$ 中的同态合成是自然合成, 如引理2.4.

下面给出本节的主要定理, 即说明两类反射函子可通过共变函子建立一个等式.

定理2.12 设$\Gamma = (V, E, s, r)$是有限箭图, $v \in V$是Γ的发点, 则v是$\overline{\Gamma}$的收点, $\sigma^{-}_{v}(\Gamma) = \overline{\sigma^{+}_{v}(\overline{\Gamma})}$, 且有如下结论:

(1) 对Γ的Banach表示(X, f), 有

$$\Phi^{-}_{\Gamma,v}(X, f) = \Phi^{*}_{\sigma^{+}_{v}(\overline{\Gamma})}(\Phi^{+}_{\overline{\Gamma},v}(\Phi^{*}_{\Gamma}(X, f))).$$

(2) 设(X, f), (X', f')是Γ的Banach表示, $T \in Hom((X, f), (X', f'))$, 则

$$\Phi^{-}_{\Gamma,v}(T) = \Phi^{*}_{\sigma^{+}_{v}(\overline{\Gamma})}(\Phi^{+}_{\overline{\Gamma},v}(\Phi^{*}_{\Gamma}(T))).$$

证明 由于$\overline{\sigma^{+}_{v}(\overline{V})} = V = \sigma^{-}_{v}(V)$, $\overline{\overline{E}^{v}} = E_v$, 则

$$\overline{\sigma^{+}_{v}(\overline{E})} = \overline{(\overline{E} \backslash \overline{E}^{v}) \bigcup \overline{\overline{E}^{v}}} = (E \backslash E_v) \bigcup \overline{E_v} = \sigma^{-}_{v}(E),$$

故$\sigma_v^-(\Gamma)=\overline{\sigma_v^+(\overline{\Gamma})}$.

(1) 记$(Z,\varphi)=\Phi_\Gamma^*(X,f)$是$\overline{\Gamma}$的Banach表示, 则

$$Z=(Z_u)_{u\in\overline{V}}=(X_u^*)_{u\in\overline{V}},\quad \varphi=(\varphi_\beta)_{\beta\in\overline{E}}=(f_{\overline{\beta}}^*)_{\beta\in\overline{E}}.$$

记$(W,\psi)=\Phi_{\Gamma,v}^+(Z,\varphi)$是$\sigma_v^+(\overline{\Gamma})$的Banach表示, 由定义可以直接证得

$$W_v=\ker\widehat{h}_v=\{(x_{r(\alpha)}^*)_{\alpha\in E_v}\in\bigoplus_{\alpha\in E_v}X_{r(\alpha)}^*:\sum_{\alpha\in E_v}f_\alpha^*(x_{r(\alpha)}^*)=0\}.$$

其中$\widehat{h}_v$如定义2.9(2), 当$u\in V$, $u\neq v$时, $W_u=Z_u=X_u^*$. 对$\beta\in\overline{\overline{E}^v}=E_v$, 有

$$\psi_\beta((x_{r(\alpha)}^*)_{\alpha\in E_v})=x_{r(\beta)}^*,\quad x_{r(\alpha)}^*\in X_{r(\alpha)}^*.$$

当$\beta\in\overline{E}\backslash\overline{E}^v$时, $\psi_\beta=\varphi_\beta=f_{\overline{\beta}}^*$. 记$(Y,g)=\Phi_{\sigma_v^+(\overline{\Gamma})}^*(W,\psi)$是$\overline{\sigma_v^+(\overline{\Gamma})}$的Banach表示, 则

$$Y=(Y_u)_{u\in\overline{\sigma_v^+(\overline{V})}}=(W_u^*)_{u\in\overline{\sigma_v^+(\overline{V})}},\quad g=(g_\beta)_{\beta\in\overline{\sigma_v^+(\overline{E})}}=(\psi_{\overline{\beta}}^*)_{\beta\in\overline{\sigma_v^+(\overline{E})}}.$$

故$Y_v=W_v^*=(\ker\widehat{h}_v)^*$, 且当$u\in V$, $u\neq v$时, $Y_u=W_u^*=X_u^{**}$. 对$\beta\in\overline{E_v}$, 有$\overline{\beta}\in E_v$, 则$g_\beta=\psi_{\overline{\beta}}^*\in B(X_{r(\overline{\beta})}^{**},W_v^*)=B(X_{r(\overline{\beta})}^{**},(\ker\widehat{h}_v)^*)$. 对任意$F\in X_{r(\overline{\beta})}^{**}$, 对任意$(x_{r(\alpha)}^*)_{\alpha\in E_v}\in\ker\widehat{h}_v=W_v$, 有

$$(g_\beta F)((x_{r(\alpha)}^*)_{\alpha\in E_v})=(\psi_{\overline{\beta}}^*F)((x_{r(\alpha)}^*)_{\alpha\in E_v})=F(\psi_{\overline{\beta}}((x_{r(\alpha)}^*)_{\alpha\in E_v}))=F(x_{r(\overline{\beta})}^*).$$

对$\beta\in E\backslash E_v$, 则$\overline{\beta}\in\overline{E}\backslash\overline{E_v}=\overline{E}\backslash\overline{E}^v$, 故$g_\beta=\psi_{\overline{\beta}}^*=f_{\overline{\overline{\beta}}}^{**}=f_\beta^{**}$. 因此$(Y,g)=\Phi_{\Gamma,v}^-(X,f)$, 即

$$\Phi_{\Gamma,v}^-(X,f)=\Phi_{\sigma_v^+(\overline{\Gamma})}^*(\Phi_{\Gamma,v}^+(\Phi_\Gamma^*(X,f))).$$

(2) 记$R=\Phi_\Gamma^*(T)$, 可设$R=(R_u)_{u\in V}\in Hom((Z',\varphi'),(Z,\varphi))$, 且对任意$u\in V$, 有

$$R_u=T_u^*:Z_u'=(X_u')^*\to Z_u=X_u^*.$$

记$L=\Phi_{\Gamma,v}^+(R)$, 可设$L=(L_u)_{u\in V}\in Hom((W',\psi'),(W,\psi))$,由定义可以直接证得

$$L_v:W_v'=\ker\widehat{h}_v'\to W_v=\ker\widehat{h}_v,\quad L_v((x_{r(\alpha)}'^*)_{\alpha\in E_v})=(T_{r(\alpha)}^*x_{r(\alpha)}'^*)_{\alpha\in E_v},$$

其中$(x_{r(\alpha)}'^*)_{\alpha\in E_v}\in\ker\widehat{h}_v'$. 当$u\in V$, $u\neq v$时, 有

$$L_u=R_u=T_u^*:W_u'=Z_u'=(X_u')^*\to W_u=Z_u=X_u^*.$$

记$S=\Phi^*_{\sigma_v^+(\overline{\Gamma})}(L)$, 可设$S=(S_u)_{u\in V}\in Hom((Y,g),(Y',g'))$, 且对任意$u\in V$, 有

$$S_u=L_u^*:Y_u=W_u^*\to Y_u'=(W_u')^*.$$

故$S_v=L_v^*\in B(Y_v,Y_v')=B(W_v^*,(W_v')^*)=B((\ker\widehat{h}_v)^*,(\ker\widehat{h}_v')^*)$. 对任意$F\in Y_v$, 对任意$(x'^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v}\in\ker\widehat{h}_v'$, 有

$$(S_vF)((x'^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v})=(L_v^*F)((x'^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v})=F(L_v((x'^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v}))=F((T^*_{r(\alpha)}x'^*_{r(\alpha)})_{\alpha\in E_v}).$$

当$u\in V$, $u\neq v$时, $S_u=L_u^*=T_u^{**}$. 因此$S=\Phi^-_{\Gamma,v}(T)$, 即

$$\Phi^-_{\Gamma,v}(T)=\Phi^*_{\sigma_v^+(\overline{\Gamma})}(\Phi^+_{\Gamma,v}(\Phi^*_\Gamma(T))).$$

3. 反射函子映射的代数性质

定义3.1 [12] 设$\Gamma=(V,E,s,r)$是有限箭图, (X,f)是Γ的Banach表示. 设$v\in V$是Γ的收点. 若$\sum\limits_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}f_\alpha$是$X_v$的闭子空间, 则称$(X,f)$在$v$是闭的; 若$\sum\limits_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}f_\alpha=X_v$, 则称$(X,f)$在$v$是满的.

由上述定义直接可得如下

命题3.2 设$\Gamma=(V,E,s,r)$是有限箭图, (X,f)是Γ的Banach表示. 设$v\in V$是Γ的收点, h_v如定义2.9(1), 则

(1) (X,f)在v是闭的$\Leftrightarrow\mathrm{Im}h_v$是$X_v$的闭子空间;

(2) (X,f)在v是满的$\Leftrightarrow h_v$是满的.

引理3.3 设$\Gamma=(V,E,s,r)$是有限箭图, (X,f)是Γ的Banach表示. 设$v\in V$是Γ的收点, 则

$$\Phi^+_{\Gamma,v}(X,f)=0\Leftrightarrow \text{对任意}u\in V,u\neq v,\text{有}X_u=0.$$

此时,

(1) 若(X,f)还是不可分解的, 则$X_v\cong\mathbb{C}$;

(2) 若(X,f)还在v是满的, 则$(X,f)=0$.

证明 记$\Phi^+_{\Gamma,v}(X,f)=(Y,g)$, 其中$Y_v=\ker h_v$, h_v如定义2.9(1), 且当$u\in V$, $u\neq v$时, $Y_u=X_u$.

若$\Phi^+_{\Gamma,v}(X,f)=0$, 则对任意$u\in V$, $u\neq v$, 有$X_u=Y_u=0$.

若对任意$u\in V$, $u\neq v$, 有$X_u=0$, 则$Y_u=X_u=0$. 由于v是Γ的收点, 则对任意$\alpha\in E^v$, $s(\alpha)\neq v$, 故$X_{s(\alpha)}=0$. 因此$Y_v=\ker h_v\subseteq\bigoplus\limits_{\alpha\in E^v}X_{s(\alpha)}=0$, 即$Y_v=0$. 从而$\Phi^+_{\Gamma,v}(X,f)=(Y,g)=0$.

此时, $X_u=\begin{cases}X_v, & u=v,\\ 0, & u\neq v,\end{cases}$ $u\in V$, 且对任意$\alpha\in E$, 有$f_\alpha=0$.

(1) 设(X,f)还是不可分解的, 则$(X,f)\neq 0$, 故$X_v\neq 0$. 若$\dim X_v\geq 2$, 可设$X_v=X_1\bigoplus X_2$, 其中X_1,X_2是X_v的非零闭子空间. 令

$$Y_u=\begin{cases} X_1, & u=v,\\ 0, & u\neq v,\end{cases}\quad Z_u=\begin{cases} X_2, & u=v,\\ 0, & u\neq v,\end{cases}\quad u\in V,$$

且对任意$\alpha\in E$, 令$g_\alpha=0$, $h_\alpha=0$. 令$Y=(Y_u)_{u\in V}$, $g=(g_\alpha)_{\alpha\in E}$, $Z=(Z_u)_{u\in V}$, $h=(h_\alpha)_{\alpha\in E}$, 则$(Y,g)$, (Z,h)都是Γ的非零Banach表示, 且$(X,f)=(Y,g)\bigoplus(Z,h)$, 这与$(X,f)$是不可分解的矛盾, 故$\dim X_v=1$, 因此$X_v\cong\mathbb{C}$.

(2) 设(X,f)还在v是满的, 则$X_v=\sum\limits_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}f_\alpha=0$, 故$X=0$, 即$(X,f)=0$.

引理3.4 设$\Gamma=(V,E,s,r)$是有限箭图, (X,f),(Y,g)是Γ的Banach表示, 且$(X,f)\cong(Y,g)$. 设$v\in V$是Γ的收点.

(1) 若(X,f)在v是闭的, 则(Y,g)在v也是闭的;

(2) 若(X,f)在v是满的, 则(Y,g)在v也是满的.

证明 由于$(X,f)\cong(Y,g)$, 则存在同构$T=(T_u)_{u\in V}\in Hom((X,f),(Y,g))$, 即对任意$u\in V$, $T_u\in B(X_u,Y_u)$是同构算子, 且对任意$\alpha\in E$, 有$T_{r(\alpha)}f_\alpha=g_\alpha T_{s(\alpha)}$, 则$f_\alpha T^{-1}_{s(\alpha)}=T^{-1}_{r(\alpha)}g_\alpha$. 对任意$\alpha\in E^v$, 有$r(\alpha)=v$, 又对任意$y_{s(\alpha)}\in Y_{s(\alpha)}$, 令$x_{s(\alpha)}=T^{-1}_{s(\alpha)}(y_{s(\alpha)})\in X_{s(\alpha)}$, 即$y_{s(\alpha)}=T_{s(\alpha)}(x_{s(\alpha)})$, 则

$$\sum_{\alpha\in E^v}g_\alpha(y_{s(\alpha)})=\sum_{\alpha\in E^v}g_\alpha T_{s(\alpha)}(x_{s(\alpha)})=\sum_{\alpha\in E^v}T_{r(\alpha)}f_\alpha(x_{s(\alpha)})$$

$$=\sum_{\alpha\in E^v}T_vf_\alpha(x_{s(\alpha)})=T_v\sum_{\alpha\in E^v}f_\alpha(x_{s(\alpha)})\in T_v(\sum_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}f_\alpha),$$

故$\sum\limits_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}g_\alpha\subseteq T_v(\sum\limits_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}f_\alpha)$. 同理可证$\sum\limits_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}f_\alpha\subseteq T_v^{-1}(\sum\limits_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}g_\alpha)$, 则$T_v(\sum\limits_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}f_\alpha)\subseteq\sum\limits_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}g_\alpha$, 故$\sum\limits_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}g_\alpha=T_v(\sum\limits_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}f_\alpha)$.

(1) 若(X,f)在v是闭的, 则$\sum\limits_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}f_\alpha$是$X_v$的闭子空间. 由于$T_v$是同构算子, 则$\sum\limits_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}g_\alpha=T_v(\sum\limits_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}f_\alpha)$是$Y_v$ 的闭子空间, 故(Y,g)在v是闭的.

(2) 若(X,f)在v是满的, 则$\sum\limits_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}f_\alpha=X_v$. 由于$T_v$是同构算子, 则$\sum\limits_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}g_\alpha=T_v(\sum\limits_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}f_\alpha)=T_v(X_v)=Y_v$, 故$(Y,g)$在$v$是满的.

引理3.5 设$\Gamma=(V,E,s,r)$是有限箭图, (X,f) 是Γ的Banach表示. 设$v\in V$是Γ的收点, 则映射$\Phi^+_{\Gamma,v}:End(X,f)\to End(\Phi^+_{\Gamma,v}(X,f))$是个代数映射.

证明 设$T\in End(X,f)$, $S\in End(X,f)$, $\lambda\in\mathbb{C}$.

DOI: 10.12677/pm.2022.1210194

对任意$(x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}\in Y_v$, 有

$$(\Phi^+_{\Gamma,v}(T+S))_v((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})=((T+S)_{s(\alpha)}x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}=((T_{s(\alpha)}+S_{s(\alpha)})x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}$$

$$=(T_{s(\alpha)}x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}+(S_{s(\alpha)}x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}=(\Phi^+_{\Gamma,v}T)_v((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})+(\Phi^+_{\Gamma,v}S)_v((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})$$

$$=((\Phi^+_{\Gamma,v}T)_v+(\Phi^+_{\Gamma,v}S)_v)((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})=(\Phi^+_{\Gamma,v}T+\Phi^+_{\Gamma,v}S)_v((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}),$$

$$(\Phi^+_{\Gamma,v}(TS))_v((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})=((TS)_{s(\alpha)}x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}=(T_{s(\alpha)}S_{s(\alpha)}x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}$$

$$=(\Phi^+_{\Gamma,v}T)_v((S_{s(\alpha)}x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})=(\Phi^+_{\Gamma,v}T)_v(\Phi^+_{\Gamma,v}S)_v((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})=((\Phi^+_{\Gamma,v}T)(\Phi^+_{\Gamma,v}S))_v((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}),$$

$$(\Phi^+_{\Gamma,v}(\lambda T))_v((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})=((\lambda T)_{s(\alpha)}x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}=\lambda(T_{s(\alpha)}x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}$$

$$=\lambda(\Phi^+_{\Gamma,v}T)_v((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})=(\lambda\Phi^+_{\Gamma,v}T)_v((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}),$$

则

$$(\Phi^+_{\Gamma,v}(T+S))_v=(\Phi^+_{\Gamma,v}T+\Phi^+_{\Gamma,v}S)_v,\ (\Phi^+_{\Gamma,v}(TS))_v=((\Phi^+_{\Gamma,v}T)(\Phi^+_{\Gamma,v}S))_v,\ (\Phi^+_{\Gamma,v}(\lambda T))_v=(\lambda\Phi^+_{\Gamma,v}T)_v.$$

对$u\in V$, $u\neq v$, 有

$$(\Phi^+_{\Gamma,v}(T+S))_u=(T+S)_u=T_u+S_u=(\Phi^+_{\Gamma,v}T)_u+(\Phi^+_{\Gamma,v}S)_u=(\Phi^+_{\Gamma,v}T+\Phi^+_{\Gamma,v}S)_u,$$

$$(\Phi^+_{\Gamma,v}(TS))_u=(TS)_u=T_uS_u=(\Phi^+_{\Gamma,v}T)_u(\Phi^+_{\Gamma,v}S)_u=((\Phi^+_{\Gamma,v}T)(\Phi^+_{\Gamma,v}S))_u,$$

$$(\Phi^+_{\Gamma,v}(\lambda T))_u=(\lambda T)_u=\lambda T_u=\lambda(\Phi^+_{\Gamma,v}T)_u=(\lambda\Phi^+_{\Gamma,v}T)_u,$$

故

$$\Phi^+_{\Gamma,v}(T+S)=\Phi^+_{\Gamma,v}T+\Phi^+_{\Gamma,v}S,\quad \Phi^+_{\Gamma,v}(TS)=\Phi^+_{\Gamma,v}(T)\Phi^+_{\Gamma,v}(S),\quad \Phi^+_{\Gamma,v}(\lambda T)=\lambda\Phi^+_{\Gamma,v}(T).$$

综上可得, $\Phi^+_{\Gamma,v}:End(X,f)\to End(\Phi^+_{\Gamma,v}(X,f))$是个代数映射.

定理3.6 设$\Gamma=(V,E,s,r)$是有限箭图, $v\in V$是Γ的收点, (X,f)是Γ的Banach表示. 若(X,f)在v是满的, 则映射$\Phi^+_{\Gamma,v}:End(X,f)\to End(\Phi^+_{\Gamma,v}(X,f))$是个代数同构.

证明 记$(Y,g)=\Phi^{+}_{\Gamma,v}(X,f)$, 由引理3.5可知映射$\Phi^{+}_{\Gamma,v}:End(X,f)\to End(Y,g)$是个代数映射.

先证$\Phi^{+}_{\Gamma,v}$是单的. 设$T\in End(X,f)$满足$S=\Phi^{+}_{\Gamma,v}(T)=0$. 当$u\in V$, $u\neq v$时, 有$T_u=S_u=0$. 由于v 是Γ的收点, 则对任意$\alpha\in E^v$, $r(\alpha)=v$, $s(\alpha)\neq v$, 故$T_{s(\alpha)}=0$. 对任意$x_{s(\alpha)}\in X_{s(\alpha)}$, 由于$T\in End(X,f)$, 则

$$T_v(\sum_{\alpha\in E^v}f_\alpha(x_{s(\alpha)}))=T_{r(\alpha)}(\sum_{\alpha\in E^v}f_\alpha(x_{s(\alpha)}))=\sum_{\alpha\in E^v}T_{r(\alpha)}f_\alpha(x_{s(\alpha)})=\sum_{\alpha\in E^v}f_\alpha T_{s(\alpha)}(x_{s(\alpha)})=0.$$

由于(X,f)在v是满的, 即$\sum\limits_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}f_\alpha=X_v$, 则$T_v=0$, 故$T=(T_u)_{u\in V}=0$, 所以$\Phi^{+}_{\Gamma,v}$是单的.

下证$\Phi^{+}_{\Gamma,v}$是满的. 设$S=(S_u)_{u\in V}\in End(Y,g)$. 对$u\in V$, $u\neq v$, 令$T_u=S_u$. 由于对任意$\alpha\in E^v$, $s(\alpha)\neq v$, 又由于(X,f)在v是满的, 即$\sum\limits_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im}f_\alpha=X_v$, 则可定义算子

$$T_v:X_v\to X_v:\ T_v(\sum_{\alpha\in E^v}f_\alpha(x_{s(\alpha)}))=\sum_{\alpha\in E^v}f_\alpha T_{s(\alpha)}(x_{s(\alpha)}),\ x_{s(\alpha)}\in X_{s(\alpha)}.$$

若存在$x'_{s(\alpha)}\in X_{s(\alpha)}$, $\alpha\in E^v$, 使得$\sum\limits_{\alpha\in E^v}f_\alpha(x_{s(\alpha)})=\sum\limits_{\alpha\in E^v}f_\alpha(x'_{s(\alpha)})$, 则

$$h_v((x_{s(\alpha)}-x'_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})=\sum_{\alpha\in E^v}f_\alpha(x_{s(\alpha)}-x'_{s(\alpha)})=\sum_{\alpha\in E^v}f_\alpha(x_{s(\alpha)})-\sum_{\alpha\in E^v}f_\alpha(x'_{s(\alpha)})=0$$

其中h_v如定义2.9(1), 即$(x_{s(\alpha)}-x'_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}\in\ker h_v=Y_v$. 故$S_v((x_{s(\alpha)}-x'_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})\in S_v(Y_v)\subseteq Y_v=\ker h_v$, 即

$$0=h_v(S_v((x_{s(\alpha)}-x'_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}))=\sum_{\beta\in E^v}f_\beta g_{\overline{\beta}}(S_v((x_{s(\alpha)}-x'_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})).$$

对任意$\beta\in E^v$, 则$r(\beta)=s(\overline{\beta})=v$, $s(\beta)=r(\overline{\beta})\neq v$. 由于$S=(S_u)_{u\in V}\in End(Y,g)$, 则

$$g_{\overline{\beta}}(S_v((x_{s(\alpha)}-x'_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}))=g_{\overline{\beta}}S_{s(\overline{\beta})}((x_{s(\alpha)}-x'_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})=S_{r(\overline{\beta})}g_{\overline{\beta}}((x_{s(\alpha)}-x'_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})$$

$$=S_{s(\beta)}(x_{s(\beta)}-x'_{s(\beta)})=T_{s(\beta)}(x_{s(\beta)}-x'_{s(\beta)}),$$

故

$$0=\sum_{\beta\in E^v}f_\beta T_{s(\beta)}(x_{s(\beta)}-x'_{s(\beta)})=\sum_{\beta\in E^v}f_\beta T_{s(\beta)}x_{s(\beta)}-\sum_{\beta\in E^v}f_\beta T_{s(\beta)}x'_{s(\beta)},$$

即$\sum\limits_{\beta\in E^v}f_\beta T_{s(\beta)}x_{s(\beta)}=\sum\limits_{\beta\in E^v}f_\beta T_{s(\beta)}x'_{s(\beta)}$, 故$T_v$是确定的. 显然$T_v$是线性的.

由于(X,f)在v是满的, 则h_v是满的. 由开映射定理, 存在常数$M>0$, 使得对任意$(x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}$

$\in \bigoplus_{\alpha\in E^v} X_{s(\alpha)}$,

$$\|(x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}\| \le M\|h_v((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})\| = M\|\sum_{\alpha\in E^v} f_\alpha(x_{s(\alpha)})\|.$$

由于Γ是有限箭图，则E^v是有限元集，可设E^v是K元集. 对任意$x \in X_v$，由于(X,f)在v是满的，即$\sum_{\alpha\in E^v}\mathrm{Im} f_\alpha = X_v$，则存在$(x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v} \in \bigoplus_{\alpha\in E^v} X_{s(\alpha)}$，使得$x = \sum_{\alpha\in E^v} f_\alpha(x_{s(\alpha)})$. 由于对角算子$(f_\alpha T_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v} \in B(\bigoplus_{\alpha\in E^v} X_{s(\alpha)}, \bigoplus_{\alpha\in E^v} X_{r(\alpha)})$, 则

$$\|T_v x\| = \|T_v(\sum_{\alpha\in E^v} f_\alpha(x_{s(\alpha)}))\| = \|\sum_{\alpha\in E^v} f_\alpha T_{s(\alpha)}(x_{s(\alpha)})\| \le \sum_{\alpha\in E^v}\|f_\alpha T_{s(\alpha)}(x_{s(\alpha)})\|$$

$$\le K^2(\sum_{\alpha\in E^v}\|f_\alpha T_{s(\alpha)}(x_{s(\alpha)})\|^2)^{\frac{1}{2}} = K^2\|((f_\alpha T_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})\|$$

$$\le K^2\|(f_\alpha T_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}\|\|(x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}\| \le K^2\|(f_\alpha T_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}\| \cdot M\|\sum_{\alpha\in E^v} f_\alpha(x_{s(\alpha)})\|$$

$$= K^2 M\|(f_\alpha T_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}\|\|x\|,$$

故$T_v \in B(X_v)$.

对任意$\alpha \in E^v$, 则$r(\alpha) = v$. 对任意$x_{s(\alpha)} \in X_{s(\alpha)}$, 令

$$x_{s(\gamma)} = \begin{cases} x_{s(\alpha)}, & \gamma = \alpha, \\ 0, & \gamma \ne \alpha, \end{cases} \gamma \in E^v,$$

则

$$T_v f_\alpha(x_{s(\alpha)}) = T_v(\sum_{\gamma\in E^v} f_\gamma(x_{s(\gamma)})) = \sum_{\gamma\in E^v} f_\gamma T_{s(\gamma)}(x_{s(\gamma)}) = f_\alpha T_{s(\alpha)}(x_{s(\alpha)}),$$

即$T_{r(\alpha)} f_\alpha = T_v f_\alpha = f_\alpha T_{s(\alpha)}$. 对任意$\alpha \in E\backslash E^v$, 则$s(\alpha) \ne v$, $r(\alpha) \ne v$, 故

$$T_{r(\alpha)} f_\alpha = S_{r(\alpha)} g_\alpha = g_\alpha S_{s(\alpha)} = f_\alpha T_{s(\alpha)}.$$

因此$T = (T_u)_{u\in V} \in End(X,f)$.

对$u \in V$, $u \ne v$, 有$S_u = T_u = (\Phi^+_{\Gamma,v} T)_u$. 由于$S = (S_u)_{u\in V} \in End(Y,g)$, 则对任意$(x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v} \in$

Y_v, 有$S_v((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})\in Y_v$. 又由于对任意$\beta\in E^v$, 有$r(\beta)=s(\overline{\beta})=v$, $s(\beta)=r(\overline{\beta})\neq v$, 则

$$S_v((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v})=(g_{\overline{\beta}}S_v((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}))_{\beta\in E^v}=(g_{\overline{\beta}}S_{s(\overline{\beta})}((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}))_{\beta\in E^v}$$

$$=(S_{r(\overline{\beta})}g_{\overline{\beta}}((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}))_{\beta\in E^v}=(S_{s(\beta)}x_{s(\beta)})_{\beta\in E^v}=(T_{s(\beta)}x_{s(\beta)})_{\beta\in E^v}=(\Phi^+_{\Gamma,v}T)_v((x_{s(\alpha)})_{\alpha\in E^v}),$$

即$S_v=(\Phi^+_{\Gamma,v}T)_v$. 故$\Phi^+_{\Gamma,v}(T)=S$. 因此$\Phi^+_{\Gamma,v}$是满的.

综上所述, 映射$\Phi^+_{\Gamma,v}:End(X,f)\to End(\Phi^+_{\Gamma,v}(X,f))$是个代数同构.

基金项目

国家自然科学基金(No. 11971108)。

参考文献

[1] Gabriel, P. (1972) Unzerlegbare Darstellungen I. *Manuscripta Mathematica*, **6**, 71-103. https://doi.org/10.1007/BF01298413

[2] Bernstein, I.N., Gelfand, I.M. and Ponomarev, V.A. (1973) Coxeter Functors and Gabriel's Theorem. *Russian Mathematical Surveys*, **28**, 17-32. https://doi.org/10.1070/RM1973v028n02ABEH001526

[3] Brenner, S. (1967) Endomorphism Algebras of Vector Spaces with Distinguished Sets of Subspaces. *Journal of Algebra*, **6**, 100-114. https://doi.org/10.1016/0021-8693(67)90016-6

[4] Donovan, P. and Freislish, M.R. (1973) The Representation Theory of Finite Graphs and Associated Algebras. In: *Carleton Mathematical Lecture Notes*, Vol. 5, Carleton University, Ottawa, 1-119.

[5] Dlab, V. and Ringel, C.M. (1976) Indecomposable Representations of Graphs and Algebras. In: *Memoirs of the AMS*, Vol. 6, American Mathematical Society, Providence, RI. https://doi.org/10.1090/memo/0173

[6] Gabriel, P. and Roiter, A.V. (1997) Representations of Finite-Dimensional Algebras. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-58097-0

[7] Kac, V.G. (1980) Infinite Root Systems, Representations of Graphs and Invariant Theory. *Inventiones Mathematicae*, **56**, 57-92. https://doi.org/10.1007/BF01403155

[8] Nazarova, L.A. (1973) Representation of Quivers of Infinite Type. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Khimicheskaya*, **37**, 752-791.

[9] Krause, H. and Ringel, C.M. (2000) Infinite Length Modules. Birkhauser, Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8426-6

[10] Reiten, I. and Ringel, C.M. (2006) Infinite Dimensional Representations of Canonical Algebras. *Canadian Journal of Mathematics*, **58**, 180-224. https://doi.org/10.4153/CJM-2006-008-1

[11] Kruglyak, S.A. and Roiter, A.V. (2005) Locally Scalar Representations of Graphs in the Category of Hilbert Spaces. *Functional Analysis and Its Applications*, **39**, 91-105. https://doi.org/10.1007/s10688-005-0022-8

[12] Enomoto, M. and Watatani, Y. (2009) Indecomposable Representations of Quivers on Infinite-Dimensional Hilbert Spaces. *Journal of Functional Analysis*, **256**, 959-991. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2008.12.011