Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(12), 2178-2188
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.1212234

Hans汉斯

模糊Riesz空间中模糊不相交补和模糊投影带性质的研究

赵娟娟，程　娜

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2022年11月26日；录用日期：2022年12月22日；发布日期：2022年12月30日

摘　要

本文首先研究模糊Riesz空间中模糊不相交补的性质，给出非零且两两不交的一列元素是线性无关的结论，然后在模糊Riesz空间中讨论了模糊投影带，并给出模糊序基的定义，最后讨论模糊序稠的一些性质及模糊理想与模糊带之间的关系。

关键词

模糊Riesz空间，模糊不相交补，模糊序基，模糊序稠，模糊投影带

A Study on the Properties of Fuzzy Disjoint Complement and Fuzzy Projection Band in Fuzzy Riesz Spaces

Juanjuan Zhao, Na Cheng

School of Sciences, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Nov. 26th, 2022; accepted: Dec. 22nd, 2022; published: Dec. 30th, 2022

Abstract

In this paper, we first study the properties of fuzzy disjoint complements in fuzzy Riesz spaces, and give the conclusion that a list of elements that are nonzero and disjoint are linearly independent. Then we discuss the fuzzy projective bands in fuzzy Riesz spaces, and give the definition of fuzzy order bases. Finally, we discuss some properties of fuzzy order dense and the relationship between fuzzy ideals and fuzzy bands.

文章引用: 赵娟娟，程娜. 模糊 Riesz 空间中模糊不相交补和模糊投影带性质的研究[J]. 理论数学，2022, 12(12): 2178-2188. DOI: 10.12677/pm.2022.1212234

Keywords

Fuzzy Riesz Spaces, Fuzzy Disjoint Complement, Fuzzy Order Basis, Fuzzy Order Dense, Fuzzy Projection Band

1. 引言

1965 年，Zadeh [1]首先提出模糊集概念之后，1971 年[2]引入了模糊序关系。1992 年，P. Venugopalan [3]开始对模糊序集进行系统研究。Ismat Beg [4] [5]提出模糊 Riesz 空间的概念并研究模糊 Riesz 空间上的基本理论，得到模糊 Riesz 分解性质；然后引入了模糊序线性空间的概念，并讨论了模糊序收敛。1997 年，Ismat Beg [6] [7]先提出模糊 Archimedean 空间的概念，同年提出 σ-完备的模糊 Riesz 空间，并讨论了模糊 Archimedean 空间和 σ-完备的模糊 Riesz 空间之间的关系。2015 年，L. Hong [8]定义了模糊理想、模糊带、模糊 Riesz 子空间、模糊投影带等概念。M. Iqbal [9]研究了模糊 Riesz 空间中的无界模糊序收敛。2021 年，N. Cheng [10]研究了模糊 Riesz 空间中的模糊 Riesz 同态，给出模糊 Riesz 同态与模糊商空间之间的关系。N. Cheng [11]给出当值域空间为模糊 Dedekind 完备的 Riesz 空间时 Hahn-Banach 定理的推广。

模糊 Riesz 空间理论在动力系统、工程和流体力学等领域具有重要的应用意义，比如在 l_p 空间中研究模糊序是一个具有现实意义的事情。本文研究了模糊不相交补和模糊投影带的基本性质，证明了许多相关的结果，给出模糊序基的定义，并讨论了模糊序稠，这对模糊 Riesz 空间的理论做出了重要的贡献，有助于我们解决模糊 Riesz 空间上的问题，并可以用于未来探索模糊 Riesz 空间上的序的相关问题。

本文提到的一些概念可以查阅参考文献[1]-[11]。

2. 预备知识

纸型

定义 2.1 [3] 设 X 是论域，$\mu: X\times X\to[0,1]$ 是模糊子集 $X\times X$ 上的特征函数。当特征函数 μ 满足如下条件时，称 μ 是 X 上的模糊序，

(1) (自反性)假设 $x\in X$，则 $\mu(x,x)=1$；

(2) (反对称性)假设 $x,y\in X$，当 $\mu(x,y)+\mu(y,x)>1$，则 $x=y$；

(3) (传递性)假设 $x,z\in X$，则 $\mu(x,z)\geq\vee\left(\mu(x,y)\wedge\mu(y,z)\right)$。

符号 2.2 [2] 假设 X 是模糊集，$x\in X$。如果任意 $y\in X$，有 $(\downarrow x)(y)=\mu(y,x)$，则称 $\downarrow x$ 为 X 上的模糊集。同理，如果任意 $y\in X$，有 $(\uparrow x)(y)=\mu(x,y)$，称 $\uparrow x$ 为 X 上的模糊集。如果 A 是 X 的子集，则 $\uparrow A=\vee_{x\in A}(\uparrow x)$，$\downarrow A=\vee_{x\in A}(\downarrow x)$。

定义 2.3 [2] 设 A 是模糊集 X 的子集，A 的上界 $U(A)$ 定义如下：

$$U(A)(y)=\begin{cases}0, & \mu(x,y)\leq\frac{1}{2} \\ (\cap_{x\in A}\uparrow x)(y), & \text{其他}\end{cases},$$

同理，A 的下界 $L(A)$ 定义如下：

$$L(A)(y)=\begin{cases}0, & \mu(y,x)\le\frac{1}{2}\\ \left(\cap_{x\in A}\downarrow x\right)(y), & 其他\end{cases}。$$

对于任意 $x\in X$，若 $U(A)(x)>0$ 时，则称 $x\in U(A)$，A 有上界，且 x 是 A 的一个上界；同理，对于任意 $x\in X$，若 $L(A)(x)>0$ 时，则称 $x\in L(A)$，A 有下界，且 x 是 A 的一个下界。如果 A 既有上界又有下界，则称 A 有界。

如果元素 $z\in X$ 满足(1) $z\in U(A)$，(2)当 $y\in U(A)$ 时有 $y\in U(z)$，则称 A 有上确界 $z\in X$；如果元素 $z\in X$ 满足(1) $z\in L(A)$，(2)当 $y\in L(A)$ 时有 $y\in L(z)$。则称 A 有下确界 $z\in X$。

性质 2.4 [2] 设 A 是模糊集 X 的子集：(1) $\sup A$ 若存在则唯一，(2) $\inf A$ 若存在则唯一。

注解 2.5 [2] $x\vee y=\sup\{x,y\}$，$x\wedge y=\inf\{x,y\}$。

定义 2.6 [4] 设 X 是模糊集，如果 X 满足下述条件，则称 X 为模糊序线性空间：

(1) 如果任意 $x\in X$，当 $x_1,x_2\in X$，$\mu(x_1,x_2)>\frac{1}{2}$ 时，有 $\mu(x_1,x_2)\le\mu(x_1+x,x_2+x)$；

(2) 如果任意 $\alpha\in R$，当 $x_1,x_2\in X$，$\mu(x_1,x_2)>\frac{1}{2}$ 时，有 $\mu(x_1,x_2)\le\mu(\alpha x_1,\alpha x_2)$。

性质 2.7 [4] 设 X 是模糊序线性空间，$\{x_j\}_{j\in J}$ 是 X 上的元素。当 $\vee_{j\in J} x_j$ 和 $\vee_{j\in J}(-x_j)$ 存在时，则有下式成立

$$\vee_{j\in J} x_j=-\wedge_{j\in J}(-x_j)。$$

性质 2.8 [4] 设 X 是模糊序线性空间，$\{x_j\}_{j\in J},\{y_k\}_{k\in K}$ 是 X 上的元素，如果 $\vee_{j\in J} x_j,\vee_{k\in K} y_k$ 存在时，$\vee_{j\in J,k\in K}(x_j+y_k)$ 也存在，则 $\vee_{j\in J,k\in K}(x_j+y_k)=\vee_{j\in J} x_j+\vee_{k\in K} y_k$。

性质 2.9 [4] 设 X 是模糊序线性空间，$\{x_j\}_{j\in J}$ 是 X 上的元素，如果 $\vee_{j\in J} x_j$ 存在，则当 $0<\alpha\in R$ 时，有 $\vee_{j\in J}(\alpha x_j)=\alpha\left(\vee_{j\in J} x_j\right)$。

定义 2.10 [3] 设 X 是模糊序线性空间，如果 $\mu(0,x)>\frac{1}{2}$，则称元素 x 是正元素；如果 $\mu(x,0)>\frac{1}{2}$，则称元素 x 是负元素。

性质 2.11 [3] 设 X 是模糊 Riesz 空间，则对任意 $x_1,x_2\in X$，有 $x_1+x_2=x_1\vee x_2+x_1\wedge x_2$。

性质 2.12 [3] 设 X 是模糊 Riesz 空间，则以下性质成立：

(1) $\mu(|x+y|,|x|+|y|)>\frac{1}{2}$；

(2) $|\alpha x|=|\alpha||x|,\forall\alpha\in R$；

(3) $\mu(||x|-|y||,|x-y|)>\frac{1}{2}$；

(4) $|x-y|=x\vee y-x\wedge y$。

定义 2.13 [3] 设 X 是模糊 Riesz 空间，则下述命题成立：

(1) 任意元素 $f,g\in X$，如果 $|f|\wedge|g|=0$，则称他们不交，记作 $f\perp g$。

(2) 设 A 是 X 的子集，如果任意 $g\in A$ 有 $f\perp g$，则称 f 与 A 不交，记作 $f\perp A$。

(3) 设 A_1,A_2 是 X 的子集，若任意 $f_1\in A_1,f_2\in A_2$ 有 $f_1\perp f_2$，则称两个子集不交，记作 $A_1\perp A_2$。

定义 2.14 [5] 设 X 是模糊序线性空间，如果对于任何非负元素 x，集合 $\{\alpha x : 0<\alpha\in R\}$ 无上界，称 X 是模糊 Archimedean 空间。

定义 2.15 [8] 设 X 是模糊集，$\{x_\alpha\}$ 是 X 上的网，若对任意 α，β 满足 $\alpha\le\beta$ 时有 $\mu\left(x_\alpha,x_\beta\right)>\frac{1}{2}$，则称 $\{x_\alpha\}$ 是递增的，记作 $x_\alpha\uparrow$。如果 $x=\sup\{x_\alpha\}$ 存在，记作 $x_\alpha\uparrow x$。同理，X 中存在递减的网，可表示为 $x_\alpha\downarrow$ 和 $x_\alpha\downarrow x$。

定义 2.16 [8] 设 X 是模糊 Riesz 空间，A 是 X 的子集。如果任意 $y\in A$，当 $\mu\left(|x|,|y|\right)>\frac{1}{2}$ 时有 $x\in A$，则称 A 是模糊 solid 的。X 的模糊 solid 向量子空间 I 叫做模糊理想。

定义 2.17 [8] 设 X 是模糊 Riesz 空间，D 是 X 的子集，若 X 中存在 D 的最小模糊理想即为由 D 生成的模糊理想，则可记作 A_D。

定义 2.18 [8] 设 X 是模糊 Riesz 空间，A 是 X 的子集，称 $A^d=\{x\in X\mid x\perp y, y\in A\}$ 是 A 的模糊不交补，A^{dd} 是 A^d 的模糊不交补，且 $A^{dd}=\left(A^d\right)^d$。如果 $A_1\subseteq A_2$，则 $A_2^d\subseteq A_1^d$。

定义 2.19 [8] 设 X 是模糊 Riesz 空间，A 是 X 的子集，则下式成立：

(1) $A\subseteq A^{dd}$；

(2) $A^d=A^{ddd}$；

(3) $A^d\cap A^{dd}=\{0\}$；

(4) 如果 $A^d=\{0\}$，则 $A^{dd}=X$；

(5) A^d 是 X 的模糊理想；

(6) 如果 A 是 X 的模糊理想，则对任意非零 $x\in A^{dd}$ 存在非零元素 $y\in A$ 使得 $\mu\left(|y|,|x|\right)>\frac{1}{2}$。

定义 2.20 [8] 设 X 是模糊 Riesz 空间，如果模糊带 P 满足 $X=P+P^d$，则称 P 是 X 的模糊投影带。

定义 2.21 [8] 设 X 是模糊 Riesz 空间，D 是 X 的子集，则由 D 生成且包含 D 的最小带是 X 上的模糊带，记为 $[D]$。

定义 2.22 [8] 设 X 是模糊 Riesz 空间，Y 是 X 的模糊 Riesz 子空间，若对任意正元素 $x\in X$，存在非零元素 $y\in Y$ 使得 $\mu\left(y,x\right)>\frac{1}{2}$，则称 Y 在 X 中模糊序稠。

3. 模糊 Riesz 空间的模糊不交补

本节研究了模糊 Riesz 空间中模糊不相交补的性质，给出非零且两两不交的一列元素是线性无关的结论，以及研究模糊理想和模糊带的关系。

定理 3.1 假设 X 是模糊 Riesz 空间，A 是 X 的模糊理想。则由 A 生成的模糊带的元素 $f\in X$ 满足

$$|f|=\sup D \text{ 非空集合 } D\in A^+ \tag{1}$$

等价的，$[A]$ 包含所有的元素 $f\in X$ 满足

$$|f|=\sup\left(u:u\in A^+,\mu\left(u,|f|\right)>\frac{1}{2}\right) \tag{2}$$

证明：显然 f 满足(2)式，则 f 满足(1)式。反之，假设 f 满足(1)式，则(1)中的集合 D 是集合 $P=\sup\left(u:u\in A^+,\mu\left(u,|f|\right)>\frac{1}{2}\right)$ 的子集。因为 D 的所有上界都不小于 $|f|$，且 $D\subseteq P$，所以 P 的所有上界都不小于 $|f|$。显然 $|f|$ 是 P 的一个上界，所以 $|f|=\sup P$ 且 f 满足(2)。从而(1)和(2)等价。记满足(1)式和(2)式的元素 f 构成的集合为 B。下面证明 B 是模糊带 $[A]$。由模糊带定义，先证明 B 是线性子空间。任

取 $f_1, f_2 \in B$，$D_1, D_2 \in A^+$ 满足 $|f_1| = \sup D_1$，$|f_2| = \sup D_2$，则 $D_1 + D_2$ 是 A^+ 的子集且 $|f_1| + |f_2|$ 是它的上界，所以 $\sup\{|f_1 + f_2| \wedge (d_1 + d_2) : d_1 \in D_1, d_2 \in D_2\} = |f_1 + f_2| \wedge (|f_1| + |f_2|) = |f_1 + f_2|$，任意 $\alpha \in R$，$\sup(|\alpha| d_1 : d_1 \in D_1) = |\alpha f_1|$，所以 B 是线性子空间。下面证明 B 是模糊理想。假设 $|g| \le |f_1|$，因为任意 $d_1 \in D_1$ 有 $\{|g| \wedge d_1 : d_1 \in A^+\}$，所以 $\sup(|g| \wedge d_1 : d \in D_1) = |g| \wedge |f_1| = |g|$。所以 $g \in B$，B 是模糊理想。最后证明 B 是模糊带。令 D 是 B^+ 的非空子集，u_0 是它的上确界，则 $u_0 \in B$。任取 $u \in D$，$u = \sup\left(v : v \in A^+, \mu(v,u) > \frac{1}{2}\right)$，$u_0 = \sup_{u \in D}\left\{\sup\left(v : v \in A^+, \mu(v,u) > \frac{1}{2}\right)\right\} = \sup\left(v : v \in A^+, \mu(v,u) > \frac{1}{2}\right)$。由(1)可知，$u_0 \in B$，所以 B 是模糊带。

梁在文献[8]中研究介绍了由子集 D 生成的模糊带的基本性质，下面我们将证明它存在另一有趣的性质。

定理 3.2 假设 X 是模糊 Riesz 空间，有下式成立：

(1) 如果 D 是 X 的非空子集，则 $(D \cup D^d)^{dd} = E$；

(2) 如果 $A_1, \cdots, A_n$ 是 X 的模糊理想，则 $\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^{dd} = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^{dd}$；

(3) 如果 $A_1, \cdots, A_n$ 是 X 的模糊理想，$[A_1], \cdots, [A_n]$ 是由 $A_1, \cdots, A_n$ 生成的模糊带，则 $\left[\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right] = \bigcap_{k=1}^{n} [A_k]$。

证明：(1) 由模糊不交补定义可得 $D \cap D^d = \{0\}$。下面证明 $(D \cup D^d)^{dd} = X$，等价证明 $(D \cup D^d)^d = \{0\}$。任取 $f \in (D \cup D^d)^d$，则存在 $g \in D \cup D^d$，使得 $f \perp g$。又因为 $g \in D \cup D^d$，所以存在 $g_1, g_2 \in D^+$ 使得 $\mu(g_1, g) > \frac{1}{2}$，$\mu(g_2, g) > \frac{1}{2}$，且 $g = g_1 + g_2$。所以 $f \perp g_1, f \perp g_2$，$f \in D^d \cap D^{dd} = \{0\}$，所以 $f = 0$。由 f 的任意性可得 $(D \cup D^d)^d = \{0\}$，所以 $D \cup D^d = X$。

(2) 因为 $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$，$A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$，所以 $A_1^d \subseteq (A_1 \cap A_2)^d$，$A_2^d \subseteq (A_1 \cap A_2)^d$，进一步有 $(A_1 \cap A_2)^{dd} \subseteq A_1^{dd}$，$(A_1 \cap A_2)^{dd} \subseteq A_2^{dd}$ 成立，所以 $(A_1 \cap A_2)^{dd} \subseteq A_1^{dd} \cap A_2^{dd}$。反过来，假设 $f \in A_1^{dd} \cap A_2^{dd}$，由定理 2.19 [8]可知存在非零元素 $h \in A_1$ 满足 $\mu(|h|, |f|) > \frac{1}{2}$。又 $0 \ne h \in A_1 \cap A_2^{dd}$，所以存在非零元素 $g \in A_2$ 使得 $\mu(|g|, |f|) > \frac{1}{2}$。再次由定理 2.19 [8]可得 $A_1^{dd} \cap A_2^{dd}$ 是 $(A_1 \cap A_2)^{dd}$ 的子集。所以 $A_1^{dd} \cap A_2^{dd} = (A_1 \cap A_2)^{dd}$。

(3) 因为 $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$，$A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$，所以 $[A_1 \cap A_2] \subseteq [A_1]$，$[A_1 \cap A_2] \subseteq [A_2]$，所以 $[A_1 \cap A_2] \subseteq [A_1] \cap [A_2]$。反之，假设存在非零元素 $u \in [A_1] \cap [A_2]$，由定理 3.1 可得，存在 $D_1 \subseteq A_1^+$，$D_2 \subseteq A_2^+$ 满足 $u = \sup(v : v \in D_1) = \sup(w : w \in D_2)$。令 $D_3 = (v \wedge w : v \in D_1, w \in D_2)$，则 $u = \sup D_1$。又由 $D_3 \subseteq (A_1 + A_2)^+$，这表明 $u \in [A_1 \cap A_2]$，所以 $[A_1] + [A_2] \subseteq [A_1 \cap A_2]$。

定理 3.3 设 X 是模糊 Riesz 空间，f, g, h 是 X 中的元素，则下列各式成立：

(1) 若 $f \perp g$，$|h| \le |f|$，则 $h \perp g$；

(2) 若 $f \perp g$，则 $f^+ \perp g$，$f^- \perp g$；

(3) 若 $f_1, \cdots, f_n$ 是一列非零且两两不交的元素，则称它们是线性无关的。

证明：(1)假设 $f \perp g$ 且 $\mu(|h|, |f|) > \frac{1}{2}$，所以 $\mu(0, |h| \wedge |g|) > \frac{1}{2}$，$\mu(|h| \wedge |g|, |f| \wedge |g|) > \frac{1}{2}$。又因为 $|f| \wedge |g| = 0$，所以 $|h| \wedge |g| = 0$，即 $h \perp g$。

(2) 假设 $f \perp g$，f^+ 和 f^- 都是正元素，因为 $\mu\left(f^+,|f|\right)>\frac{1}{2}$，$\mu\left(f^-,|f|\right)>\frac{1}{2}$，所以 $f^+ \perp g$，$f^- \perp g$。

(3) 假设 $f_1,\cdots,f_n$ 是一列非零元素且两两不交。设这列元素不是线性无关的，所以存在其中一个元素 f_1 可由其它剩余元素线性表示，不妨设为 $f_1=\alpha_2 f_2+\cdots+\alpha_n f_n$。由定理 4.18 [4]可得 $f_1 \perp \left(\alpha_2 f_2+\cdots+\alpha_n f_n\right)$，所以 $f_1 \perp f_1$。这表明 $f_1=0$。与假设矛盾。所以 $f_1,\cdots,f_n$ 是线性无关的。

定理 3.4 设 X 是模糊 Riesz 空间，则 X 是模糊 Archimedean 空间的充要条件是由 X 的任意非空子集 D 生成的模糊带是 D^{dd}。

证明：假设 X 是模糊 Riesz 空间，$[D]$ 由子集 D 生成。定理 5.8 [8]表明 $[D]^d \subseteq D^d$。反之，假设 $x \in D^d$，下需证明 $x \in [D]^d$，即对任意 $h \in [D]$，有 $|x| \perp |h|$ 成立。由定理 5.3 [8]可知，存在 $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A} \in A_D^+$ 使得 $h_\alpha \uparrow |h|$。再由定理 3.3 可知 $|x| \perp |h|$。这表明 $x \in [D]^d$。所以 $D^d \subseteq [D]^d$。所以 $D^d=[D]^d$，$D^{dd}=[D]^{dd}$，$D^{dd}=[D]$。

另一方面，D^{dd} 由 D 生成，记作 $[D]$。引理 5.7 [8]表明 $[D]=[D]^{dd}=D^{dd}$。定理 5.8 [8]表明 X 是模糊 Archimedean 空间。

在文献[4]中，I. Beg 已证明若在模糊 Riesz 空间中结合律成立，则无限分配率也成立。接下来，定理 3.5 将在没有结合律成立的情况下证明无限分配率成立。

定理 3.5 设 X 是模糊 Riesz 空间，$\left\{y_j\right\}_{j\in J}$ 是 X 中的一列数且 $y_j \in X$。任意 $x \in X$，当 $\vee y_j$ 存在时，有 $\vee\left(x\wedge y_j\right)$ 存在，此时下式成立：

$$x\wedge\left(\vee y_j\right)=\underset{j\in J}{\vee}\left(x\wedge y_j\right)。$$

证明：设 $\left\{y_j\right\}_{j\in J}$ 是 X 中的一列数且 $\vee y_j$ 存在，假设 $\vee y_j=a$，下面证明 $x\wedge a=\underset{j\in J}{\vee}\left(x\wedge y_j\right)$。因为 $\mu\left(y_j,a\right)>\frac{1}{2}$，所以对任意 $j\in J$，我们有 $\mu\left(x\wedge y_j,x\wedge a\right)>\frac{1}{2}$。这表明 $x\wedge a$ 是 $\left\{x\wedge y_j\right\}$ 的一个上界。假设 h 是它的任意一个上界。由性质 2.12 [3]可得 $\mu\left(x\wedge y_j,h\right)>\frac{1}{2}$，这表明 $\mu\left(y_j+x-y_j\vee x,h\right)>\frac{1}{2},\forall j\in J$。进一步可得 $\mu\left(y_j,h-x+a\vee x\right)>\frac{1}{2},\forall j\in J$。由 y_j 的任意性，所以 $\mu\left(a,h-x+a\vee x\right)>\frac{1}{2}$ 成立，且 $\mu\left(a+x-a\vee x,h\right)>\frac{1}{2}$。因此 $x\wedge a=\underset{j\in J}{\vee}\left(x\wedge y_j\right)$。即证 $x\wedge\left(\vee y_j\right)=\underset{j\in J}{\vee}\left(x\wedge y_j\right)$。

4. 模糊投影带

本节先在模糊 Riesz 空间中讨论了模糊投影带，然后给出模糊序基的定义，最后讨论模糊序稠的一些性质及模糊理想与模糊带之间的关系。

定理 4.1 设 X 是模糊 Riesz 空间，P 是模糊带，则 P 是模糊投影带当且仅当任意 $u\in X^+$ 有 $u_1=\sup\left(v:v\in P^+,\mu(v,u)>\frac{1}{2}\right)$，其中 u_1 是 u 在 P 上的部分，$u_2=\sup\left(w:w\in P^{d^+},\mu(w,u)>\frac{1}{2}\right)$，$u_2$ 是 u 在 P^d 上的部分。并且 $u=u_1+u_2$，其中 $u_1\in P$，$u_2\in P^d$。

证明：假设 P 是模糊投影带，则 $X=P+P^d$。任取 $u\in P$，则存在 $u_1\in P$，$u_2\in P^d$ 使得 $u=u_1+u_2$。令 $V=\sup\left(v:v\in P^+,\mu(v,u)>\frac{1}{2}\right)$。任意 $v\in V$ 有 $\mu(0,u-v)>\frac{1}{2}$，所以 $u-v=\left(u_1-v\right)+u_2$，$\mu\left(0,u_1-v\right)>\frac{1}{2}$，进一步可得 $\mu\left(v,u_1\right)>\frac{1}{2}$。这表明 $u_1\in U(V)$，所以 u_1 是 V 的上界，$u_1=\sup\left(v:v\in P^+,\mu(v,u)>\frac{1}{2}\right)\in P$。同理可得 $u_2=\sup\left(w:w\in P^{d^+},\mu(w,u)>\frac{1}{2}\right)\in P^d$。反之，假设 P 是模糊带，所以 $u_1\in P$ 时有

$u_1=\sup\left(v:v\in P^+,\mu(v,u)>\frac{1}{2}\right)$。因为 $u_2=u-u_1$， $X=P+P^d$，由模糊投影带的定义可知 P 是模糊投影带。假设 $u_2\notin P^d$。令 $p=u_2\wedge z$，则 $p\in P^+$ 且 $\mu(p,u_2)>\frac{1}{2}$，所以 $u_1+p\in P$， $\mu(u_1+p,u)>\frac{1}{2}$，这表明 $u_1+p\in\left(v:v\in P,\mu(v,u)>\frac{1}{2}\right)$。又 $\mu\left((u_1+p),\sup\left(v:v\in P,\mu(v,u)>\frac{1}{2}\right)\right)>\frac{1}{2}$， $\mu(p,0)>\frac{1}{2}$，与假设矛盾，所以 $u_2=u-u_1\in P^d$，即 P 是模糊投影带。

定理 4.2 设 X 是模糊 Riesz 空间，P 是由 $v\in X^+$ 生成的模糊正则带，则下列各式成立：

(1) P 是模糊投影带当且仅当任意 $u\in X^+$ 有 $u_1=\sup(u\wedge nv:n=1,2,\cdots)$ 存在，其中 u_1 是 u 在 P 上的部分。此时， $u_1=Pu$。

(2) 若 u 是 P 的正元素，则 $u=\sup(u\wedge nv:n=1,2,\cdots)$ 存在。

证明：(1)设 P 是由 $v\in X^+$ 生成的模糊正则带。任取 $u\in X^+$，定义 $W=\left(w\in P^+:\mu(w,u)>\frac{1}{2}\right)$，$W_1=(u\wedge nv:n=1,2,\cdots)$。显然有 $W_1\subseteq W$，即 W 的上界都是 W_1 的上界。下面证明 W_1 的上界都是 W 的上界。设 $w\in W$，所以存在向上集 $(w_\tau:\tau\in\{\tau\})\uparrow w$，且该向上集是由 $v\in X^+$ 生成的模糊正则理想的子集，所以 $\mu(w_\tau,n_\tau v)>\frac{1}{2}$， $n_\tau\in N$。已知 $\mu(w_\tau,w)>\frac{1}{2}$， $\mu(w,u)>\frac{1}{2}$，还需证明 $\mu(w_\tau,(u\wedge n_\tau v))>\frac{1}{2}$。这表明 W_1 的上界都是 W 的上界，且 W 和 W_1 有相同上界。所以 $\sup W_1$ 存在等价于 $\sup W$ 存在，且 $\sup W_1=\sup W$。由定理 4.1 可知 P 是模糊正则带当且仅当 $u_1=\sup W$ 存在当且仅当 $u_1=\sup W_1=\sup(u\wedge nv:n=1,2,\cdots)$ 存在，其中 u_1 是 u 在 P 上的部分。

(2) 假设 P 是由它自己生成的模糊 Riesz 空间，则 P 也是由 v 生成的模糊正则带，由(1)可知，任意 $u\in P^+$， $u=\sup(u\wedge nv:n=1,2,\cdots)$ 存在。

性质 4.3 设 X 是模糊 Riesz 空间，任意 $f,g,h\in X$，有

(1) $|f\vee h-g\vee h|+|f\wedge h-g\wedge h|=|f-g|$；

(2) $\mu(|f\vee h-g\vee h|,|f-g|)>\frac{1}{2},\mu(|f\wedge h-g\wedge h|,|f-g|)>\frac{1}{2}$。

证明：(1)由性质 2.12 [3]可得(1)。(2)由(1)可得。

性质 4.4 设 X 是模糊 Riesz 空间，任意正数 $u,v,w\in X$，有

$$u\wedge w+v\wedge w-w\leq(u+v)\wedge w\leq u\wedge w+v\wedge w\leq u\wedge v+w \tag{3}$$

和

$$u\vee v\leq u\vee w+v\vee w-w\leq(u+v)\vee w\leq u\vee w+v\vee w \tag{4}$$

如果 $v\wedge w=0$，则 $(u+v)\wedge w=u\wedge w$。

如果 $u\wedge v=0$，则 $(u+v)\wedge w=u\wedge w+v\wedge w$。

证明：$\mu(u\wedge v+v\wedge w,u\wedge v+w)>\frac{1}{2}$ 显然成立。令 $l=u\wedge w+v\wedge w$，所以 $\mu(l,u+w)>\frac{1}{2}$，$\mu(l,v+w)>\frac{1}{2}$，因为 $(u+w)\wedge(v+w)=u\wedge v+w$，所以 $\mu(l,u\wedge v+w)>\frac{1}{2}$，从而(3)中的最后一个不等式成立。同理可证 $\mu(u\wedge w+v\wedge w-w,(u+v)\wedge w)>\frac{1}{2}$。因为 $\mu(u\wedge w,u)>\frac{1}{2}$， $\mu(u\wedge w,w)>\frac{1}{2}$， $\mu(v\wedge w,v)>\frac{1}{2}$， $\mu(v\wedge w,w)>\frac{1}{2}$，所以 $\mu(u\wedge w+v\wedge w,u+v)>\frac{1}{2}$， $\mu(u\wedge w+v\wedge w,w+w)>\frac{1}{2}$，所以

$\mu\left(u\wedge w+v\wedge w-w,(u+v)\wedge w\right)>\frac{1}{2}$。最后证明(3)中的第二个不等式，记作(4)式。由性质 4.3 可知 $(u+v)\wedge w-u\wedge w=\left|(u+v)\wedge w-u\wedge w\right|$，$\mu\left(\left|(u+v)\wedge w-u\wedge w\right|,\left|(u+v)-u\right|=v\right)>\frac{1}{2}$，因为 $\mu\left((u+v)\wedge w-u\wedge w,(u+v)\wedge w\right)>\frac{1}{2}$，$\mu\left((u+v)\wedge w,w\right)>\frac{1}{2}$，所以 $\mu\left((u+v)\wedge w-u\wedge w,v\wedge w\right)>\frac{1}{2}$。由 $\mu\left((u+v)\vee w,u\vee w+v\vee w\right)>\frac{1}{2}$，$\mu\left(u,u\vee w\right)>\frac{1}{2}$，$\mu\left(w,u\vee w\right)>\frac{1}{2}$，$\mu\left(v,v\vee w\right)>\frac{1}{2}$，$\mu\left(w,v\vee w\right)>\frac{1}{2}$，所以 $\mu\left((u+v)\vee w,u\vee w+v\vee w\right)>\frac{1}{2}$。同理可证，$\mu\left(u\vee v,u\vee w+v\vee w-w\right)>\frac{1}{2}$成立。由于 $\mu\left((u+v)\wedge w,u\wedge w+v\wedge w\right)>\frac{1}{2}$，$u+v+w=(u+w)+(v+w)-w$，所以 $\mu\left(\left((u+w)+(v+w)-w-(u+v)\wedge w\right),\left((u+w)+(v+w)-w-(u\wedge w+v\wedge w)\right)\right)>\frac{1}{2}$。所以 $\mu\left(u\vee v,u\vee w+v\vee w-w\right)>\frac{1}{2}$。

若 $v\wedge w=0$，由(3)式可知 $\mu\left((u+v)\wedge w,u\wedge w\right)>\frac{1}{2}$，$\mu\left(u,u+v\right)>\frac{1}{2}$，这表明 $\mu\left(u\wedge w,(u+v)\wedge w\right)>\frac{1}{2}$ 成立，所以 $(u+v)\wedge w=u\wedge w$。

若 $u\wedge v=0$，则 $u+v=u\vee v+u\wedge v$，所以 $u+v=u\vee v$。记 $u_1=u\wedge w$，$v_1=v\wedge w$，所以 $u_1+v_1=u_1\vee v_1$，这就证明了 $(u+v)\wedge w=(u\vee v)\wedge w=(u\wedge w)\vee(v\wedge w)=u_1\vee v_1=u_1+v_1=u\wedge w+v\wedge w$。

定义 4.5 假设 X 是模糊 Riesz 空间，A 是 X 中的模糊理想，$\left\{f_\sigma:\sigma\in\{\sigma\}\right\}$ 是 A 中的集合。

(1) 如果 $\left\{f_\sigma:\sigma\in\{\sigma\}\right\}$ 生成的模糊理想在 A 上模糊序稠，则称 $\left\{f_\sigma:\sigma\in\{\sigma\}\right\}$ 是 A 的模糊序基；

(2) 如果 $\left\{f_\sigma:\sigma\in\{\sigma\}\right\}$ 生成的模糊理想在 A 上模糊准序稠，则称 $\left\{f_\sigma:\sigma\in\{\sigma\}\right\}$ 是 A 的模糊准序基。

定理 4.6 设 X 是模糊 Riesz 空间，下列各式成立：

(1) 假设 X 有有限或可数模糊序基时，X 中的每个模糊投影带也有有限或可数模糊序基。

(2) 假设 X 有模糊投影性。如果 X 中的每个模糊带有有限或可数模糊序基，则模糊带中的模糊带也有有限或可数模糊序基。

(3) 假设 X 有模糊投影性且有有限或可数模糊序基，则 X 中的每个模糊带有有限或可数模糊序基。

证明：假设 P 是 X 中的投影带，$(u_n:n=1,2,\cdots)$ 是 X 的模糊序基且有 $u_n\in X^+,u_n\uparrow$。任意 $n\in N$，令 $u_n=v_n+w_n$，$u_n\in P,w_n\in P^d$，下面证明 $(v_n:n=1,2,\cdots)$ 是 A 的模糊序基。任取 $z\in X^+$，有 $z=\sup\left(z\wedge nv_n:n=1,2,\cdots\right)=\sup\left(z\wedge\left(nv_n+nw_n\right):n=1,2,\cdots\right)$。因为 $P^+=P\cap X^+$，所以存在 $z\perp w_n,\forall n\in N$。由性质 4.4 可知 $z\wedge\left(nv_n+nw_n\right)=z\wedge nv_n,\forall n\in N$，所以 $z=\sup\left(z\wedge nv_n:n=1,2,\cdots\right)$。因为 $z\in P^+$ 是 $(v_n:n=1,2,\cdots)$ 生成的模糊带中的元素，所有 P 包含在这个模糊带中。反过来，显然有 $(v_n:n=1,2,\cdots)$ 生成的模糊带包含在 P 中。所以 P 与由 $(v_n:n=1,2,\cdots)$ 生成的模糊带等价。所以 $(v_n:n=1,2,\cdots)$ 是 P 的模糊序基。

(2)和(3)的证明由(1)可得。

定义 4.7 设 X 是模糊 Riesz 空间，A 和 B 是模糊理想。若 $B\subseteq A^{dd}$，则 A 在 B 中模糊序稠，即当 $0\neq f\in B$ 时存在 $0\neq g\in A$ 使得 $\mu\left(|g|,|h|\right)>\frac{1}{2}$。

定理 4.8 假设 X 是模糊 Riesz 空间，A 是模糊理想，则模糊理想 $A\oplus A^d$ 模糊准序稠。

证明：$A\subseteq A\oplus A^d$，$A^d\subseteq A\oplus A^d$ 显然成立，所以 $\left(A\oplus A^d\right)^d\subseteq A^d$，$\left(A\oplus A^d\right)^d\subseteq A^{dd}$，所以

$(A\oplus A^d)^d \subseteq A^d \cap A^{dd}$，$(A\oplus A^d)^d=\{0\}$，$(A\oplus A^d)^{dd}=E$。因为 $A\oplus A^d \subseteq (A\oplus A^d)^{dd}=E$，所以 $A\oplus A^d$ 在 X 上模糊准序稠。

定义 4.9 设 X 是模糊 Archimedean 空间，G 是 X 的模糊 Riesz 子空间，则 G 在 X 上模糊序稠当且仅当任意 $x\in X^+$，$\left\{y\in G^+:\mu(y,x)>\frac{1}{2}\right\}\uparrow x$。

证明：假设 $x\in X^+$，$\left\{y\in G^+:\mu(y,x)>\frac{1}{2}\right\}\uparrow x$，所以 $\mu(y,x)>\frac{1}{2}$，由模糊序稠定义可知 G 在 X 上模糊序稠。反之，假设 G 在 X 上模糊序稠，则 $\mu(y,x)>\frac{1}{2}$，从而 $x\in U(y)$。假设存在正元素 $z\in X^+$ 满足 $\mu(z,x)>\frac{1}{2}$，且对任意 $y\in G$ 有 $\mu(y,z)>\frac{1}{2}$ 成立，则 $z\in U(y)$ 且 $\mu(0,x-z)>\frac{1}{2}$。因为 G 在 X 上模糊序稠，所以存在 $u\in G^+$ 使得 $\mu(u,x-z)>\frac{1}{2}$。由 $\mu(u,z)>\frac{1}{2}$，所以 $\mu(2u,x)>\frac{1}{2}$。由数学归纳法可得 $\mu(nu,x)>\frac{1}{2}$。这与假设矛盾，所以 $\mu(z,x)>\frac{1}{2}$ 不成立，所以 $\mu(x,z)>\frac{1}{2}$，即 $z\in U(x)$。所以 $\left\{y\in G^+:\mu(y,x)>\frac{1}{2}\right\}\uparrow x$。

定理 4.10 设 X 是模糊 Archimedean 空间，则由 X 中的子集 A 生成的模糊带即为 A^{dd}。

证明：由 A 生成的模糊带与 A 生成的模糊理想是一样的。所以不妨设 A 是模糊理想。定理 4.8 [8]表明 A 在 A^{dd} 中模糊序稠。定理 4.9 证明，任意 $x\in A^{dd}$，存在 $\{x_\alpha\}\subseteq A^+$ 满足 $\mu(x\alpha,x)>\frac{1}{2}$ 且 $x=\sup\{x_\alpha\}$。所以 A^{dd} 是包含 A 的最小模糊带。

性质 4.11 设 A 是模糊 Riesz 空间 X 的模糊理想，$\{f_\sigma:\sigma\in\{\sigma\}\}$ 是 A 的模糊序基当且仅当 $\{|f_\sigma|:\sigma\in\{\sigma\}\}$ 也是 A 的模糊序基。$(u_\tau:\tau\in\{\tau\})$ 是向上集，则对任意 $n\in N$，$\sigma_1\cdots,\sigma_n\in\{\sigma\}$，$(|f_{\sigma_1}|,\cdots,|f_{\sigma_n}|)$ 是 $|f_\sigma|$ 的有限上界。$(u_\tau:\tau\in\{\tau\})$ 也是 A 的模糊序基。若模糊理想是由 $(u_\tau:\tau\in\{\tau\})$ 生成的，则存在非负 $c=c_\tau$，$\tau=\tau_f$ 满足 $|f|\le cu_\tau$。

证明：已知 $\{f_\sigma\}$ 是 A 的模糊序基，设 A_1 为由 $\{f_\sigma\}$ 生成的模糊理想，则 A,A_1 都在 A 中模糊序稠。所以存在 $y\in A_1^+$ 使得对任意 $x\in A$ 有 $\mu(y,x)>\frac{1}{2}$，$|y|\in A_1^+$ 满足 $\mu(|y|,|x|)>\frac{1}{2}$，所以由 $\{|f_\sigma|\}$ 生成的模糊理想在 A 上模糊序稠，且 $\{|f_\sigma|\}$ 是 A 的模糊序基。假设 $\{|f_\sigma|\}$ 是 A 的模糊序基，A 和 A_2 都是由 $\{|f_\sigma|\}$ 生成的模糊理想，则 A 和 A_2 都在 A 上模糊序稠。任意 $|x|\in A$，存在 $y\in A_2^+$ 使得 $\mu(|y|,|x|)>\frac{1}{2}$。因为 A 和 A_2 是模糊理想，所以 $x\in A^+,y\in A_2^+$，所以 $\mu(y,x)>\frac{1}{2}$。

定理 4.12 假设 X 是模糊 Riesz 空间，P 是 X 上由有限或可数集 $(v_n:n=1,2,\cdots)$ 生成的模糊带，且 $v_n\uparrow$，则任意 $u\in P^+$，存在 $u=\sup(u\wedge nv_m:m,n=1,2,\cdots)=\sup(u\wedge nv_n:n=1,2,\cdots)$。

证明：令 $P_{(v)}$ 是由 $(v_n:n=1,2,\cdots)$ 生成的模糊理想，P 是由 $P_{(v)}$ 生成的模糊带。由定理 4.2 已知，u 是所有满足 $\left(w\in P^+:\mu(w,u)>\frac{1}{2}\right)$ 的 w 构成集合的上确界，即任意 $w\in P^+$ 满足 $\mu(w,u)>\frac{1}{2}$ 时，有 $u=\sup W$。定义 $W_1=(u\wedge nv_m:m,n=1,2,\cdots)$，$W_2=(u\wedge nv_n:n=1,2,\cdots)$，显然有 $W_2\subseteq W_1\subseteq W$。反之，我们需要证明 w 也是 W_1 和 W_2 的上确界。任取 $w\in W^+$，则 $w\in P_{(v)}$。由性质 4.11 可知存在 $k=k_w,m=m_w$ 使得 $\mu(w,kv_w)>\frac{1}{2}$。令 $n=\max(k,m)$，所以 $\mu(w,u\wedge nv_n)>\frac{1}{2}$。因为 $w\in P_{(v)}$，所以 $\mu(w,u)>\frac{1}{2}$。由 $\mu(w,nv_n)>\frac{1}{2}$ 可得

$\mu(w,u\wedge nv_n)>\frac{1}{2}$。所以 W_2 的所有上界都是 W 的上界，即 $\sup W=\sup W_1=\sup W_2$。

定理 4.13 假设 X 是模糊 Riesz 空间，且 X 是模糊 Dedekind σ-完备或有模糊投影性，P 是由 $(v_n:n=1,2,\cdots)\subseteq X$ 生成的模糊带且 $v_n\in X^+,v_n\uparrow$，则 P 是模糊投影带，
$Pu=\sup(u\wedge nv_m:m,n=1,2,\cdots)=\sup(u\wedge nv_n:n=1,2,\cdots)$ 是 $u\in X^+$ 在 P 上的部分。

证明：令 $P_{(v)}$ 是由 $(v_n:n=1,2,\cdots)$ 生成的模糊理想，P 是由 $P_{(v)}$ 生成的模糊带。任取 $u\in X^+$，令 $W=\left(v\in P_v^+:\mu(w,u)>\frac{1}{2}\right)$，$W_1=(u\wedge nv_m:m,n=1,2,\cdots)$，$W_2=(u\wedge nv_n:n=1,2,\cdots)$。根据定理 4.12 的结论可知 W,W_1,W_2 有相同的上界。令 $W_0=\left(w\in P^+:\mu(w,u)>\frac{1}{2}\right)$，所以 $W\subseteq W_0$。下面证明 W 的上界都是 W_0 的上界。又因为 W_0 的元素都是 W 的上界，所以 W,W_1,W_2 有相同上界。

如果 X 有模糊投影性，则 P 是 X 的模糊投影带。根据定理 4.1，所以 $Pu=\sup W_0$，所以
$Pu=\sup W_0=\sup W_1=\sup W_2$。

如果 X 是模糊 Dedekind σ-完备，则 $\sup W_0,\sup W_2$。由定理 4.1 可知，P 是模糊投影带且 $Pu=\sup W_0$。所以 $Pu=\sup W_1=\sup W_2$。

定理 4.14 设 X 是模糊 Riesz 空间。令 $u\in X^+$，序列 $(u_n:n=1,2,\cdots)$ 是递减序列，则 $\frac{u}{n}\downarrow 0$ 当且仅当 $u\in A^{dd}$ 使得 $u\in[A]$。

证明：假设 A 是模糊理想且 $\frac{u}{n}\downarrow 0,u\in A^{dd}$，$u\in[A]$ 不成立。即 $u\neq\sup\left\{M_u=\left(v\in A:\mu(v,u)>\frac{1}{2}\right)\right\}$。所以集合 M_u 存在上界 w_1 满足 $\mu(w_1,u)>\frac{1}{2}$。令 $w=u\wedge w_1$，则 w 是 M_u 的上界且 $\mu(w,u)>\frac{1}{2}$，这表明 $u-w\in A^{dd}$。因为 $A\subseteq A^{dd}$，所以 A 在 A^{dd} 中模糊序稠。从而存在 $z\in A$，使得 $\mu(0,z)>\frac{1}{2}$，$\mu(z,u-w)>\frac{1}{2}$。对任意 $v\in M_u$，可以得到 $z+v\in A^+$，$\mu(z+v,z+w)>\frac{1}{2}$，$\mu(z+w,u)>\frac{1}{2}$。由 v 的任意性，令 $v=z,2z,\cdots$，可得 $nz\in M_u$ 且满足 $\mu(nz,u)>\frac{1}{2}$，所以 $\mu(0,z)>\frac{1}{2}$，$\mu\left(z,\frac{u}{n}\right)>\frac{1}{2}$。与假设矛盾，所以 $u\in[A]$。

已知当 $u\in[A]$ 时有 $u\in A^{dd}$，而 $\frac{u}{n}\downarrow 0$ 不成立。所以存在 $v\in X^+$ 使得 $\mu(nv,u)>\frac{1}{2}$。令 $A=A_v+A_v^d$，其中 A_v 是由 v 生成的模糊正则带。由定理 4.13 可知 A 在 X 上模糊序稠，所以 $A^{dd}=E,u\in A^{dd}$。下面证明 $u\notin[A]$。设 $M_u=\left(w\in A^+,\mu(w,u)>\frac{1}{2}\right)$。证明 $u\notin[A]$ 等价证明 $u\neq\sup M_u$。取 $w\in M_u$ 满足 $w=w_1+w_2$，$\mu(w_1,w)>\frac{1}{2}$，$\mu(w_2,w)>\frac{1}{2}$，其中 $w_1\in A_v$，$w_2\in A_v^d$。由 $A_v=\left(f:\mu(|f|,nv)>\frac{1}{2}\right)$ 的定义，所以任意 $n\in N$，有 $\mu(w_1,nv)>\frac{1}{2}$。所以 $\mu(w_1+v,(n+1)v)>\frac{1}{2}$，$\mu((n+1)v,u)>\frac{1}{2}$，进一步可得 $w_1+v\in A_v$，$\mu(w_2,w)>\frac{1}{2}$，$\mu(w,u)>\frac{1}{2}$，$w_2\perp w_1+v$，所以 $w_2+(w_1+v)=w_2\vee(w_1+v)$，$\mu(w_2+(w_1+v),u)>\frac{1}{2}$，所以 $\mu(w,u-v)>\frac{1}{2}$ 成立。这证明 $u-v$ 是 M_u 的上界。又 $\mu(0,v)>\frac{1}{2}$，与假设矛盾，所以 $u\notin[A]$。

5. 结论

本篇文章，首先研究讨论了模糊 Riesz 空间的模糊不交补的一些性质；然后我们给出了模糊序稠的

定义，并研究了模糊理想和模糊带的关系；最后，本文提出模糊序基的概念并讨论了它的一些基本性质。

基金项目

国家自然科学基金资助(11801458)。

参考文献

[1] Zadeh, L. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[2] Zadeh, L. (1971) Similarity Relations and Fuzzy Ordering. *Information Science*, **8**, 177-200. https://doi.org/10.1016/S0020-0255(71)80005-1

[3] Venugopalan, P. (1992) Fuzzy Ordered Sets. *Fuzzy Sets & Systems*, **46**, 221-226. https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90134-P

[4] Beg, I. and Islam, M.U. (1994) Fuzzy Riesz Spaces. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **2**, 211-241.

[5] Beg, I. and Islam, M.U. (1995) Fuzzy Ordered Linear Spaces. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **3**, 659-670.

[6] Beg, I. and Islam, M.U. (1997) Fuzzy Archimedean Spaces. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **5**, 413-423.

[7] Beg, I. (1997) σ-Complete Fuzzy Riesz Spaces. *Results in Mathematics*, **31**, 292-299. https://doi.org/10.1007/BF03322166

[8] Liang, H. (2015) Fuzzy Riesz Subspaces, Fuzzy Ideals, Fuzzy Bands and Fuzzy Band Projections. *Annals of the West University of Timisoara*: *Mathematics and Computer Science*, **53**, 77-108. https://doi.org/10.1515/awutm-2015-0005

[9] Ajmal, N. and Thomas, K.V. (1994) Fuzzy Lattices. *Information Sciences*, **79**, 271-291. https://doi.org/10.1016/0020-0255(94)90124-4

[10] Cheng, N. and Chen, G.G. (2021) Fuzzy Rieszhomomophism on Fuzzy Riesz Space. arxiv:2104.07498v1.

[11] Cheng, N., Liu, X. and Dai, J. (2022) Extension of Fuzzy Linear Operators on Fuzzy Riesz Spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **179**, Article ID: 103168. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2022.103168