Pure Mathematics 理论数学, 2022, 12(5), 838-847
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2022.125094

正定二次型在《高等代数》考研试题中的应用

刘　丹，廖小莲

湖南人文科技学院数学与金融学院，湖南　娄底

收稿日期：2022年4月19日；录用日期：2022年5月20日；发布日期：2022年5月30日

摘　要

正定二次型是《高等代数》中实二次型中的一类特殊形式，也是《高等代数》考研试题中的题型之一，探讨正定二次型在《高等代数》考研试题中的应用有很好的现实意义。文章首先对正定二次型的相关知识进行了简单阐述，然后重点对正定二次型在考研试题中的应用从四个方面进行了探讨。具体从正定二次型在二次型的性质中的应用，正定二次型在矩阵秩中的应用、在矩阵对角化中的应用、在分块矩阵中的应用四方面进行分析，并用近年的考研真题进行了剖析，对数学与应用数学考研学生有一定的应用价值。

关键词

正定二次型，高等代数，正定矩阵，矩阵的秩，特征值，正交矩阵

Application of Positive Definite Quadratic Form in Postgraduate Entrance Examination Questions of *Advanced Algebra*

Dan Liu, Xiaolian Liao

School of Mathematics and Finance, Hunan University of Humanities, Science and Technology, Loudi Hunan

Received: Apr. 19th, 2022; accepted: May 20th, 2022; published: May 30th, 2022

Abstract

Positive definite quadratic form is a special type of real quadratic form in *Advanced Algebra*, and it is also one of the question types in the postgraduate entrance examination questions of *Advanced Algebra*. It is of great practical significance to discuss the application of positive definite quadratic form in the postgraduate entrance examination of *Advanced Algebra*. Firstly, the article briefly expounds on the relevant knowledge of the positive definite quadratic form, and then focuses on the application of the positive definite quadratic form in the postgraduate examination questions

文章引用: 刘丹, 廖小莲. 正定二次型在《高等代数》考研试题中的应用[J]. 理论数学, 2022, 12(5): 838-847.
DOI: 10.12677/pm.2022.125094

from four aspects. Specifically, it analyzes the application of positive definite quadratic form in the properties of quadratic form, the application of positive definite quadratic form in matrix rank, the application in matrix diagonalization, and the application in block matrix, and analyzes the real questions of postgraduate entrance examination in recent years, which has certain application value for postgraduate students of mathematics and applied mathematics.

Keywords

Positive Definite Quadratic Form, Advanced Algebra, Positive Definite Matrix, Rank of Matrix, Eigenvalue, Orthogonal Matrix

1. 引言

《高等代数》是数学类专业的基础课程，也是数学类专业考研的专业课程之一。正定二次型是《高等代数》中实二次型中的一类特殊形式，也是高等代数考研大纲中的重要内容之一。由于正定二次型具有独特的性质，我们可以利用正定二次型解决高等代数中诸如有关秩的问题、求解数学分析中多元函数的极值问题等等。因此，在历年来的《高等代数》考研试题中，有关正定二次型的题目频繁出现，为了在考研过程中轻松应对正定二次型的有关试题，探讨正定二次型在《高等代数》考研试题中的应用具有很好的应用意义。

许多从事高等代数教学的有经验的教师和学者也分别对正定二次型进行了研究。在文献[1]中，张立新提到了二次型的相关性质及二次型在初等数学、高等数学的应用；文献[2]中，潘伟云探讨了正定二次型在二次曲线和二次曲面及正定二次型在不等式中的应用；文献[3]中，苏妍给出了正定二次型的几个常用的判定方法；文献[4]中，张淑娜、郭艳君总结了正定二次型的几个等价条件及正定矩阵的性质；文献[5]中，徐阳栋研究了如何利用二次型理论求多元函数的极值；文献[6]中，王璀滢、廖小莲研究了正定二次型在解决对多元函数极值问题中的应用、正定二次型在解不等式问题中应用、正定二次型在接近二次曲面化简时的应用、正定二次型在因式分解中的应用；文献[7]中，陈丽、杜海霞对正定二次型在证明不等式中的应用、在多项式的因式分解中的应用、在求极值中的应用以及在判断二次曲线的形状的应用进行了探讨。

本文将对正定二次型在历年的考研试题中应用进行剖析，首先我们给出了有关正定二次型的基本定义及性质，再对正定二次型在考研试题中的应用进行了分析，具体从四个方面对正定二次型进行探讨，分别为正定二次型在性质中的应用、在矩阵的秩中的应用、在矩阵对角化中的应用以及在分块矩阵中的应用四个方面。

2. 预备知识

定义 1.1 [8]设 P 是一数域，一个系数在数域 P 中的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+2a_{22}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

称为数域 P 上的一个 n 元二次型。且二次型可以写成

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X'AX,$$

其中，$a_{ij}=a_{ji},A'=A$，则有

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

它就称为二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 的矩阵，且二次型和它的矩阵是相互唯一决定的。

定义 1.2 [8]实二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 称为正定的，如果对于任意一组不全为零的实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，都有 $f\left(c_1,c_2,\cdots,c_n\right)>0$。

定义 1.3 [8]实对称矩阵 A 称为正定的，如果二次型 $X'AX$ 正定。

引理 1.1 [4]设有 n 元二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=X^{\mathrm{T}}AX$，其中 A 为实对称矩阵。

1) 如果二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 正定，那么有 $X^{\mathrm{T}}AX>0$，其中 A 为正定矩阵；

2) 二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=X^{\mathrm{T}}AX$ 正定的充分必要条件该二次型的正惯性指数为 n；

3) 二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=X^{\mathrm{T}}AX$ 正定的充分必要条件为矩阵 A 的顺序主子式全大于零，其中子式

$$H_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 的 i 阶顺序主子式，其中 $i=1,2,\cdots,n$。

性质 1.1 [4]若 A，B 都为 n 阶正定矩阵，则 $A+B$ 也为 n 阶正定矩阵。

性质 1.2 [4]若 A 为 n 阶正定矩阵，则 Ak 也是 n 阶正定矩阵，其中 k 为正整数。

性质 1.3 [8]设 A 为有 n 阶实对称矩阵，如果 A 是正定矩阵，那么必存在 n 阶可逆实矩阵 P，使得 $A=P'P$。

性质 1.4 [8]正定矩阵 A 的特征值都大于零。

性质 1.5 [8]正定矩阵 A 的行列式大于零。

性质 1.6 [8]正定矩阵 A 的主对角线的元素都大于零。

3. 正定二次型在高等代数考研试题中的应用

正定二次型是二次型中一个特殊形式，在考研试题中的应用也是千变万化。下面我们将从正定二次型在二次型的性质的应用、正定二次型在矩阵的秩中的应用、正定二次型在矩阵的对角化的应用及正定二次型在分块矩阵的应用四个方面来对正定二次型在高等代数考研中的试题进行剖析。

3.1. 正定二次型在二次型性质中的应用

正定二次型及正定矩阵的定义及性质也常常会在解题的过程中为我们提供很多的帮助，通过其定义及性质可证明二次型为正定二次型，从而得出结论。

例题 1 (2020 年武汉大学高等代数考研试题)设 A、C 为实对称正定矩阵，已知矩阵方程 $AX+XA=C$ (X 为 n 阶实方阵)有唯一解 B。证明：B 为正定矩阵。

分析：首先，若 A 为正定矩阵，则对任意的非零列向量 x，有 $x'Ax>0$。其次，要证 B 为正定矩阵，只需证明 1) B 是实对称矩阵；2) B 的特征值全大于零即可。

证明：因为矩阵方程 $AX+XA=C$ 有解 B，所以有

$$AB+BA=C \tag{1}$$

因为 A，C 是实对称矩阵，所以 B 是实矩阵，且 $A'=A, C'=C$。将(1)式左右两边同时取转置，可得

$$B'A+AB'=C$$

这说明 B' 也是矩阵方程 $AX+XA=C$ 的解。但因为 B 为该矩阵方程的唯一解，故有 $B'=B$。这就证明了矩阵 B 为实对称矩阵。进而 B 的特征值均为实数。

设 λ 为 B 的任意的一个特征值，ξ 为 λ 对应的特征向量($\xi\neq 0$)，则有

$$B\xi=\lambda\xi$$

因为 B 为实对称矩阵，所以 B 的特征值均为实数，即 λ 为实数。

将 $B\xi=\lambda\xi$ 左右两边取转置，有

$$\xi'B=\xi'\lambda$$

由于 $B'A+AB'=C$，所以

$$\xi'C\xi=\xi'\left(AB+BA\right)\xi=\xi'AB\xi+\xi'BA\xi=2\lambda\xi'A\xi \tag{2}$$

又因为 A、C 都为正定矩阵，且 $\xi\neq 0$，故 $\xi'A\xi>0$，$\xi'C\xi>0$，由(2)式，有 $\lambda>0$。由 λ 的任意性，知 B 的实特征值都大于 0，从而 B 为正定矩阵。

例题 2 (2018 年湘潭大学高等代数考研试题)利用非退化线性替换将二次型

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ax_1^2+bx_2^2+ax_3^2+2cx_1x_3$$

化为标准型，求出所作的非退化线性替换并指出 a，b，c 满足何种条件使得 f 为正定的。

分析：非退化线性替换是将二次型化为标准型的常用方法之一，通常是利用中学所学过的配方法将二次型 $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 进行整理可得到该二次型的标准形，本题中可由正定二次型的标准形的正惯性指数个数等于 3，得出 a，b，c 所满足的条件。

解：由 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ax_1^2+bx_2^2+ax_3^2+2cx_1x_3$，通过配方法可得

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=a\left(x_1+\frac{c}{a}x_3\right)^2+bx_2^2+\left(a-\frac{c^2}{a}\right)x_3^2$$

再对 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 作如下形式的非退化线性替换

$$\begin{cases} x_1=y_1-\dfrac{c}{a}y_3 \\ x_2=y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$$

可得该二次型的标准型

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ay_1^2+by_2^2+\left(a-\frac{c^2}{a}\right)y_3^2$$

由 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 正定，则需满足 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 的正惯性指数为 3，即需满足一下三个条件：

$$\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ a-\dfrac{c^2}{a}>0 \end{cases}$$

即满足$\begin{cases} a > |c| \\ b > 0 \end{cases}$时，二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 正定。

3.2. 正定二次型在矩阵的秩中的应用

矩阵的秩是反应矩阵故有特性的一个重要概念，一个 n 阶矩阵的秩往往可以反映该矩阵的某一特点。矩阵的秩也是高等代数中的基础知识点之一，在解有关正定二次型及正定矩阵的试题常常运用到有关矩阵的秩所得出的一些结论，下面将来探讨正定二次型在矩阵的秩中的考研试题中的常见应用。

例题 3 (2004 年湘潭大学高等代数考研试题)设 A 是 $n\times n$ 实对称矩阵，证明：A 的秩等于 n 的充分必要条件是存在一个 $n\times n$ 实对称矩阵 B，使 $AB+B'A$ 是正定矩阵。

分析：再其充分性，已知实对称矩阵 B 使得 $AB+B'A$ 为正定矩阵，要证 A 的秩等于 n。由矩阵的秩的推论[1]可知，要证 A 的秩为 n，只需证 $|A|\neq 0$，应用正定二次型的定义有 $X^{\mathrm{T}}(AB+B'A)X>0$，可得出 $AX\neq 0$ 的结论，从而 $rank(A)=n$ 得证。

先证明其必要性，已知 A 的秩等于 n，要证存在实对称矩阵 B，使得 $AB+B'A$ 为正定矩阵。由矩阵 A 的秩为 n 可知 A 存在可逆矩阵，且由 A 为实对称矩阵知 A^{-1} 为实对称矩阵，可令 $B=A^{-1}$，再由单位矩阵为正定矩阵可得 $AA^{-1}+(A^{-1})'A$ 是正定矩阵；

证明：先证其充分性：已知矩阵 A 为 $n\times n$ 实对称矩阵，存在可逆矩阵 B，使得 $AB+B'A$ 是正定矩阵，要证明 $rank(A)=n$。

由 $AB+B'A$ 是正定矩阵，由正定二次型及正定矩阵的定义可知对 $\forall x\in R^n$ 且 $x\neq 0$，有：

$$x'(AB+B'A)x=(Ax)'Bx+(Bx)'Ax>0 \tag{3}$$

由(3)式可知，$Ax\neq 0$，又 $x\neq 0$，故 $|A|\neq 0$，所以 $rank(A)=n$。

再证明其必要性：已知 $rank(A)=n$，要证明存在 $n\times n$ 实对称矩阵 B，使得 $AB+B'A$ 是正定矩阵。

由 $rank(A)=n$，可知 A^{-1} 存在，则可令 $B=A^{-1}$，将 A^{-1} 代入 $AB+B'A$ 中有

$$AB+B'A=AA^{-1}+(A^{-1})'A'=E+(AA^{-1})'=2E \tag{4}$$

又单位矩阵为正定矩阵，则由(4)可得 $AB+B'A$ 正定。

例题 4 (2018 年长沙理工大学高等代数考研试题)设 A 是 n 阶正定矩阵，B 是 $n\times m$ 实矩阵。证明：通过 $rank(B)=n$，则 m 阶实方阵 $B'AB$ 必为正定矩阵。

分析：要证明实方阵 $B'AB$ 为正定矩阵，由正定二次型的定义可知，只需证 $X'(B'AB)X>0$ 即可。因为 $rank(B)=n$，由矩阵的秩的相关推论[1]可知，B 的所有列向量线性无关，则可通过线性无关的定义构造一个非零向量使得 $BX\neq 0$，再由正定矩阵 A 的相关性质可证明 $X^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)X>0$。

证明：因为 A 为 n 阶正定矩阵，B 是 $n\times m$ 实矩阵，可知 $B'AB$ 为 m 阶实矩阵。

令

$$B=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$$

其中 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 为 B 的列向量，又由 $rank(B)=n$，故 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 线性无关，则有 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)'$，使得

$$BX=b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m\neq 0$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_m\neq 0$。又因为 A 为正定矩阵，由正定二次型的定义有

$$(BX)'A(BX)>0$$

则可得出 $X'(B'AB)X>0$，故 $B'AB$ 为正定矩阵得证。

3.3. 正定二次型在矩阵的对角化中的应用

特征值是高等代数中的重要概念，各个考研试题中也频繁地出现特征值在其中的应用。在正定矩阵的性质中提到，正定矩阵的特征值都为大于 0 的实数，同时利用正定矩阵为对称矩阵这一性质，可通过与正交矩阵的作乘法将矩阵对角化，所得对角矩阵对角线上的元素即为该正定矩阵的所有特征值，通过这一点，使得我们在证明的过程中可将两个及多个矩阵之间的关系转化为特征值之间的关系，这种解题思路在有关正定二次型的证明过程中多次出现。

例题 5 (2020 年哈尔滨工业大学高等代数考研试题)已知 A，B 为 4 × 4 阶的正定矩阵，且 $A^4=B^4$。问：是否有 $A=B$ 成立？若正确给出证明，错误举出反例。

分析：由于 A，B 为正定矩阵，则有 A^4,B^4 也为正定矩阵，可设 A，B 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 与 μ_1,μ_2,μ_3,μ_4，由此可以得出 A^4 与 B^4 的全部特征值为 $\lambda_1^4,\lambda_2^4,\lambda_3^4,\lambda_4^4$ 与 $\mu_1^4,\mu_2^4,\mu_3^4,\mu_4^4$，通过存在正交矩阵 P 可使得 $P'A^4P=D$ (其中 D 为对角矩阵，其对角线元素为矩阵 A^4 的所有特征值)，可将矩阵 A^4 与其特征值产生关联，再通过 A^4,B^4 的特征值之间的关系得到 A，B 之间的关系。

解：由于 A，B 为 4 × 4 阶正定矩阵，可设 A，B 的全部特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 与 μ_1,μ_2,μ_3,μ_4，由正定矩阵的性质可知，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 与 μ_1,μ_2,μ_3,μ_4 均为正实数，且矩阵 A^4 与 B^4 都为正定矩阵。则有 A^4 与 B^4 的全部特征值为 $\lambda_1^4,\lambda_2^4,\lambda_3^4,\lambda_4^4$ 与 $\mu_1^4,\mu_2^4,\mu_3^4,\mu_4^4$。

由于 $A^4=B^4$，则有 $\lambda_i^4=\mu_i^4\left(i=1,2,3,4\right)$，因此

$$\lambda_i=\mu_i\left(i=1,2,3,4\right)$$

即 A，B 有完全相同的特征值，重数也相同，设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 为 A，B 的全部互异的特征值。

设

$$C=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}\lambda_1^4 & & & \\ & \lambda_2^4 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_4^4\end{pmatrix}$$

由 A，B 都为正定矩阵，则存在正交矩阵 T_1,T_2，使得

$$A=T_1CT_1'$$

$$B=T_2CT_2'$$

由 $A^4=B^4$ 可知，

$$T_1DT_1'=T_2DT_2'$$

则有

$$T_2'T_1D=DT_2'T_1 \tag{5}$$

不妨设 $T_2'T_1=T_{ij}$，则根据(5)式可知

$$T_{ij}\lambda_i^4=\lambda_j^4T_{ij},\left(1\le i,j\le 4\right)$$

当 $i\ne j$ 时，由于 $\lambda_i\ne\lambda_j$，有 $\lambda_i^4\ne\lambda_j^4$，从而 $T_{ij}=O$，显然 T_{ii} 和数量矩阵 $\lambda_i\left(i=1,2,3,4\right)$ 可交换，所以 $T_2'T_1$ 与矩阵 C 可交换，即

$$T_2T_1'C=CT_2T_1'$$

这等价于

$$T_1'CT_1 = T_2'CT_2$$

则有 $A = B$。

例题 5 (2015 年湘潭大学高等代数考研试题)证明：n 阶矩阵 A 为正定矩阵当且仅当存在 n 阶可逆矩阵 Q 使得：$A = Q^{\mathrm{T}}Q$。

分析：先证其充分性，已知 A 为正定矩阵，要证存在 n 阶可逆矩阵 Q 使得 $A = Q^{\mathrm{T}}Q$。通过引入正交矩阵将 A 对角化，将 A 对角化后不难得出存在 n 阶可逆矩阵 Q 使得 $A = Q^{\mathrm{T}}Q$。

再证必要性，已知存在 n 阶可逆矩阵 Q 使得 $A = Q^{\mathrm{T}}Q$，要证 A 为正定矩阵。只需通过正定二次型的定义得出存在任意 n 维非零列向量 x，使得 $x^{\mathrm{T}}Ax > 0$，即可证明 A 为正定矩阵。

证明：先证明其充分性：即已知 n 阶矩阵 A 为正定矩阵，要证存在 n 阶可逆矩阵 Q，使得 $A = Q^{\mathrm{T}}Q$。

由 A 为 n 阶正定矩阵可知，存在正交矩阵 P，使得

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_i\left(i = 1, 2, \cdots, n\right)$ 为 A 的特征值，且 $\lambda_i > 0$，

则有

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{\mathrm{T}}$$

等价于

$$A = \left[P\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}P^{\mathrm{T}}\right]^2$$

可令

$$Q = P\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}P^{\mathrm{T}}$$

由 $\lambda_i\left(i = 1, 2, \cdots, n\right) > 0$，可知 Q 为 n 阶可逆矩阵，则 $A = Q^{\mathrm{T}}Q$ 得证。

再证其必要性：已知存在 n 阶可逆矩阵 Q，使得 $A = Q^{\mathrm{T}}Q$，要证 A 为正定矩阵。要证 A 为正定矩阵，只需证存在非零列向量 x 使得 $x^{\mathrm{T}}Ax > 0$ 即可。

已知 A 为对称矩阵，任取 n 维非零列向量 x，由 Q 为可逆矩阵，可知 $Qx \neq 0$，

则有

$$x^{\mathrm{T}}Ax = x^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}Qx = \left(xQ\right)^{\mathrm{T}}Qx > 0$$

故由正定二次型的定义可知，A 为正定矩阵。

例题 6 (2010 年厦门大学高等代数考研试题)证明：n 阶可逆对称矩阵 A 是正定矩阵的充要条件是对任意 n 阶正定矩阵 B，AB 的迹 $tr(AB)$ 均大于 0。

分析：由正定矩阵的性质知正定矩阵的特征值都为正实数是本题的解题关键。

先证其充分性：已知 A 为 n 阶可逆对称矩阵，B 为任意 n 阶正定矩阵，且 $tr(AB)>0$，要证 A 是正定的。首先，由 A 为对称矩阵，可知存在正交矩阵 P 可将 A 对角化，且对角线元素为 A 的所有特征值。要证 A 为正定矩阵，只需得出对角化后的矩阵对角线上的元素皆为正实数即可。

再证其必要性：已知 A 为 n 阶可逆对称矩阵是正定的，要证对任意 n 阶正定矩阵 B，有 $tr(AB)>0$。由正定矩阵的性质知，正定矩阵的特征值大于零，即正定矩阵的迹大于零。要证 $tr(AB)>0$，只需证与 AB 相似的矩阵的迹大于零，即构造一个正定矩阵相似于 AB 即可。

证明：充分性：已知 A 为 n 阶可逆对称矩阵，B 为任意 n 阶正定矩阵，且 $tr(AB)>0$，要证 A 是正定的。

由于 A 为是对称矩阵，故存在正交矩阵 P，使得

$$P'AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为矩阵 A 的全部特征值，

由 B 为正定矩阵，可令

$$B=P\begin{pmatrix}1 & & & \\ & t & & \\ & & \ddots & \\ & & & t\end{pmatrix}P'$$

其中 $0<t\in R$，则有

$$0<tr(AB)=tr(P'ABP)=tr\left[(P'AP)(P'BP)\right]=\lambda_1+t(\lambda_2+\lambda_3+\cdots+\lambda_n)$$

由于 t 可以任意小，故有 $\lambda_1>0$，同理可证 $\lambda_i>0, i=2,3,\cdots,n$，即 A 的全部特征值都为正实数可得 A 正定。

必要性：已知 A 为 n 阶可逆对称矩阵是正定的，要证对任意 n 阶正定矩阵 B，有 $tr(AB)>0$。

因为 A 为正定矩阵，则存在正交矩阵 D，使得

$$D'AD=H=\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 为 A 的特征值，可令

$$M=\begin{pmatrix}\sqrt{\mu_1} & & & \\ & \sqrt{\mu_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\mu_n}\end{pmatrix}$$

则有

$$A = DHD' = DM^2D' = (DMD')(DMD') \tag{6}$$

令 $C = DMD'$，由(6)式有 $A = C^2$，则有

$$C^{-1}ABC = C^{-1}C^2BC = CBC = C'BC$$

则 AB 与 $C'BC$ 相似，又 B 为正定矩阵，则 $C'BC$ 正定，且正定矩阵的特征值大于零，则有 $tr(AB) > 0$。

3.4. 正定二次型在分块矩阵中的应用

分块矩阵可应用于降低高阶数矩阵的阶数，从而简化计算及证明过程，故分块矩阵也常常使用在有关正定矩阵的证明过程中。

例题 8 (2014 年中国海洋大学高等代数考研试题)设 $A = (a_{ij})$ 是 n 级正定矩阵，证明：$|A| \le \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$。

分析：该题可利用分块矩阵的性质将 A 转换为一个形如二阶的矩阵，对分块矩阵左乘矩阵 $P = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -b'A_{n-1}b & 1 \end{pmatrix}$，再在等式两边取行列式，对结果进行递推运算可直接得出结论。

证明：当 $n = 1$，2 时，结论显然成立。

由 A 为正定矩阵，将矩阵 A 分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ b' & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 $|A_{n-1}| > 0, a_{nn} > 0$，且 $|A| > 0$，对矩阵 A 左乘矩阵 $P = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ -b'A_{n-1}b & 1 \end{pmatrix}$，有

$$PA = \begin{pmatrix} A_{n-1} & b \\ 0 & a_{nn} - b'A_{n-1}^{-1}b \end{pmatrix} \tag{7}$$

将(7)式左右两边取行列式，有

$$|A| = |A_{n-1}||a_{nn} - b'A_{n-1}^{-1}b|$$

则必有

$$|A| < |A_{n-1}|a_{nn}$$

同理有

$$|A_{n-1}| < |A_{n-2}|a_{n-1n-1}$$

依次可证得

$$|A| \le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

4. 结束语

通过对正定二次型在考研试题中的研究，我们将正定二次型在考研中的应用分为正定二次型在二次型性质中的应用，正定二次型在矩阵的秩中的应用，正定二次型在矩阵的对角化中的应用及正定二次型在分块矩阵中的应用四大方面。正定二次型的考题多种多样，在了解正定二次型以及正定矩阵的基本性质之外，还需掌握一定的解题技巧，本文所给出的正定二次型在二次型性质中的应用、在矩阵的秩中的应用、在矩阵的对角化中的应用及在分块矩阵中的应用将会为我们在证明的过程中提供不少的便利，而

在真正的解题过程中，我们还应该将正定二次型在性质中的应用、在矩阵的秩中的应用、在矩阵对角化中的应用及在分块矩阵中的应用灵活地结合起来，这样我们才能更轻松地解决正定二次型在考研试题中的各种题型。

正定二次型的应用极为广泛，正定二次型不仅在考研试题中不容小觑，同时在其他的许多方面也有着广泛应用，例如正定二次型在多元函数求极值中的应用、正定二次型在实际生活中的应用及正定二次型在物理学中的应用等等，若需更深层地去研究正定二次型，则正定二次型在其他各方面的应用都值得我们去一一探讨。

参考文献

[1] 张立新. 二次型在代数学中的应用[J]. 鞍山师范学院学报, 2018, 20(2): 1-7.

[2] 潘伟云. 探讨正定二次型的应用[J]. 吕梁学院学报, 2014, 4(2): 16-17.

[3] 苏妍. 正定二次型的判别方法[J]. 现代盐化工, 2019, 46(2): 135-136. https://doi.org/10.19465/j.cnki.2095-9710.20190731.003

[4] 张淑娜, 郭艳君. 正定二次型的几个等价条件以及正定矩阵的若干性质[J]. 通化师范学院学报, 2000(5): 19-21. https://doi.org/10.13877/j.cnki.cn22-1284.2000.05.007

[5] 徐阳栋. 二次型在多元函数极值问题上的应用[J]. 教育教学论坛, 2015(28): 180-181.

[6] 王璀滢, 廖小莲. 正定二次型的几个应用案例[J]. 教育现代化, 2018, 5(52): 239-241. https://doi.org/10.16541/j.cnki.2095-8420.2018.52.099

[7] 陈丽, 杜海霞. 二次型性质的简单应用[J]. 廊坊师范学院学报(自然科学版), 2013, 13(1): 8-10.

[8] 北京大学数学系前代数小组. 高等代数[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.