**Pure Mathematics** 理论数学, 2022, 12(12), 2170-2177
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1212233

Hans汉斯

# 涉及高阶导数的亚纯函数正规定则

**冉　娜，杨　祺***

新疆师范大学数学科学学院，新疆　乌鲁木齐

收稿日期：2022年11月25日；录用日期：2022年12月21日；发布日期：2022年12月30日

## 摘　要

本文讨论了关于分担值的亚纯函数正规族，在Zalcman-pang引理的基础上，利用分担值的方法，并结合前人的研究，关于 $f^{(k)}(z)-af^{n}(z)$ 和 $f^{(k)}(z)-af^{-n}(z)$ 这两种形式IM分担*b*的正规定则，其中*a*，*b*为非零复数，本文将其推广到有关函数*f*的非零复数 $b_f, c_f$ ，得到了两个新的正规定则。

## 关键词

正规族，亚纯函数，分担值

# Normal Rules for Meromorphic Functions Involving Higher-Order Derivatives

**Na Ran, Qi Yang***

College of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Nov. 25th, 2022; accepted: Dec. 21st, 2022; published: Dec. 30th, 2022

## Abstract

**This paper discusses the normal family of meromorphic functions on sharing values, based on the Zalcman-pang lemma, using the method of sharing values, and combined with previous research, the positive rule of IM sharing *b* in the two forms $f^{(k)}(z)-af^{n}(z)$ and $f^{(k)}(z)-af^{-n}(z)$, where *a* and *b* are non-zero complex numbers, this paper generalizes them to the non-zero complex number $b_f, c_f$ of the function *f*, and obtains two new normal rules.**

*通讯作者。

文章引用: 冉娜, 杨祺. 涉及高阶导数的亚纯函数正规定则[J]. 理论数学, 2022, 12(12): 2170-2177.
DOI: 10.12677/pm.2022.1212233

**Keywords**

**Normal Family, Meromorphic Functions, Shared Values**



## 1. 引言及主要结果

设 $D\subseteq\mathbb{C}$ 为一个区域，$\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内一族亚纯函数，$\{f_n\}$ 为函数列，如果对于 $\forall\{f_n\}\subset\mathcal{F}$ 均存在子序列 $\{f_{n_v}\}$ 在区域 $D$ 内按球距内闭一致收敛到一个亚纯函数或者 $\infty$，则称 $\mathcal{F}$ 在区域 $D$ 内是正规的。显然，$\mathcal{F}$ 在 $D$ 内的每一点都正规(参见[1] [2] [3])。

设 $f(z)$，$g(z)$ 是区域 $D$ 内的两个亚纯函数，$a$，$b$ 是两个复数，如果 $f(z)=a$ 则 $g(z)=b$，记为

$$f(z)=a\Rightarrow g(z)=b$$

则，$f(z)=a\Rightarrow g(z)=b$ 且 $g(z)=b\Rightarrow f(z)=a$，将其记为

$$f(z)=a\Leftrightarrow g(z)=b$$

当 $a=b$ 时，我们称 $f$，$g$IM 分担 $a$。

本文我们用 $\sigma(x,y)$ 表示 $x$ 和 $y$ 的球面距离，有关球面定义见(见文献[4])。

2000 年，庞学诚和 Zalcman 在(文献[5])中，证明了定理 A。

**定理 A** 设为单位圆 $\Delta$ 内的一族亚纯函数，$a$，$b$ 为互相判别的两个复数，$c$ 为一个非零复数，若对 $\forall f\in\mathcal{F}$，都满足 $f(z)=0\Leftrightarrow f'(z)=a$ *和* $f(z)=c\Leftrightarrow f'(z)=b$，则 $\mathcal{F}$ 在单位圆 $\Delta$ 内正规。

2004 年，A.P. Singh 和 A. Singh 在(文献[6])中将定理 A 中的常数 $a$，$b$ 推广到依赖于 $f$ 的常数，他们证明了如下定理。

**定理 B** 设 $\mathcal{F}$ 在单位圆 $\Delta$ 内的一族亚纯函数，对任意函数 $f\in\mathcal{F}$，存在非零复数 $b_f,c_f$，满足：

i) $\dfrac{b_f}{c_f}$ 为常数

ii) $\min\{\sigma(0,b_f),\sigma(0,c_f)\sigma(c_f,b_f)\}\geq m$，其中 $m>0$，

iii) $f(z)=0\Leftrightarrow f'(z)=0$ 和 $f(z)=c_f\Leftrightarrow f'(z)=b_f$，

则 $\mathcal{F}$ 在单位圆 $\Delta$ 内正规。

2008 年，张庆彩在文献[7]中证明了定理 C。

**定理 C** 设 $n(\geq 4)\in\mathbb{Z}$，$a(\neq 0),b$ 为两个有穷复数，设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一族亚纯函数，若对 $\forall f,g\in\mathcal{F}$，满足 $f'(z)-af^n(z)$ 和 $g'(z)-ag^n(z)$ 在 $D$ 内 IM 分担 $b$，则 $\mathcal{F}$ 是正规的于区域 $D$ 内。

2012 年，由仇惠玲等人在文献[8]证明了定理 D。

**定理 D** 设 $n,k(n\geq k+3)$ 是一个整数，$a(\neq 0),b$ 为两个有穷复数，设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一族亚纯函数，其中 $\forall f\in\mathcal{F}$ 的零点重级均 $\geq k$，如果对 $\forall f$，$g\in\mathcal{F}$，满足 $f^{(k)}(z)-af^n(z)$ 和 $g^{(k)}(z)-ag^n(z)$ 在 $D$ 内 IM 分担 $b$，则 $\mathcal{F}$ 在区域 $D$ 内正规。

2013 年，由陈玮等人在文献[9]证明了定理 E。

**定理 E** 设 $n,k(n\geq k+1)$ 是一个整数，$a(\neq 0),b$ 为两个复数且有穷，设 $\mathcal{F}$ 在区域 $D$ 内的一族亚纯函数，

其中 $\forall f\in\mathcal{F}$ 的零点重级均 $\ge k$ ，如果对 $\forall f,g\in\mathcal{F}$ ，满足 $f^{(k)}(z)-af^{-n}(z)$ 和 $g^{(k)}(z)-ag^{-n}(z)$ 在 $D$ 内 IM 分担 $b$，则 $\mathcal{F}$ 在区域 $D$ 内正规。

本文将根据定理 A 推广到定理 B 的方式，对定理 D 和定理 E 进行推广，得到了以下结论。

**定理 1** 设 $n,k(n\ge k+3)$ 是一个整数，$a(\ne 0),b$ 为两个复数且有穷，设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D$ 内的一族亚纯函数，其中 $\forall f\in\mathcal{F}$ 的零点重级均 $\ge k$ ，若 $\exists b_f,c_f$ 为非零复数，满足：

i) $\dfrac{b_f}{c_f}$ 为常数

ii) $\min\{\sigma(0,b_f),\sigma(0,c_f)\sigma(c_f,b_f)\}\ge m$ ，其中 $m>0$ ，

iii) $f^{(k)}(z)-\dfrac{1}{b_f^{n-1}}f^n(z)=c_f\Leftrightarrow g^{(k)}(z)-\dfrac{1}{b_g^{n-1}}g^n(z)=c_g$ ，

则 $\mathcal{F}$ 在区域 $D$ 内正规。

**定理 2** 设 $n,k(n\ge k+1)$ 是一个整数，$a(\ne 0),b$ 为两个有穷复数，设 $\mathcal{F}$ 在在区域 $D$ 内的一族亚纯函数，其中 $\forall f\in\mathcal{F}$ 的零点重级均 $\ge k$ ，若 $\exists b_f,c_f$ 为非零复数，满足：

i) $\dfrac{b_f}{c_f}$ 为常数，

ii) $\min\{\sigma(0,b_f),\sigma(0,c_f)\sigma(c_f,b_f)\}\ge m$ ，其中 $m>0$ ，

iii) $f^{(k)}(z)-b_f^{n+1}f^{-n}(z)=c_f\Leftrightarrow g^{(k)}(z)-b_g^{n+1}g^{-n}(z)=c_g$ ，

则 $\mathcal{F}$ 在区域 $D$ 内正规。

## 2. 主要引理

**引理 1** [10]设 $\mathcal{F}$ 在在单位圆 $\Delta$ 内的一族亚纯函数，且族 $\mathcal{F}$ 中任意函数的所有极点重级均 $\ge q$ ，所有零点重级均 $\ge p$ 。设 $\alpha$ 是一个实数且满足 $-p<\alpha<q$ 。则 $\mathcal{F}$ 在 $z_0$ 处不正规 $\rightleftharpoons$ 存在

一个点列 $z_j\in\Delta,z_j\to z_0$ ；

一个函数列 $f_j\in\mathcal{F}$ ；

一个正数列 $\rho_j\to 0^+$ ，

使得 $g_j(\xi)=\rho_j^{\alpha}f_j(z_j+\rho_j\xi)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距局部一致收敛到 $g(\xi)$，其中 $g$ 是一个非常数亚纯函数，所有零点重级均 $\ge p$ ，所有级点重级均 $\ge q$ 。

**引理 2** [11] [12]设 $\mathcal{F}$ 为单位圆 $\Delta$ 内的一族亚纯函数，其中 $\forall f\in\mathcal{F}$ 的零点重级均 $\ge k$ ，必有 $\left|f^{(k)}(z)\right|\le A$ 。若 $\mathcal{F}$ 在 $\Delta$ 内不正规，则对于 $\forall\alpha(0\le\alpha\le k)$，

1) 存在点列 $z_n\in D,z_n\to z_0$ ，

2) 函数列 $\{f_n\}\in\mathcal{F}$ ，

3) 一个正数列 $\rho_n\to 0^+$ 。

使得 $g_n(\xi)=\rho_n^{-\alpha}f_n(z_n+\rho_n\xi)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛到 $g(\xi)$ (复平面上的一个非常数亚纯函数)，且所有零点重级均 $\ge k$ ，且 $g^*(\xi)\le g^*(0)=kA+1$，特别地，$g$ 的级 $\le 2$，$g$ 的球面导数表示为 $g^*(\xi)=|g'(\xi)|\Big/\left[1+|g(\xi)|^2\right]$。

由文献[8]引理 2 的证明过程中，可以得到以下结论。

**引理 3** [8]设 $f$ 是一个复平面的亚纯函数，$a(\ne 0)$ 是一个有穷复数，$n,k\in\mathbb{Z}^+$ 且满足 $k\ge 2$ ，$n\ge k+3$ 。若 $f$ 的所有零点重级 $\ge k$ ，且 $f^{(k)}(z)-af^n(z)$ 至多有一个判别的零点，则 $f$ 是一个常数。

**引理 4** [13]设 $n\ge 2,k$ 是两个整数，若 $f$ 为超越亚纯函数，则 $f^nf^{(k)}$ 有无穷多个非零复数的根；若 $f$ 为非常数有理函数，则 $f^nf^{(k)}$ 至少有一个非零复数的根。

**引理 5** [14]设 $n,k$ 是两个整数且 $n\ge k+1, b\ne 0$ 是一个有限复数，$f$ 为有理函数，且 $f$ 的零点重数 $\ge k$，则 $f^n f^{(k)}-b$ 至少有两个互相判别的零点。

由文献[14]引理 2.4 的证明过程中可得到引理 6

**引理 6** 设 $n,k$ 是两个整数且 $n\ge 2, b\ne 0$ 是一个有限复数，$f$ 为非常数多项式且零点重数 $\ge k$，则 $f^n f^{(k)}-b$ 至少有两个互相判别的零点。

**引理 7** [15]设 $m$ 为一个正整数，$a$，$b$，$c$ 为三个常数，Möbius 变换 $g$ 满足

$$\sigma\left(g(a),g(b)\right)\ge m,\ \sigma\left(g(c),g(b)\right)\ge m,\ \sigma\left(g(a),g(c)\right)\ge m,$$

则 $g$ 满足李普希茨条件，即

$$\sigma\left(g(z),g(w)\right)\le k_m\sigma(z,w)$$

这里 $k_m$ 是常数且与 $m$ 有关。

**引理 8** [16]设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数，$0,\infty$ 均为 $f(z)$ 的 Picard 例外值，则 $f(z)=\mathrm{e}^{h(z)}$，其中 $h(z)$ 为一个非常数整函数。

**引理 9** [16]设 $h(z)$ 为一个非常数整函数，$f(z)=\mathrm{e}^{h(z)}$ 且 $f(z)$ 的级为 $\lambda$，下级为 $\mu$，若 $h(z)$ 为 $p$ 次多项式，则 $\lambda=\mu=p$；若 $h(z)$ 为超越整函数，则 $\lambda=\mu=\infty$。

## 3. 主要结论证明

定理 1 的证明 由定理假设，不妨设 $M=\frac{b_f}{c_f}$，显然可以找到两个非零复数 $b$，$c$，满足 $\frac{b_f}{c_f}=\frac{b}{c}$，对任意 $f\in\mathcal{F}$，我们定义一个 Möbius 变换 $I_f:I_f=\frac{c_f z}{c}$，则 $I_f^{-1}=\frac{cz}{c_f}$，接下来我们证明 $G=\left(I_f^{(-1)}\circ f\right)\Big|f\in\mathcal{F}$ 在 $D$ 内正规。

用反证法证明，假设 $G$ 在 $D$ 内不正规，则存在 $z_0\in D$，使得 $G$ 在 $z_0$ 处不正规，由引理 1 知，存在 $g_j\in G$，$z_j\to z_0$ 和 $\rho_j\to 0^+$，使得 $L_j(\xi)=\rho_j^{\frac{k}{n-1}}g_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)$。

按球距内闭一致于一个非常数亚纯函数 $L(\xi)$，其中零点重数 $\ge k$，它的极至 $\le 2$。

由 $L_j(\xi)=\rho_j^{\frac{k}{n-1}}g_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)$ 知 $L^{(k)}(\xi)=\rho_j^{\frac{nk}{n-1}}g_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)$

注意到

$$\begin{aligned}&\rho_j^{\frac{nk}{n-1}}\left(g_j^{(k)}\left(z_j+\rho_j\xi\right)-\frac{1}{b^{n-1}}g_j^n\left(z_j+\rho_j\xi\right)-c\right)\\&=L_j^{(k)}(\xi)-\frac{1}{b^{n-1}}L_j^n(\xi)-\rho_j^{\frac{nk}{n-1}}c\to L^{(k)}(\xi)-\frac{1}{b^{n-1}}L(\xi)\end{aligned}\tag{1}$$

接下来分情况讨论：

情况 1 $L^{(k)}(\xi)-\frac{1}{b^{n-1}}L^n(\xi)\equiv 0$，则 $L^{(k)}(\xi)\equiv\frac{1}{b^{n-1}}L^n(\xi)$，由于 $n\ge k+3$ 可知，$L(\xi)$ 是一个整函数，故有

$$\begin{aligned}nT(r,L)=T\left(r,b^{n-1}L^{(k)}\right)&\le T\left(r,L^{(k)}\right)+o(1)\\&\le m\left(r,L^{(k)}\right)+N\left(r,L^{(k)}\right)+o(1)\\&\le m(r,L)+S(r,L)\\&\le T(r,L)+S(r,L)\end{aligned}$$

即$(n-1)T(r,L)\le S(r,L)$，故有$T(r,L)=S(r,L)$，故矛盾。

**情况 2** $L^{(k)}(\xi)-\frac{1}{b^{n-1}}L^n(\xi)\not\equiv 0$

**(2.1)** $L^{(k)}(\xi)-\frac{1}{b^{n-1}}L^n(\xi)\neq 0$时，由文献[17]中的推论 2 可知，$L(\xi)$为常数，矛盾。

**(2.2)** $L^{(k)}(\xi)-\frac{1}{b^{n-1}}L^n(\xi)=0$时，下面将证明$L^{(k)}(\xi)-\frac{1}{b^{n-1}}L^n(\xi)$只有一个零点。

假设存在$\xi_0,\xi_0^*$为$L^{(k)}(\xi)-\frac{1}{b^{n-1}}L^n(\xi)$的两个零点，选足够小的$\delta>0$，使得$D(\xi_0,\delta)\cup D(\xi_0^*,\delta)=\varnothing$，其中，

$$D(\xi_0,\delta)=\{\xi:|\xi-\xi_0|<\delta\},$$
$$D(\xi_0^*,\delta)=\{\xi:|\xi-\xi_0^*|<\delta\},$$

根据(1)式，由 Hurwitz 定理知，存在点列$\xi_j\in D(\xi_0,\delta),\xi_j^*\in D(\xi_0^*,\delta)$，使得对于足够大的$j$有

$$f_j^{(k)}(z_j+\rho_j\xi_j)-\frac{1}{b_{f_j}^{n-1}}f_j^n(z_j+\rho_j\xi_j)-c_{f_j}=0,$$
$$f_j^{(k)}(z_j+\rho_j\xi_j^*)-\frac{1}{b_{f_j}^{n-1}}f_j^n(z_j+\rho_j\xi_j^*)-c_{f_j}=0.$$

由定理假设$f^{(k)}(z)-\frac{1}{b_f^{n-1}}f^n(z)=c_f\Leftrightarrow g^{(k)}(z)-\frac{1}{b_g^{n-1}}g^n(z)=c_g$可知，对任意的正整数$m$，有

$$f_m^{(k)}(z_j+\rho_j\xi_j)-\frac{1}{b_{f_m}^{n-1}}f_m^n(z_j+\rho_j\xi_j)-c_{f_m}=0,$$

$$f_m^{(k)}(z_j+\rho_j\xi_j^*)-\frac{1}{b_{f_m}^{n-1}}f_m^n(z_j+\rho_j\xi_j^*)-c_{f_m}=0.$$

固定$m$，令$j\to\infty$，并注意到$z_j+\rho_j\xi_j\to z_0$，$z_j+\rho_j\xi_j^*\to z_0$，则

$$f_m^{(k)}(z_0)-\frac{1}{b_{f_m}^{n-1}}f_m^n(z_0)-c_{f_m}=0.$$

因为$f_m^{(k)}-\frac{1}{b_{f_m}^{n-1}}f_m^n-c_{f_m}$为解析函数，故其零点是孤立的，因此

$$z_j+\rho_j\xi_j=z_0,\ z_j+\rho_j\xi_j^*=z_0.$$

*从而*

$$\xi_j=z_0-\frac{z_j}{\rho_j},\ \xi_j^*=z_0-\frac{z_j}{\rho_j}.$$

这显然与$D(\xi_0,\delta)\cap D(\xi_0^*,\delta)=\varnothing$矛盾，故$L^{(k)}(\xi)-\frac{1}{b^{n-1}}L^n(\xi)$仅有一个零点。根据引理 2 知，$L(\xi)$为常数，从而矛盾。

因此$G=\{(I_f^{-1}\circ f)|f\in\mathcal{F}\}$在$D$内是正规的，即等度连续的，那么对于任意的($\frac{\varepsilon}{k_m}>0$)，其中$k_m$为引理 7 中的常数，存在$\delta>0$，使得对任意满足球面距离$\sigma(x,y)<\delta$，以及$f\in\mathcal{F}$，有

$$\sigma\left(\left(I_f^{-1}\circ f\right)(x),\sigma\left(I_f^{-1}\circ f\right)(y)\right)<\frac{\varepsilon}{k_m}.$$

由引理 7 知，

$$\begin{aligned}\sigma\left(f(x),f(y)\right)&=\sigma\left(\left(I_f\circ I_f^{-1}\circ f\right)(x),\sigma\left(I_f\circ I_f^{-1}\circ f\right)(y)\right)\\&\le k_m\sigma\left(\left(I_f^{-1}\circ f\right)(x)\sigma\left(I_f^{-1}\circ f\right)(y)\right)<\varepsilon\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内是等度连续的，即为正规的。定理 1 得证。

定理 2 的证明 由定理假设，不妨设 $M=\frac{b_f}{c_f}$，显然可以找到两个非零复数 $b$，$c$，满足 $\frac{b_f}{c_f}=\frac{b}{c}$，对任意 $f\in\mathcal{F}$，我们定义一个 Möbius 变换 $I_f:I_f=\frac{c_f z}{c}$，则 $I_f^{-1}=\frac{cz}{c_f}$，接下来我们证明 $G=\left\{\left(I_f^{-1}\circ f\right)\middle| f\in\mathcal{F}\right\}$ 在 $D$ 内正规。

用反证法证明，假设 $G$ 在 $D$ 内不正规，则存在 $z_0\in D$，使得 $G$ 在 $z_0$ 处不正规，由引理 2 知，存在 $g_j\in G$，$z_j\to z_0$ 和 $\rho_j\to 0^+$，使得 $L_j(\xi)=\rho_j^{\frac{-k}{n-1}}g_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)$。

按球距内闭一致于一个非常数亚纯函数 $L(\xi)$，其中零点重数 $\ge k$，它的极 $\le 2$

由 $L_j(\xi)=\rho_j^{\frac{-k}{n-1}}g_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)$ 知 $L^{(k)}(\xi)=\rho_j^{\frac{nk}{n-1}}g_j\left(z_j+\rho_j\xi\right)$

注意到

$$\begin{aligned}&\rho_j^{\frac{nk}{n-1}}\left(g_j^{(k)}\left(z_j+\rho_j\xi\right)-b^{n+1}g_j^n\left(z_j+\rho_j\xi\right)-c\right)\\&=L_j^{(k)}(\xi)-b^{n+1}T_j^n(\xi)-\rho_j^{\frac{nk}{n-1}}c\to L^{(k)}(\xi)-b^{n+1}L^n(\xi)\end{aligned}\tag{2}$$

接下来分情况讨论：

**情况 1** $L^{(k)}(\xi)-b^{n+1}L^{-n}(\xi)\equiv 0$，明显不成立，假设成立，则 $L(\xi)$ 是一个没有零点的整函数，由引理 7-8 知 $L(\xi)=\mathrm{e}^{c\xi^2+d\xi+e}$ ($c$，$d$，$e$ 为常数，且 $cd\ne 0$)。显然则 $L^{(k)}(\xi)L^n(\xi)\equiv b^{n+1}$ 不成立。

**情况 2** $L^{(k)}(\xi)-b^{n+1}L^{-n}(\xi)\not\equiv 0$

由引理 3.4.5 可知，$L^{(k)}(\xi)-b^{n+1}L^{-n}(\xi)$ 至少有两个不相等零点，接下来证明，这是不可能的。

只需考虑 $L^{(k)}(\xi)-b^{n+1}L^{-n}(\xi)=0$ 有两个不相等零点情况，

假设存在 $\xi_0,\xi_0^*$ 为$L^{(k)}(\xi)-b^{n+1}L^{-n}(\xi)$ 的两个零点，选足够小的 $\delta>0$，使得 $D(\xi_0,\delta)\cap D\left(\xi_0^*,\delta\right)=\varnothing$，其中，

$$D(\xi_0,\delta)=\left\{\xi:|\xi-\xi_0|<\delta\right\},$$
$$D\left(\xi_0^*,\delta\right)=\left\{\xi:\left|\xi-\xi_0^*\right|<\delta\right\},$$

根据(2)式，并结合 Hurwitz 定理知，存在点列 $\xi_j\in D(\xi_0,\delta)$，$\xi_j^*\in D\left(\xi_0^*,\delta\right)$，使得对于足够大的 $j$ 有

$$f_j^{(k)}\left(z_j+\rho_j\xi_j\right)-b^{n+1}f_j^{-n}\left(z_j+\rho_j\xi_j\right)-c_{f_j}=0,$$
$$f_j^{(k)}\left(z_j+\rho_j\xi_j^*\right)-b^{n+1}f_j^{-n}\left(z_j+\rho_j\xi_j^*\right)-c_{f_j}=0.$$

由定理假设 $f^{(k)}(z)-b_f^{n+1}f^{-n}(z)=c_f\Leftrightarrow g^{(k)}(z)-b_g^{n+1}g^{-n}(z)=c_g$ 可知，对任意的正整数 $m$，有

$$f_m^{(k)}\left(z_j+\rho_j\xi_j\right)-b_{f_m}^{n+1}f_m^{-n}\left(z_j+\rho_j\xi_j\right)-c_{f_m}=0,$$
$$f_m^{(k)}\left(z_j+\rho_j\xi_j^*\right)-b_{f_m}^{n+1}f_m^{-n}\left(z_j+\rho_j\xi_j^*\right)-c_{f_m}=0.$$

固定 $m$，令 $j\to\infty$，并注意到 $z_j+\rho_j\xi_j\to z_0$， $z_j+\rho_j\xi_j^*\to z_0$，则

$$f_m^{(k)}\left(z_0\right)-b_{f_m}^{n+1}f_m^{-n}\left(z_0\right)-c_{f_m}=0$$

因为 $f_m^{(k)}-b_{f_m}^{n+1}f_m^{-n}-c_{f_m}$ 为解析函数，故其零点是孤立的，因此

$$z_j+\rho_j\xi_j=z_0,\ z_j+\rho_j\xi_j^*=z_0.$$

从而

$$\xi_j=z_0-\frac{z_j}{\rho_j},\ \xi_j^*=z_0-\frac{z_j}{\rho_j}.$$

这显然与 $D\left(\xi_0,\delta\right)\cap D\left(\xi_0^*,\delta\right)=\varnothing$ 矛盾，故 $L^{(k)}\left(\xi\right)-b^{n+1}L^{-n}\left(\xi\right)$ 仅有一个零点。从而矛盾。

因此 $G=\left\{\left(I_f^{-1}\circ f\right)\middle| f\in\mathcal{F}\right\}$ 在 $D$ 内是正规的，即等度连续的，那么对于任意的 $\left(\dfrac{\varepsilon}{k_m}>0\right)$，其中 $k_m$ 为引理 7 中的常数，存在 $\delta>0$，使得对任意满足球面距离 $\sigma\left(x,y\right)<\delta$，以及 $f\in\mathcal{F}$，有 $\sigma\left(\left(I_f^{-1}\circ f\right)\left(x\right),\sigma\left(I_f^{-1}\circ f\right)\left(y\right)\right)<\dfrac{\varepsilon}{k_m}$。

由引理 7 知，

$$\begin{aligned}\sigma\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)&=\sigma\left(\left(I_f\circ I_f^{-1}\circ f\right)\left(x\right),\sigma\left(I_f\circ I_f^{-1}\circ f\right)\left(y\right)\right)\\&\le k_m\sigma\left(\left(I_f^{-1}\circ f\right)\left(x\right),\sigma\left(I_f^{-1}\circ f\right)\left(y\right)\right)<\varepsilon\end{aligned}$$

因此 $\mathcal{F}$ 在 $D$ 内是等度连续的，即为正规的。定理 2 得证。

## 基金项目

国家自然科学基金资助(11961068)。

## 参考文献

[1] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic Functions. Clarendon Press, Oxford.

[2] Schiff, J.L. (1993) Normal Families. Springer, New York.

[3] Yang, L. (1993) Value Distribution Theory. Springer, Berlin.

[4] Beardon, A.F. (1991) Iteration of Rational Functions. Springer, New York.

[5] Pang, X. and Zalcman, L. (2000) Normality and Shared Values. *Arkiv för Matematik*, **38**, 171-182. https://doi.org/10.1007/BF02384496

[6] Singh, A.P. and Singh, A. (2004) Sharing Values and Normality of Meromorphic Functions. *Complex Variables, Theory and Application: An International Journal*, **49**, 417-425. https://doi.org/10.1080/02781070410001715097

[7] Zhang, Q. (2008) Normal Families of Meromorphic Functions Concerning Shared Values. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **338**, 545-551. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.05.032

[8] 仇慧玲, 刘丹, 方明亮. 涉及正规族与分担值的 Hayman 问题[J]. 中国科学: 数学, 2012, 42(6): 603-610.

[9] 陈玮, 张瑛瑛, 田宏根. 涉及分担值的亚纯函数正规族[J]. 鲁东大学学报(自然科学版), 2013, 29(3): 193-195.

[10] Pang, X. and Zalcman L. (2000) Normal Families and Shared Values. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **32**, 325-331. https://doi.org/10.1112/S002460939900644X

[11] Zalcman, L. (1975) A Heuristic Principle in Complex Function Theory. *The American Mathematical Monthly*, **82**,

813-818. https://doi.org/10.2307/2319796

[12] Pang, X. (1989) Bloch's Principle and Normal Criterion. *Science in China Series A*, **32**, 782-791.

[13] 张占亮, 李伟. 两类微分多项式的 Picard 例外值[J]. 数学学报, 1994, 37(6): 828-835.

[14] Ding, J., Qi, J. and Yang, L. (2012) Normality Criteria for Families of Meromorphic Function Concerning Shared Values. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **35**, 449-457.

[15] Beaedo, A.F. (1991) Iteration of Rational Functions J. 132 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York.

[16] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[17] 张占亮. 关于 $f^{(k)}-af^n$ 的值分布[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2004, 35(1): 5-9.