Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(1), 197-208
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.121024

Hans汉斯

测度泛函微分方程的Lyapunov稳定性

周云菲，李宝麟

西北师范大学，甘肃 兰州

收稿日期：2021年12月18日；录用日期：2022年1月20日；发布日期：2022年1月27日

摘 要

利用广义常微分方程与测度泛函微分方程的等价关系，定义了测度泛函微分方程的稳定，渐进稳定及指数稳定的概念，并借助此概念及Lyapunov泛函证明了测度泛函微分方程稳定性的相关定理。

关键词

广义常微分方程，测度泛函微分方程，Lyapunov泛函，稳定，渐进稳定，指数稳定

Lyapunov Stability of Measure Functional Differential Equations

Yunfei Zhou, Baolin Li

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Dec. 18th, 2021; accepted: Jan. 20th, 2022; published: Jan. 27th, 2022

Abstract

By using the equivalent relation between generalized ordinary differential equations and measure functional differential equations, we define notions of the stability, asymptotic and exponential stability of measure function differential equations. Furthermore, according to the notions and Lyapunov function, the theorems of Measure functional differential equations are established.

Keywords

Generalized Ordinary Differential Equations, Measure Functional Differential Equations, Lyapunov Function, Stability, Asymptotic Stability, Exponential Stability

文章引用: 周云菲, 李宝麟. 测度泛函微分方程的 Lyapunov 稳定性[J]. 理论数学, 2022, 12(1): 197-208.
DOI: 10.12677/pm.2022.121024

1. 引言

泛函微分方程，测度泛函微分方程，脉冲泛函微分方程及时间尺度上泛函动力方程，近年来受到了许多学者的关注。1966 年，F. Oliva 等学者在文献[1]中首次提出将泛函微分方程转化为广义常微分方程的思想。2012 年，M. Federson 等学者在文献[2]中建立了测度泛函微分方程

$$\begin{cases} y(t)=y(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(y_s,s)\mathrm{d}g(s), & t\in[t_0,+\infty) \\ y_{t_0}=\phi, \end{cases} \tag{1.1}$$

与广义常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=DF(x,t) \tag{1.2}$$

的等价关系，并对解的存在唯一性，解对参数的连续依赖性，以及时间尺度上的泛函动力方程的周期平均化作出了系统研究。其中，$r,t_0\in\mathbb{R}$，$r>0$，$y_t:[-r,0]\to\mathbb{R}^n$，$y_t(\theta)=y(t+\theta)$，$\theta\in[-r,0]$。

$g:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是不减函数，$f:S\times[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}^n$，

$$S=\{y_t,y\in O,t\in[t_0,+\infty)\}\subset BG([-r,0],\mathbb{R}^n) \tag{1.3}$$

$O\subset BG([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ 是一个具有延拓性(见定义 2.7)的开集，且 f 满足下列条件：

(A_1) 对每一个 $y\in O$，$s_1,s_2\in[t_0,+\infty)$，Kurzweil-Henstock-Stieltjes 积分 $\int_{s_1}^{s_2} f(y_s,s)\mathrm{d}g(s)$ 存在。

(A_2) 存在一个关于 g 的局部 Kurzweil-Henstock-Stieltjes 可积函数 $M:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}^+$，使得对每一个 $y\in O$，$s_1,s_2\in[t_0,+\infty)$，有

$$\left|\int_{s_1}^{s_2} f(y_s,s)\mathrm{d}g(s)\right|\le\int_{s_1}^{s_2} M(s)\mathrm{d}g(s).$$

(A_3) 存在一个关于 g 的局部 Kurzweil-Henstock-Stieltjes 可积函数 $L:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}^+$，使得对每一个 $y,z\in O$，$s_1,s_2\in[t_0,+\infty)$，有

$$\left|\int_{s_1}^{s_2}\left[f(y_s,s)-f(z_s,s)\right]\mathrm{d}g(s)\right|\le\int_{s_1}^{s_2} L(s)\|y_s-z_s\|_\infty\mathrm{d}g(s).$$

测度泛函微分方程(1.1)的微分等价形式为

$$\begin{cases} Dy=f(y_t,t)Dg, \\ y_{t_0}=\phi, \end{cases}$$

其中 Dy,Dg 分别表示 y,g 的分布导数[3]。

稳定性作为广义常微分方程的基本性质，长期以来受到了许多学者的广泛研究。在文献[4]中，S. M. Afons 等学者讨论了广义常微分方程和脉冲滞后型微分方程的 Lipschitz 稳定性。在文献[5]中，M. Federson 等学者讨论了广义常微分方程的正则稳定性与测度泛函微分方程的积分稳定性之间的等价关系，并在文献[6]中研究了广义常微分方程的正则稳定性和测度泛函微分方程的积分稳定性的逆定理。在文献[7]中，

M. Federson 等学者建立了广义常微分方程饱和解的存在唯一性定理。在文献[8]中，通过利用广义常微分方程饱和解的存在唯一性定理以及 Lyapunov 泛函，M. Federson 等学者进一步研究了广义常微分方程的一致稳定性和一致渐进稳定性。在文献[9]中，Claudio A. Gallegos 等学者继续研究了广义常微分方程的稳定性，渐进稳定性及指数稳定性的相关结果。

以上工作介绍了广义常微分方程稳定性的相关结果，由于广义常微分方程(1.2)在一定条件下与测度泛函微分方程(1.1)等价，我们考虑将此结果进一步推广到测度泛函微分方程。首先，根据测度泛函微分方程饱和解的存在唯一性定理，定义了测度泛函微分方程(1.1)的稳定性，渐进稳定性及指数稳定性的概念。其次，借助测度泛函微分方程的 Lyapunov 泛函，获得了测度泛函微分方程(1.1)的稳定性，渐进稳定性及指数稳定性定理。

本文包括三个部分：第二部分介绍了本文所用到的一些基本概念及定理，第三部分定义了测度泛函微分方程(1.1)的稳定，渐进稳定及指数稳定性的概念，进一步建立并证明了测度泛函微分方程的稳定，渐进稳定及指数稳定性定理。

2. 预备知识

2.1. 广义常微分方程的相关概念

设 X 是一个定义了范数 $\|\cdot\|$ 的 Banach 空间，$B_c=\{x\in X,\|x\|<c\}$，$\Omega_1=B_c\times[t_0,+\infty),t_0\ge 0$。

定义 2.1 [2] 称函数 $U:[a,b]\times[a,b]\to X$ 在区间 $[a,b]$ 上是 Kurzweil 可积的，如果存在向量 $I\in\mathbb{R}^n$，使得对任意的 $\varepsilon>0$，存在正值函数 $\delta(t):[a,b]\to(0,+\infty)$，使得对 $[a,b]$ 上的任何 δ 精细分划 D：$a=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_k=b$ 及 $\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_k\}$，有

$$\left\|\sum_{i=1}^{k}\left[U(\tau_i,\alpha_i)-U(\tau_i,\alpha_{i-1})\right]-I\right\|<\varepsilon,$$

其中 $\tau_i\in[\alpha_{i-1},\alpha_i]\subset[\tau_i-\delta(\tau_i),\tau_i+\delta(\tau_i)]$，$i=1,2,\cdots,k$，向量 $I\in\mathbb{R}^n$ 称为 U 在区间 $[a,b]$ 上的 Kurzweil 积分，记作 $I=\int_a^b DU(\tau,t)$。

特别地，当 $U(\tau,t)=f(\tau)g(t)$ 时，$\int_a^b DU(\tau,t)=\int_a^b f(s)\mathrm{d}g(s)$。

引理 2.1 [2]若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 是正则函数，$g:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 是不减函数，则积分 $\int_a^b f(s)\mathrm{d}g(s)$ 存在。

定义 2.2 [2]称函数 $x:[a,b]\to X,[a,b]\in[t_0,+\infty)$ 为广义常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=DF(x,t)$$

的解，是指对所有的 $t\in[a,b]$，$(x(t),t)\in\Omega_1$，有

$$x(s_2)-x(s_1)=\int_{s_1}^{s_2}DF(x(\tau),t),$$

其中，$s_1,s_2\in[a,b]$。

定义 2.3 [2]若存在一个不减函数 $h:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}$，使得 $F:\Omega_1\to X$，满足

(B_1) 对所有 $(x,s_i)\in\Omega_1,i=1,2$，有

$$\|F(x,s_2)-F(x,s_1)\|\le|h(s_2)-h(s_1)|.$$

(B_2) 对所有 $(x,s_i),(y,s_i)\in\Omega_1,i=1,2$，有

$$\left\|F(x,s_2)-F(x,s_1)-F(y,s_2)+F(y,s_1)\right\|\le\left|h(s_2)-h(s_1)\right|\left\|x-y\right\|.$$

则称 $F:\Omega_1\to X$ 属于 $\mathcal{F}(\Omega_1,h)$，简记为 $F\in\mathcal{F}(\Omega_1,h)$。

引理 2.2 [7]假设 $F\in\mathcal{F}(\Omega_1,h)$，其中，$h:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是一个左连续的不减函数，$\Omega_1=\Omega_F:=\left\{(x,t)\in\Omega_1, x+F(x,t^+)-F(x,t)\in B_c\right\}$，则对每个 $(x_0,s_0)\in\Omega_1$，广义常微分方程(1.2)存在唯一满足初值条件 $x(s_0)=x_0$ 的饱和解 $x:[s_0,\omega(x_0,s_0))\to X$，其中 $\omega(x_0,s_0)\le+\infty$。

注 2.1 [7]若对每个 $t\in[s_0,\omega(x_0,s_0))$，都有 $x(t)\in K$，其中 K 是 B_c 中的紧子集，则 $\omega(x_0,s_0)=+\infty$。

定义 2.4 [9]广义常微分方程(1.2)的平凡解 $x\equiv 0$ 是

(i) 稳定的。对每个 $s_0\ge t_0$ 及任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(s_0,\varepsilon)>0$，使得如果 $x_0\in B_c$，且 $\|x_0\|<\delta$，则对 $\forall t\in[s_0,\omega(x_0,s_0))$，有 $\|x(t,s_0,x_0)\|=\|x(t)\|<\varepsilon$。

(ii) 渐进稳定的。广义常微分方程(1.2)的平凡解是稳定的，且对每个 $s_0\in[t_0,+\infty)$，存在 $\eta=\eta(s_0)>0$。使得如果 $\|x_0\|<\eta$，则当 $t\to+\infty$ 时，有 $\|x(t,s_0,x_0)\|=\|x(t)\|\to 0$。

(iii) 指数稳定的。若存在常数 $\rho,a,b>0$，使得当 $s_0\ge t_0, x_0\in B_c$ 且 $\|x_0\|<\rho$ 时，对任意的 $t\in[s_0,\omega(x_0,s_0))$，有 $\|x(t,s_0,x_0)\|=\|x(t)\|<a\|x_0\|\mathrm{e}^{-b(t-s_0)}$。

定义 2.5 [9]称泛函 $V:[t_0,+\infty)\times B_c\to\mathbb{R}$ 是关于广义常微分方程(1.2)的 Lyapunov 泛函，是指

(i) 对任意的 $x\in B_c$，泛函 $V(\cdot,x):[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上左连续。

(ii) 对每个 $(x_0,s_0)\in\Omega_1$，$[s_0,\omega)\ni t\to V(t,x(t))$ 是不增函数，其中 $x(t)=x(t,s_0,x_0)$ 是广义常微分方程(1.2)的饱和解。

定义 2.6 [9]如果 $W:[t_0,+\infty)\to[t_0,+\infty)$ 是一个单调递增函数，且 $W(0)=0$，则称 $W:[t_0,+\infty)\to[t_0,+\infty)$ 是一个 Hahn class 函数。

引理 2.3 [9]假设 $F\in\mathcal{F}(\Omega_1,h)$，$V:[t_0,+\infty)\times B_c\to\mathbb{R}$ 是关于广义常微分方程(1.2) Lyapunov 泛函，W_1 是一个 Hahn class 函数，如果满足

(C_1) 对 $\forall t\in[t_0,+\infty)$，$V(t,0)=0$。

(C_2) 对广义常微分方程(1.2)的每个解 $x:I\to B_c, I\in[t_0,+\infty), t\in I$，有

$$W_1(\|x(t)\|)\le V(t,x(t)),$$

则广义常微分方程(1.2)的平凡解 $x\equiv 0$ 是稳定的。

引理 2.4 [9]假设 $F\in\mathcal{F}(\Omega_1,h)$，且对每个 $(x_0,s_0)\in\Omega_1$，都有 $\omega(x_0,s_0)=+\infty$。$V:[t_0,+\infty)\times B_c\to\mathbb{R}$ 是关于广义常微分方程(1.2)的 Lyapunov 泛函。W_1 是一个 Hahn class 函数，使得引理 2.3 的(C_1)和(C_2)成立。进一步，假设存在另一个 Hahn class 函数 W_2 满足

(C_3) 对广义常微分方程(1.2)每个饱和解 $x(t)=x(t,s_0,x_0)$，$(x_0,s_0)\in\Omega_1$，$t,s\in[s_0,+\infty)$，当 $t\ge s$ 时，有

$$V(t,x(t))-V(s,x(s))\le-\int_s^t W_2(V(\xi,x(\xi)))\mathrm{d}l(\xi),$$

其中，$l:[s_0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是增函数，使得 $\lim\limits_{t\to+\infty} l(t)=+\infty$。

则广义常微分方程(1.2)的平凡解 $x\equiv 0$ 是渐进稳定的。

引理 2.5 [9]假设 $F\in\mathcal{F}(\Omega_1,h)$，$V:[t_0,+\infty)\times B_c\to\mathbb{R}$ 是关于广义常微分方程(1.2) Lyapunov 泛函。若存在正常数 σ,α,β,p，满足

(D_1) 对任意的 $t \ge t_0, x \in B_c$，有 $\sigma\|x\|^p \le V(t,x) \le \beta\|x\|^p$。

(D_2) 对广义常微分方程(1.2)每个饱和解 $x(t) = x(t,s_0,x_0)$，$(x_0,s_0) \in \Omega_1$，$t,s \in [s_0,+\infty)$，当 $t \ge s$ 时，有

$$V(t,x(t)) - V(s,x(s)) \le -\alpha\int_s^t V(\xi,x(\xi))\mathrm{d}\xi,$$

则广义常微分方程(1.2)的平凡解 $x \equiv 0$ 是指数稳定的。

2.2. 测度泛函微分方程的相关概念

设 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ 是一个紧区间，如果函数 f 的左右极限 $\lim\limits_{s\to t^-} f(s) = f(t^-), t \in (a,b]$，$\lim\limits_{s\to t^+} f(s) = f(t^+), t \in [a,b)$ 分别存在，则称函数 $f:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ 为 $[a,b]$ 上的正则函数。记 $G([a,b],\mathbb{R}^n)$ 为所有正则函数 $f:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ 构成的空间，定义范数 $\|f\|_\infty = \sup\limits_{a\le t\le b}\|f(t)\|$。记 $BG([t_0,+\infty),\mathbb{R}^n)$ 为 $G([t_0,+\infty),\mathbb{R}^n)$ 中有界函数构成的空间，定义范数 $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t_0\le t<+\infty}\|f(t)\|$，则 $BG([a,b],\mathbb{R}^n)$ 是一个 Banach 空间。

定义 2.7 [6] 设 $O \subset BG([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ 是一个开集，O 具有延拓性是指对每一个 $y \in O$，$\bar{t} \in [t_0-r,+\infty)$，都有 $\bar{y} \in O$，其中函数 $\bar{y}$ 定义为

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} y(t), & t_0 - r \le t \le \bar{t}, \\ y(\bar{t}), & \bar{t} < t < +\infty. \end{cases}$$

引理 2.6 [2]假设 $O \subset BG([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ 是具有延拓性质的开集，如果 $g:[t_0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 是不减函数，$f: S\times[t_0,+\infty) \to \mathbb{R}^n$ 满足条件(A_1)~(A_3)。定义如下函数

$$F(x,t)(\vartheta) = \begin{cases} 0, & t_0 - r \le \vartheta \le t_0, \\ \int_{t_0}^{\vartheta} f(x_s,s)\mathrm{d}g(s), & t_0 \le \vartheta < +\infty, \\ \int_t^{t_0} f(x_s,s)\mathrm{d}g(s), & t \le \vartheta < +\infty. \end{cases} \tag{2.1}$$

则函数 $F:\Omega \to BG([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ 属于 $\mathcal{F}(\Omega,h)$，其中

$$h(t) = \int_t^{t_0}[M(s)+L(s)]\mathrm{d}g(s),\ t \in [t_0,+\infty). \tag{2.2}$$

引理 2.7 [4]假设 $f: S\times[t_0,+\infty) \to \mathbb{R}^n$ 满足条件(A_1)~(A_3)，$g:[t_0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 是左连续的不减函数，如果对所有的 $(\phi,s_0) \in S\times[t_0,+\infty)$，有 $\phi(0) + f(\phi,s_0)\Delta^+ g(s_0) \in S$，则对每个 $(\phi,s_0) \in S\times[t_0,+\infty)$，存在测度泛函微分方程(1.1)的唯一饱和解 $y:[s_0-r,\omega(s_0,\phi)) \to \mathbb{R}^n$，使得 $y_{s_0} = \phi$，其中 $\omega(s_0,\phi) \le +\infty$。

引理 2.8 [6]设 $O \subset BG([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ 是具有延拓性质的开集，且 $\phi \in S$，其中 S 由(1.3)式给出。若 $g:[t_0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 是左连续的不减函数，$f: S\times[t_0,+\infty) \to \mathbb{R}^n$ 满足条件(A_1)~(A_3)，$F:\Omega \to BG([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ 由(2.1)式给出。

(i) 设 $s_0 \ge t_0$，$y:[s_0-r,\omega(s_0,\phi)) \to \mathbb{R}^n$ 是测度泛函微分方程

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(y_s,s)\mathrm{d}g(s), \\ y_{s_0} = \phi, \end{cases} \tag{2.3}$$

的解，对每个$t\in\left[s_0-r,\omega\left(s_0,\phi\right)\right)$，设

$$x(t)(\vartheta)=\begin{cases} y\left(s_0-r\right), & t_0\le\vartheta\le s_0-r,\\ y(\vartheta), & s_0-r\le\vartheta\le t,\\ y(t), & t\le\vartheta<+\infty. \end{cases}$$

则函数$x:\left[s_0,\omega\left(s_0,\phi\right)\right)\to O$是广义常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}=DF(x,t) \tag{2.4}$$

在初值条件

$$x\left(s_0\right)(\vartheta)=\begin{cases} \phi(-r), & t_0\le\vartheta\le s_0-r,\\ \phi\left(\vartheta-t_0\right), & s_0-r\le\vartheta\le t_0,\\ x\left(t_0\right)\left(t_0\right), & t_0\le\vartheta<+\infty. \end{cases} \tag{2.5}$$

下的解。

(ii) 反之，设$s_0\ge t_0,\phi\in S,x\left(s_0\right)\in O$由(2.5)式给出。若$x:\left[t_0,\omega\left(s_0,\phi\right)\right)\to O$是广义常微分方程(2.4)在初值条件$x\left(s_0\right)$下的解，则函数$y:\left[s_0-r,\omega\left(s_0,\phi\right)\right)\to\mathbb{R}^n$，被定义为

$$y(\vartheta)=\begin{cases} x\left(t_0\right)(\vartheta), & t_0-r\le\vartheta\le t_0,\\ x(\vartheta)(\vartheta), & t_0\le\vartheta<+\infty, \end{cases}$$

是测度泛函微分方程(2.3)在初值条件$y_{s_0}=\phi$下的解。

3. 主要结果

本节定义了测度泛函微分方程(1.1)的一些 Lyapunov 稳定性的概念并建立了相关定理。

考虑测度泛函微分方程(1.1)右端函数$f:S\times\left[t_0,+\infty\right)\to\mathbb{R}^n$满足条件($A_1$)~($A_3$)，$g:\left[t_0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$是不减的左连续函数，使得对每个$t\in\left[t_0,+\infty\right)$，有$f(0,t)=0$。这说明$y\equiv 0$是测度泛函微分方程(1.1)的一个解。此外，给定$t\ge t_0,\psi\in S$，假设对每个$(\psi,t)\in S\times\left[t_0,+\infty\right)$，有$\phi(0)+f(\psi,t)\Delta^+g(t)\in S$。因此，由引理 2.7，存在测度泛函微分方程(1.1)的唯一饱和解$\bar{y}:\left[t-r,\omega(\psi,t)\right)\to\mathbb{R}^n$。使得$\bar{y}_t=\psi$，其中$\omega(\psi,t)\le+\infty$。

定义 3.1 测度泛函微分方程(1.1)的平凡解$y\equiv 0$是

(i) 稳定的。对任意的$s_0\ge t_0$，以及任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta\left(s_0,\varepsilon\right)>0$，使得如果$\phi\in S$，且$\|\phi\|_\infty<\delta$，则对$\forall t\in\left[s_0,\omega\left(\phi,s_0\right)\right)$，有$\left\|\bar{y}_t\left(s_0,\phi\right)\right\|_\infty=\left\|\bar{y}_t\right\|_\infty<\varepsilon$。其中，$\bar{y}\left(t,s_0,\phi\right)$是测度泛函微分方程(1.1)在初值条件$\bar{y}_{s_0}=\phi$下的饱和解。

(ii) 渐进稳定的。测度泛函微分方程(1.1)的平凡解是稳定的，且对每个$s_0\ge t_0$，存在$\eta=\eta\left(s_0\right)>0$。使得如果$\|\phi\|_\infty<\eta$，则当$t\to+\infty$时，有$\left\|\bar{y}_t\left(s_0,\phi\right)\right\|_\infty=\left\|\bar{y}_t\right\|_\infty\to 0$。

(iii) 指数稳定的。若存在常数$\rho,a,b>0$，使得当$s_0\ge t_0,\phi\in S$且$\|\phi\|_\infty<\rho$时，对任意的$t\in\left[s_0,\omega\left(x_0,s_0\right)\right)$，有$\left\|y_t\left(s_0,\phi\right)\right\|_\infty=\left\|y_t\right\|_\infty<a\|\phi\|_\infty\mathrm{e}^{-b\left(t-s_0\right)}$。

定义 3.2 称泛函$U:\left[t_0,+\infty\right)\times S\to\mathbb{R}$是关于测度泛函微分方程(1.1)的 Lyapunov 泛函，是指

(i) 对任意的$\psi\in S$，泛函$U(\cdot,\psi):\left[t_0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$在$\left[t_0,+\infty\right)$上左连续。

(ii) 对每个$(t,\psi)\in\left[t_0,+\infty\right)\times S$，$\left[t_0,\omega\right)\ni t\to U(t,\psi)$是不增函数。其中$\psi=y_t$，$y$是测度泛函微分方

程的饱和解。

一方面，对于给定$t \ge t_0, \psi \in S$。假设对每个$(\psi, t) \in S \times [t_0, +\infty)$，有$\phi(0) + f(\psi, t)\Delta^+ g(t) \in S$。则由引理 2.7，存在测度泛函微分方程的唯一饱和解$y:[t-r, \omega(\psi, t)) \to \mathbb{R}^n$，使得$y_t = \psi$。又由引理 2.8 中(i)，可以找到广义常微分方程的一个解$x:[t, \omega(\psi, t)) \to O$，使得$x(t) = \bar{x}$，其中，

$$\tilde{x}(\vartheta) = \begin{cases} \psi(\vartheta - t), & t - r \le \vartheta \le t \\ \psi(0), & \vartheta \ge t \end{cases}$$

则$x(t)(t+\theta) = y(t+\theta)$，$\theta \in [-r, 0]$，即$y_t = (x(t))_t$。

另一方面，给定$t \ge t_0$，若$\tilde{x} \in BG([t-r, +\infty), \mathbb{R}^n)$，使得

$$\tilde{x}(\vartheta) = \begin{cases} \psi(\vartheta - t), & t - r \le \vartheta \le t \\ \psi(0), & \vartheta \ge t \end{cases}$$

则由引理 2.2，存在广义常微分方程的唯一饱和解$x:[t, \omega(\psi, t)) \to O$，使得$x(t) = \tilde{x}$，其中$\omega(\psi, t) \le +\infty$。又由引理(2.8)中(ii)，可以找到测度泛函微分方程的一个解$y:[t-r, \omega(\psi, t)) \to \mathbb{R}^n$，满足$y_t = \psi$，则$\psi = y_t = y_t(t, \psi) = x(t)_t$，此时，用$x_\psi(t)$替换$x(t)$，有$(x_\psi(t))_t = y_t(t, \psi) = \psi$。所以$(t, x_\psi(t)) \to (t, y_t(t, \psi))$是一个一一映射。

因此，对于给定的泛函$V:[t_0, +\infty) \times B_c \to \mathbb{R}$与泛函$U:[t_0, +\infty) \times S \to \mathbb{R}$，有如下关系：

$$V(t, x_\psi(t)) = U(t, y_t(t, \psi)). \tag{3.1}$$

注 3.1 给定$t \ge t_0$，由于

$$\begin{aligned} \|y_t(t, \psi)\|_\infty = \|y_t\|_\infty &= \sup_{-r \le \theta \le 0} |y(t+\theta)| = \sup_{t-r \le \vartheta \le t} |y(\vartheta)| = \sup_{t-r \le \vartheta \le t} |x_\psi(t)(\vartheta)| \\ &= \sup_{t-r \le \vartheta < +\infty} |x_\psi(t)(\vartheta)| = \|x_\psi(t)\|_\infty \end{aligned}$$

即$\|y_t(t, \psi)\|_\infty = \|x_\psi(t)\|_\infty$。

定理 3.1 假设$F \in \mathcal{F}(\Omega, h)$，$U:[t_0, +\infty) \times S \to \mathbb{R}$是关于测度泛函微分方程(1.1) Lyapunov 泛函，W_1是一个 Hahn class 函数，如果满足：

(E_1) 对任意的$t \in [t_0, +\infty)$，$U(t, 0) = 0$。

(E_2) 对每个$(t, \psi) \in [t_0, +\infty) \times S$，有

$$W_1(\|\psi\|) \le U(t, \psi),$$

则测度泛函微分方程(1.1)的平凡解$y \equiv 0$是稳定的。

证明： 设$V:[t_0, +\infty) \times O \to \mathbb{R}$是由(3.1)式所给定的泛函，下面我们证明广义常微分方程(1.2)的平凡解$x \equiv 0$是稳定的。

给定$t \ge t_0, \psi \in S$，设$y, \hat{y}:[t-r, \omega) \to O$是测度泛函微分方程的解，使得$y_t = \psi, \hat{y}_t = 0$。

由引理 2.8 中(i)可知，存在与$y, \hat{y}$相对应的广义常微分方程的解$x, \hat{x}$，使得$x_\psi(t) = y_t = \psi$，$\hat{x}_\psi(t) = \hat{y}_t = 0$。

从而对于给定的$t \ge t_0$，由条件(E_1)及(3.1)式，有

$$0 = U(t, 0) = U(t, \hat{y}_t) = V(t, \hat{x}_\psi(t)) = V(t, 0). \tag{3.2}$$

由条件(E_2)及(3.1)式，有

$$W_1\left(\left\|x_\psi(t)\right\|\right)=W_1\left(\left\|y_t\right\|\right)=W_1\left(\left\|\psi\right\|\right)\le U(t,\psi)=U(t,y_t)=V\left(t,x_\psi(t)\right)$$

即

$$W_1\left(\left\|x(t)\right\|\right)=V\left(t,x(t)\right). \tag{3.3}$$

则由(3.2)及(3.3)式可知，泛函 V 满足引理 2.3，则广义常微分方程(1.2)的平凡解 $x\equiv 0$ 是稳定的。从而对每个 $s_0\ge t_0$ 及任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(s_0,\varepsilon)>0$，使得如果 $x_0\in B_c$，且 $\|x_0\|<\delta$，则对 $\forall t\in\left[s_0,\omega(x_0,s_0)\right)$，有 $\left\|x(t,s_0,x_0)\right\|=\left\|x(t)\right\|<\varepsilon$。

设 $\phi\in S$，$\bar{y}:\left[s_0-r,+\infty\right)\to\mathbb{R}^n$ 是测度泛函微分方程关于初值问题 $\bar{y}_{s_0}=\phi$ 的一个饱和解，且有

$$\left\|\phi\right\|_\infty<\delta. \tag{3.4}$$

下证

$$\left\|\bar{y}_t(s_0,\phi)\right\|_\infty=\left\|\bar{y}_t\right\|_\infty<\varepsilon,\ \ t\in\left[s_0,\omega(x_0,s_0)\right). \tag{3.5}$$

令 $\bar{y}_t=\bar{y}_t(s_0,\phi)$，并且定义

$$\bar{x}(t)(\vartheta)=\begin{cases}\bar{y}(s_0-r), & t_0-r\le\vartheta\le s_0-r,\\ \bar{y}(\vartheta), & s_0-r\le\vartheta\le t,\\ \bar{y}(t), & t\le\vartheta<+\infty.\end{cases} \tag{3.6}$$

由引理 2.2，$\bar{x}(t)$ 是广义常微分方程在 $\left[t_0,\omega(x_0,s_0)\right)$ 上的一个饱和解，满足初值条件 $\bar{x}(s_0)=\bar{x}_0$，其中

$$\bar{x}_0(\vartheta)=\begin{cases}\phi(-r), & t_0-r\le\vartheta\le s_0-r,\\ \phi(\vartheta-t_0), & s_0-r\le\vartheta\le t,\\ \phi(0), & t\le\vartheta<+\infty.\end{cases} \tag{3.7}$$

由(3.4)及(3.7)式，有

$$\left\|\bar{x}_0\right\|_\infty=\sup_{t_0-r\le\vartheta<+\infty}\left|\bar{x}_0\right|=\left\|\phi\right\|_\infty<\delta,$$

从而由定义 3.1，对所有 $t\in\left[s_0,\omega(x_0,s_0)\right)$ 有

$$\left\|x(t)\right\|_\infty<\varepsilon. \tag{3.8}$$

因此由(3.1)及(3.8)式，对任意的 $t\in\left[s_0,\omega(x_0,s_0)\right)$，有

$$\begin{aligned}\left\|\bar{y}_t(s_0,\phi)\right\|_\infty&=\left\|\bar{y}_t\right\|_\infty=\sup_{-r\le\theta\le 0}\left|y(t+\theta)\right|\le\sup_{t_0-r\le\vartheta\le\upsilon}\left|\bar{y}(\vartheta)\right|=\sup_{t_0-r\le\vartheta\le\upsilon}\left|\bar{x}(t)(\vartheta)\right|\\&=\sup_{t_0-r\le\vartheta<+\infty}\left\|\bar{x}_\phi(t)(\vartheta)\right\|=\left\|\bar{x}_\phi(t)\right\|_\infty=\left\|x(t)\right\|_\infty<\varepsilon,\end{aligned}$$

则(3.5)式成立，即证测度泛函微分方程(1.1)的平凡解 $y\equiv 0$ 是稳定的。

定理 3.2 假设 $F\in\mathcal{F}(\Omega,h)$，且对每个 $(\phi,s_0)\in\Omega$，都有 $\omega(\phi,s_0)=+\infty$。如果 $U:\left[t_0,+\infty\right)\times S\to\mathbb{R}$ 是关于测度泛函微分方程(1.2)的 Lyapunov 泛函。W_1 是一个 Hahn class 函数，使得定理 3.1 的(E_1)和(E_2)成立。进一步，假设存在另一个 Hahn class 函数 W_2 满足：

(E_3)对测度泛函微分方程(1.1)在初值条件 $y_{s_0}=\phi$ 下的每个饱和解 $y(t)=y(t,s_0,\phi)$，$(\phi,s_0)\in\Omega$，

$\psi,\bar{\psi},\tilde{\psi}\in S$， $t,s\in\left[s_0,\omega\left(s_0,\phi\right)\right)$，当 $t\geq s$ 有

$$U\left(t,\psi\right)-U\left(s,\bar{\psi}\right)\leq-\int_s^t W_2\left(U\left(\xi,\tilde{\psi}\right)\right)\mathrm{d}l\left(\xi\right),$$

其中， $l:\left[t_0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ 是增函数，使得 $\lim\limits_{t\to+\infty}l\left(t\right)=+\infty$ 。

则测度泛函微分方程(1.1)的平凡解 $y\equiv0$ 是渐进稳定的。

证明：由于泛函 U 满足定理 3.1 的条件(E_1)和(E_2)，从而测度泛函微分方程(1.1)的平凡解 $y\equiv0$ 是稳定的，下面证明它是渐进稳定的。

给定 $s_0\geq t_0$，因为测度泛函微分方程的平凡解 $y\equiv0$ 是稳定的，所以存在 $\eta=\eta\left(s_0,c\right)>0$ $\left(0<\eta<c\right)$。设 $\phi\in S$，且 $\|\phi\|_\infty<\eta$ 。下证当 $t\to+\infty$ 时， $\left\|y_t\left(s_0,\phi\right)\right\|_\infty=\left\|y_t\right\|_\infty\to0$ 。

对 $\forall t\in\left[s_0,+\infty\right)$， $t\to U\left(t,\psi\right)$ 是不增函数，且有 $U\left(t,\psi\right)\geq W_1\left(\|\psi\|\right)\geq0$ ，从而由单调有界原理， $\lim\limits_{t\to+\infty}U\left(t,\psi\right)$ 极限存在。设 $\lim\limits_{t\to+\infty}U\left(t,\psi\right)=z$， $z\geq0$ 。

假设 $z>0$，则由条件(E_3)，对 $\forall t\in\left[s_0,+\infty\right)$，有

$$\begin{aligned}U\left(t,\psi\right)&\leq U\left(s_0,\phi\right)-\int_{s_0}^t W_2\left(U\left(s,\bar{\psi}\right)\right)\mathrm{d}l\left(s\right)\\&\leq U\left(s_0,\phi\right)-\int_{s_0}^t W_2\left(z\right)\mathrm{d}l\left(s\right)\\&=U\left(s_0,\phi\right)-W_2\left(z\right)\left(l\left(t\right)-l\left(s_0\right)\right).\end{aligned}$$

因为 l 是增函数且 $\lim\limits_{t\to+\infty}l\left(t\right)=+\infty$，从而上式右端

$$U\left(s_0,\phi\right)-W_2\left(z\right)\left(l\left(t\right)-l\left(s_0\right)\right)\leq0,\quad\left(t\to+\infty\right)$$

这与上式左端

$$U\left(t,\psi\right)>0,\quad\left(t\to+\infty\right)$$

相矛盾。因此 $z=0$，即

$$\lim_{t\to+\infty}U\left(t,\psi\right)=0.\tag{3.9}$$

由条件(E_2)可知， $W_1\left(\|\psi\|\right)\leq U\left(t,\psi\right)$，则

$$\lim_{t\to+\infty}W_1\left(\|\psi\|\right)=0.\tag{3.10}$$

又因为 W_1 是一个 Hahn class 函数，从而当 $t\to+\infty$ 时， $\|\psi\|\to0$，即

$$\left\|y_t\left(s_0,\phi\right)\right\|_\infty=\left\|y_t\right\|_\infty\to0.$$

因此测度泛函微分方程(1.1)的平凡解 $y\equiv0$ 是渐进稳定的。

定理 3.3 假设 $F\in\mathcal{F}\left(\Omega,h\right)$， $U:\left[t_0,+\infty\right)\times S\to\mathbb{R}$ 是关于测度泛函微分方程(1.1)的 Lyapunov 泛函。若存在正常数 σ,α,β,p，满足

(F_1) 对任意的 $t\geq t_0,y_t\in S$，有 $\sigma\|\psi\|^p\leq U\left(t,\psi\right)\leq\beta\|\psi\|^p$ 。

(F_2) 对广义常微分方程(1.2)每个饱和解 $y\left(t\right)=y\left(t,s_0,x_0\right)$， $\left(x,s_0\right)\in\Omega$， $\psi,\bar{\psi},\tilde{\psi}\in S$， $t,s\in\left[s_0,+\infty\right)$，当 $t\geq s$ 时，有

$$U\left(t,\psi\right)-U\left(s,\bar{\psi}\right)\leq-\alpha\int_s^t U\left(\xi,\tilde{\psi}\right)\mathrm{d}\xi,$$

则测度泛函微分方程(1.1)的平凡解 $y\equiv0$ 是指数稳定的。

证明：由于泛函 $U:[t_0,+\infty)\times S\to\mathbb{R}$ 满足条件(F_1)，(F_2)，则对任意的 $t\in[t_0,+\infty)$，有

$$\sigma\|\psi\|^p\le U(t,\psi)\le\beta\|\psi\|^p.$$

这说明泛函 U 满足定理 3.1 的条件(E_1)，(E_2)，从而测度泛函微分方程(1.1)的平凡解 $y\equiv 0$ 是稳定的。下面证明它是指数稳定的。

一方面，设 $s_0\ge t_0,\phi\in S,y(t,s_0,\phi)$ 是测度泛函微分方程(1.1)在 $[s_0,\omega(\phi,s_0))$ 上的饱和解，使得 $y_{s_0}=\phi$。由于 $t\to U(t,\psi)$ 是不增函数，则由条件(F_2)可得，对 $s_0\le\theta_1\le\theta_2<\omega$，有

$$\begin{aligned}U(\theta_1,y_{\theta_1})-U(\theta_2,y_{\theta_2})&\ge\alpha\int_{\theta_1}^{\theta_2}U(\xi,y_\xi)\mathrm{d}\xi\ge\alpha\int_{\theta_1}^{\theta_2}U(\theta_2,y_{\theta_2})\mathrm{d}\xi\\&=\alpha(\theta_2-\theta_1)U(\theta_2,y_{\theta_2}).\end{aligned}$$

即对任意的 $s_0\le\theta_1\le\theta_2<\omega$，有

$$U(\theta_1,y_{\theta_1})\ge(1+\alpha(\theta_2-\theta_1))U(\theta_2,y_{\theta_2}).\tag{3.11}$$

另一方面，假设对任意的 $s\in[0,\omega-s_0)$，都有 $U(s+s_0,y_{s+s_0})\le \mathrm{e}^{-\alpha s}U(s_0,\phi)$。

设 $n\in\mathbb{N}$ 是任意的一个自然数，对 $\forall i\in\{0,1,\cdots,n\}$，定义

$$\tau_i:=\frac{is}{n}+s_0$$

其中，$s_0=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_n=s+s_0$，$\tau_i-\tau_{i-1}=\dfrac{s}{n}$。

由(3.11)式，对 $\forall i\in\{0,1,\cdots,n\}$，有

$$U(\tau_{i-1},y_{\tau_{i-1}})\ge(1+\alpha(\tau_i-\tau_{i-1}))U(\tau_i,y_{\tau_i})=\left(1+\frac{\alpha s}{n}\right)U(\tau_i,y_{\tau_i}).$$

重复利用上式，可得

$$\begin{aligned}U(\tau_0,y_{\tau_0})&\ge\left(1+\frac{\alpha s}{n}\right)U(\tau_1,y_{\tau_1})\ge\left(1+\frac{\alpha s}{n}\right)^2U(\tau_2,y_{\tau_2})\ge\cdots\\&\ge\left(1+\frac{\alpha s}{n}\right)^nU(\tau_n,y_{\tau_n}).\end{aligned}$$

由于 $U(\tau_0,y_{\tau_0})=U(s_0,\phi)$ 且 $U(\tau_n,y_{\tau_n})=U(s+s_0,y_{s+s_0})$，从而对 $s\ge 0,n\in\mathbb{N}$，有

$$U(s_0,\phi)\ge\left(1+\frac{\alpha s}{n}\right)^nU(s+s_0,y_{s+s_0}),$$

因此，当 $n\to+\infty$ 时，

$$U(s_0,\phi)\ge\mathrm{e}^{\alpha s}U(s+s_0,y_{s+s_0}),$$

则对 $\forall t\in[s_0,\omega)$，有

$$U(t,\psi)\le\mathrm{e}^{-\alpha(t-s_0)}U(s_0,y_{s_0}),$$

又由条件(F_1)可知，

$$\sigma\|\psi\|^p\le U(t,\psi),\ U(s_0,\phi)\le\beta\|\phi\|^p.$$

从而

$$\sigma\|\psi\|^{p}\le\beta\|\phi\|^{p}\mathrm{e}^{-\alpha(t-s_0)}.$$

则对 $\forall t\in[s_0,\omega)$，有

$$\|\psi\|\le\left(\frac{\beta}{\sigma}\right)^{\frac{1}{p}}\|\phi\|\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{p}(t-s_0)}.$$

即证

$$\|y_t(s_0,\phi)\|_{\infty}<\left(\frac{\beta}{\sigma}\right)^{\frac{1}{p}}\|\phi\|\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{p}(t-s_0)}.$$

因此测度泛函微分方程(1.1)的平凡解 $y\equiv 0$ 是指数稳定的。

例子 3.1 设 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是脉冲时刻，使得对 $\forall k\in\mathbb{N}$，有 $t_k<t_{k+1}$，现在考虑如下测度泛函微分方程

$$\begin{cases}y(t)=y(0)+\int_0^t f(y_s,s)\mathrm{d}g(s),\\ y_t=\psi.\end{cases}\tag{3.12}$$

其中，$g(t)=g(0)+t+\sum_{j=1}^{\infty}\aleph_{(t_j,+\infty)}(s)$，$t\in[0,+\infty)$，$\aleph$ 是特征函数，设函数 $f:S\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}^n$ 为

$$f(y_s,s)=\begin{cases}\left[\sin\left[\ln(s+1)\right]+\cos\left[\ln(s+1)\right]-4\right]y,s\ne s_k,\\ \beta_k y,s\ne s_k,\end{cases}$$

其中，$-1\le\beta_k\le 0$，因此，测度泛函微分方程(3.12)可以化为如下脉冲积分方程

$$\begin{cases}y(t)=y(0)+\int_0^t\left[\sin\left[\ln(s+1)\right]+\cos\left[\ln(s+1)\right]-4\right]y(s)\mathrm{d}s,\quad t\ne t_k,\\ \Delta^{+}y(t)=\beta_k y(t),\quad t=t_k\end{cases}\tag{3.13}$$

假定 y 是几乎处处可微的，则可以写出方程(3.13)对应的脉冲微分方程

$$\begin{cases}y'(t)=\left[\sin\left[\ln(t+1)\right]+\cos\left[\ln(t+1)\right]-4\right]y(t),\quad t\ne t_k,\\ \Delta^{+}y(t)=\beta_k y(t)=I_k\left(y(t)\right),\quad t\ne t_k.\end{cases}\tag{3.14}$$

定义 $U(t,\psi)=y(t)^2$，当 $t\ne t_k$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}&=2y(t)y'(t)=2y(t)\left[\sin\left[\ln(t+1)\right]+\cos\left[\ln(t+1)\right]-4\right]y(t)\\&=2U(t,\psi)\left[\sin\left[\ln(t+1)\right]+\cos\left[\ln(t+1)\right]-4\right]\\&\le-4U(t,\psi).\end{aligned}$$

当 $t=t_k$ 时，

$$U\left(t_k^{+},\tilde{\psi}\right)=\left[y\left(t_k^{+}\right)\right]^2=\left[y(t_k)+I_k\left(y(t_k)\right)\right]^2\le|1+\beta_k|^2U(t_k,\psi)\le U(t_k,\psi).$$

其中，$\tilde{\psi}=y_{t_k^{+}}$。

结合上述不等式，当 $\alpha=4$ 时，两端积分，则条件(F_2)成立，又由 U 的定义可知，满足条件(F_1)，且条件(A_1)~(A_3)也成立，故由引理 2.6 可知 $F\in\mathcal{F}(\Omega,h)$，因此，由定理 3.3，测度泛函微分方程(3.12)的平凡解 $y\equiv 0$ 是指数稳定的。

基金项目

国家自然科学基金项目(12161080)。

参考文献

[1] Oliva, F. and Vorel, Z. (1966) Functional Equations and Generalized Ordinary Differential Equations. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, **11**, 40-46.

[2] Federson, M., Mesquita, J.G. and Slavík, A. (2012) Measure Functional Differential Equations and Functional Dynamic Equations on Time Scales. *Journal of Differential Equations*, **252**, 3816-3847. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.11.005

[3] Das, P.C. and Sharma, R.R. (1972) Existence and Stability of Measure Differential Equations. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **22**, 145-158. https://doi.org/10.21136/CMJ.1972.101082

[4] Afonso, S.M. and Da Silva, M.R. (2019) Lipschitz Stability of Generalized Ordinary Differential Equations and Impulsive Retarded Differential Equations. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **2019**, 1-18. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2019.1.18

[5] Federson, M., Mesquita, J.G. and Toon, E. (2015) Lyapunov Theorems for Measure Functional Differential Equations via Kurzweil Equations. *Mathematische Nachrichten*, **288**, 1487-1511. https://doi.org/10.1002/mana.201300219

[6] da Silva, F.A., Federson, M., Grau, R. and Toon, E. (2021) Converse Lyapunnov Theorems for Measure Functional Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, **286**, 1-46. https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.02.060

[7] Federson, M., Grau, R. and Mesquita, J.G. (2019) Prolongation of Solutions of Measure Differential Equations and Dynamic Equations on Time Scales. *Mathematische Nachrichten*, **292**, 22-55. https://doi.org/10.1002/mana.201700420

[8] Federson, M., Grau, R., Mesquita, J.G. and Toon, E. (2019) Lyapunov Stability for Measure Differential Equations and Dynamic Equations on Time Scales. *Journal of Differential Equations*, **267**, 4192-4223. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.04.035

[9] Gallegos, C.A., Grau, R. and Mesquita, J.G. (2021) Stability, Asymptotic and Exponential Stability for Various Types of Equations with Discountinuous Solutions via Lyapunov Functionals. *Journal of Differential Equations*, **299**, 256-283. https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.07.012