Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(1), 46-54
Published Online January 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.131005

平面上保长度的闭凸曲线流及其应用

张永志，李亚尊

云南师范大学，云南 昆明

收稿日期：2022年12月8日；录用日期：2023年1月9日；发布日期：2023年1月18日

摘 要

该文研究了平面上保长度的闭凸曲线流及其应用，在这篇文章中，给出了如果初始闭凸曲线是宽度的常宽曲线，那么在该流下发展曲线保持常宽，并且宽度与初始曲线宽度相等，并利用该曲线流证明平面上闭凸曲线的一个曲率倒数积分的几何不等式，对等号成立做了详细的几何分类解释。

关键词

保长度流，常宽曲线，几何不等式

Closed-Convex Curve Flow with Length Preservation on the Plane and Its Application

Yongzhi Zhang, Yazun Li

Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: Dec. 8^{th}, 2022; accepted: Jan. 9^{th}, 2023; published: Jan. 18^{th}, 2023

Abstract

In this paper, the closed-convex curve flow with preserved length on the plane and its

文章引用: 张永志, 李亚尊. 平面上保长度的闭凸曲线流及其应用[J]. 理论数学, 2023, 13(1): 46-54.
DOI: 10.12677/pm.2023.131005

application are studied. If the initial closed-convex curve is a constant width curve of width, then the development curve remains constant width under the flow, and the width is equal to the width of the initial curve, and the curve flow is used to prove the geometric inequality of the reciprocal integral of a curvature of the closed convex curve on the plane, and the equivalence sign is established to explain the geometric classification in detail.

Keywords

Preserve Length Flow, Constant Width Curve, Geometric Inequality

1. 引言及主要结果

针对速度函数中含有支撑函数的曲线流, 在2001年, 潘生亮在文 [1]中研究过速度函数为以下结构的曲线流. 设X_0是初始闭凸曲线, $X(u,t): S^1 \times [0,T) \to \mathbb{R}^2$是一族平面光滑曲线. $X(u,t)$ 满足以下演化方程

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = (\frac{2\pi}{L(t)}p - 1)N, \\ X(u,0) = X_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中$p = p(u,t)$为演化曲线的支撑函数, $N = N_{in}(u,t)$为演化曲线的单位内法向量, $L(t)$为演化曲线长度.

在曲线流中, 因为改变发展方程的切向向量只影响曲线的参数表示, 而不影响曲线的最终几何形状, 所以可以选择一个适当的切向量来简化曲线的几何分析. 在文 [1]中考虑与方程(1.1)等价的曲线发展方程如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = [\frac{2\pi}{L(t)}p - 1]N_{in} + \gamma T, \\ X(u,0) = X_0(u), u \in S^1, \end{cases} \tag{1.2}$$

$\gamma = -\frac{1}{k}\frac{\partial[\frac{2\pi}{L(t)}p-1]}{\partial s}$为切向分量, T为演化曲线单位切向量.

潘生亮在文 [1]中得到: X_0是初始闭凸曲线, 曲线$X(u,t)$在流(1.2)下演化, 在演化过程中曲线$X(u,t)$保持闭凸性且变得越来越圆, 长度$L(t)$保持不变, 面积$A(t)$增加, 当时间趋于无穷时, 在C^∞度量下曲线的极限是以半径为$\frac{L}{2\pi}$的圆.

近年来, 曲线流在平面闭凸曲线的几何不等式应用非常受关注. 例如: Yang在文 [2]中通过仿射

曲线收缩流证明了有关仿射曲率最小值的不等式; Yang和Wu在文 [3]中通过一种保长度曲线收缩流对逆等周不等式给出新的证明; 夏康杰和郭洪欣在文 [4]中通过建立平面中的曲线收缩流的单调公式, 给出了三个平面曲线几何不等式新的证明, 等等. 受文 [1–4]的启发, 本文将利用曲线流(1.2)给出, 如果初始闭凸曲线是宽度$w(\theta,0)=\frac{L(0)}{\pi}$的常宽曲线, 那么在该流下发展曲线保持常宽, 并且宽度与初始曲线宽度相等. 同时利用该流将证明一个关于曲率倒数的积分的平面闭凸曲线几何不等式, 特别对等号成立做了详细的几何分类解释. 本文的主要定理叙述如下:

定理1.1 如果初始闭凸曲线是宽度$w(\theta,0)=\frac{L(0)}{\pi}$的常宽曲线, 那么在流(1.2)下发展曲线保持常宽, 并且宽度与初始曲线宽度相等.

定理1.2 若X是平面闭凸曲线, 长度为L, 面积为A, 则有以下不等式成立

$$\mu(L^2-4\pi A)+2A+\left|\tilde{A}\right|\le\oint_X\frac{1}{k}ds,\tag{1.3}$$

其中$-\infty<\mu\le\frac{1}{\pi}$, k为曲线曲率, $\tilde{A}$表示曲率中心轨迹的有向面积, 特别地,

(1)$-\infty<\mu<\frac{1}{\pi}$, (1.3)等号成立当其仅当$X$是圆;

(2)$\mu=\frac{1}{\pi}$, 不等式(1.3)等号成立当其仅当X为圆或者次数为6的多项式曲线, 且闭凸曲线都有两条彼此互相垂直的对称线, 多项式曲线方程如下

$$\begin{aligned}0=\,&y^6+(3x^2-\frac{L^2}{4\pi^2}+15a^2-9\frac{aL}{\pi})y^4\\&+(3x^4-78a^2x^2-\frac{L^2}{2\pi^2}x^2+2\frac{aL^3}{\pi^3}+20\frac{a^2L^2}{\pi^2}-72\frac{a^3L}{\pi}+48a^4)y^2\\&+x^6+15a^2x^4+9\frac{aL}{\pi}x^4-\frac{L^2}{4\pi^2}x^4\\&+72\frac{a^3L}{\pi}x^2-4a^2L^4+32\frac{L^2}{\pi^2}a^4-64a^6.\end{aligned}$$

本文的结构安排

本文分为三个部分, 第一部分为引言和主要定理, 这部分主要介绍了速度函数中含有支撑函数保长度的曲线流研究背景及结果, 并且给出近几年部分用曲线流证明不等式的研究进展, 同时给出本文的研究目的和主要结果; 第二部分为预备知识和主要引理, 这部分主要定义了闭凸曲线的几何量, 给出几个重要的引理; 第三部分为主要定理的证明, 这部分利用潘生亮在文 [1]中研究的平面上保长度的闭凸曲线流给出本文的主要定理证明.

2. 预备知识和主要引理

定义2.1 [5]设平面上C^2类曲线(C)的方程为

$$\bar{r}=\bar{r}(t).\tag{2.1}$$

曲线(C)上一点M, 其自然参数为$t(t\in[a,b])$, 另一邻近点M_1, 其自然参数为$t+\triangle t$. 在M、M_1两

点各作曲线(C)的单位切向量$T(t)$ 和$T(t+\triangle t)$. 两个切向量间的夹角是$\triangle\theta$ ，即把点M_1的切向量$T(t+\triangle t)$平移到点M后, 两个向量$T(t)$ 和$T(t+\triangle t)$的夹角为$\triangle\theta$. 我们用平面曲线在点M处的切向量对弧长的旋转速度来定义曲线在点M的曲率, 即平面曲线(C)在点M的曲率为

$$k(t)=\lim_{\triangle t\to 0}\left|\frac{\triangle\theta}{\triangle t}\right|, \tag{2.2}$$

其中$\triangle t$为M点及其邻近点M_1间的弧长, $\triangle\theta$为曲线在点M和M_1的切向量夹角.

定义2.2 [5]曲线$X(s)$的曲率中心轨迹曲线$\tilde{X}(s)$的方程为

$$\tilde{X}(s)=X(s)+\frac{1}{k(s)}N_{in}(s) \tag{2.3}$$

其中s为弧长参数, $N_{in}(s)$为单位内法向量.

定义2.3 [5]凸集的支撑函数和宽度函数: 设K为有界闭凸集, 在平面上任意选取坐标系$x0y$. 自原点0引射线$0R$. 作垂直于$0R$ 且与K相遇的任意一直线$G_1(P_1,\theta)$. 集p_1的上确界为p, 即

$$p=sup\left\{p_1:G_1(p_1,\theta)\cap K\neq\emptyset\right\}, \tag{2.4}$$

其中G_1与K的交为非空表示G_1与K相交的意思. 与(2.4)式中p相应的直线$G(p,\theta)$显然为K的支撑线, 称为K沿θ 方向的支撑线. 函数$p(\theta)$称为凸集K的支撑函数. 又引进函数

$$w(\theta)=p(\theta)+p(\theta+\pi), \tag{2.5}$$

显然, $w(\theta)$是对于方向θ,和$\theta+\pi$的两平行支撑函数间的距离, 称为凸集K沿θ方向的宽度, 函数$w(\theta)$称为凸集K的宽度函数

引理2.1 [6] 设平面上闭凸曲线X的长度为L, 围成的面积为A, 曲率为k, 曲率中心轨迹围成的有向面积为$\tilde{A}$, 支撑函数为p, θ为单位切向量与x轴的正向夹角, 那么X, L, A, k, $\tilde{A}$可由支撑函数唯一的表示为下列形式

闭凸曲线X表示为:

$$\begin{cases}x(\theta)=p(\theta)\sin(\theta)+p_\theta(\theta)\cos(\theta),\\ y(\theta)=-p(\theta)\cos\theta+p_\theta\sin(\theta).\end{cases} \tag{2.6}$$

曲线长度L表示为:

$$L=\int_0^{2\pi}p(\theta)d\theta. \tag{2.7}$$

曲线围成面积A表示为:

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p^2(\theta)-p_\theta^2(\theta))d\theta. \tag{2.8}$$

曲线的曲率k表示为:

$$k=\frac{1}{p(\theta)+p_{\theta\theta}(\theta)}. \tag{2.9}$$

曲率中心轨迹围成的有向面积$\tilde{A}$表示为:

$$\tilde{A} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(p_\theta^2 - p_{\theta\theta}^2)d\theta. \tag{2.10}$$

引理2.2 [7] 平面闭凸曲线有(2.11)形式的支撑函数, 那么闭凸曲线为次数不超过6的多项式曲线, 且闭凸曲线都有两条彼此互相垂直的对称线.

$$p(\theta) = \frac{L}{2} + a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + a_2\cos 2\theta + b_2\sin 2\theta. \tag{2.11}$$

其中a_1, a_2, b_1, b_2为常数, L为曲线长度.

引理2.3 [7]平面直角坐标系经过适当的变换和旋转之后, 闭凸曲线(2.11)式的支撑函数变为(2.12)式, 多项式曲线方程形式满足（2.13）式.

$$p = \frac{L}{2\pi} + a\cos(2\theta), \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}0 &= 4\pi^4a^6y^6 + (12\pi^4a^6x^2 - \pi^2L^2a^6 + 60\pi^4a^8 - 36\pi^3La^7)y^4\\ &\quad + (12\pi^4a^6x^4 - 312\pi^4a^8x^2 - 2\pi^2L^2a^6x^2 + 8\pi L^3a^7\\ &\quad + 80\pi^2L^2a^8 - 288\pi^3La^9 + 192\pi^4a^{10})y^2\\ &\quad + 4\pi^4a^6x^6 + 60\pi^4a^8x^4 + 36\pi^3La^7x^4 - \pi^2L^2a^6x^4\\ &\quad + 288\pi^3La^9x^2 - 16L^4a^8 + 128\pi^2L^2a^{10} - 256\pi^4a^{12},\end{aligned} \tag{2.13}$$

其中$a = \sqrt{a_2^2 + a_2^2}$, L为曲线长度.

引理2.4 闭凸曲线$X(u, 0)$在流(1.2)下演化, 它的支撑函数为p, 则支撑函数满足以下恒等式成立

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} pd\theta. \tag{2.14}$$

$$p = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta). \tag{2.15}$$

$$p_\theta = \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n\sin n\theta + b_n\cos n\theta). \tag{2.16}$$

$$p_{\theta\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(-a_n\cos n\theta - b_n\sin n\theta). \tag{2.17}$$

$$\int_0^{2\pi} p^2 d\theta = \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2). \tag{2.18}$$

$$\int_0^{2\pi} p_\theta^2 d\theta = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2). \tag{2.19}$$

$$\int_0^{2\pi} p_{\theta\theta}^2 d\theta = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^4(a_n^2 + b_n^2). \tag{2.20}$$

证明引理2.4 因为p, p_θ, $p_{\theta\theta}$都是周期为2π的周期函数, 对其进行傅里叶级数展开得到(2.14-2.17), 在流(1.2)下演化曲线的支撑函数连续其收敛, 所以由帕塞瓦尔恒等式得(2.18-2.20).

引理2.5 [1] 闭凸曲线$X(u,t)$按照方程(1.2)演化, 则有

$$\theta_t = 0, L_t = 0. \tag{2.21}$$

$$p_t = 1 - \frac{2\pi}{L}p. \tag{2.22}$$

$$A_t = \frac{L^2 - 4\pi A}{L}. \tag{2.23}$$

$$k_t = \frac{2\pi}{L}k - k^2. \tag{2.24}$$

3. 主要定理的证明

定理1.1的证明 由定义2.3的(2.5)与引理(2.5)的(2.22)得

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\theta,t)}{\partial t} &= \frac{\partial p(\theta,t)}{\partial t} + \frac{\partial p(\theta+\pi,t)}{\partial t} \\ &= 1 - \frac{2\pi}{L(0)}p(\theta,t) + 1 - \frac{2\pi}{L(0)}p(\theta+\pi,t) \\ &= 2 - \frac{2\pi}{L(0)}[p(\theta,t) + p(\theta+\pi,t)] \\ &= 2 - \frac{2\pi}{L(0)}w(\theta,t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

由(3.1)与初始条件得

$$\begin{cases} \frac{\partial w(\theta,t)}{\partial t} = -\frac{2\pi}{L(0)}w(\theta,t) + 2, \\ w(\theta,0) = \frac{L(0)}{\pi}, \end{cases} \tag{3.2}$$

下面解方程(3.2), 首先令

$$w(\theta,t) = C(t)e^{-\frac{2\pi}{L(0)}t}. \tag{3.3}$$

对(3.3)两端关于t求导得

$$\frac{\partial w(\theta,t)}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}e^{-\frac{2\pi}{L(0)}t} - \frac{2\pi}{L(0)}C(t)e^{-\frac{2\pi}{L(0)}t} \tag{3.4}$$

将(3.3)代入(3.2)再联立(3.4)得

$$\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}=2e^{\frac{2\pi}{L(0)}t},\tag{3.5}$$

对(3.5)积分得

$$C(t)=w(\theta,0)+\frac{L(0)}{\pi}(e^{\frac{2\pi}{L(0)}t}-1).\tag{3.6}$$

将(3.6)代入(3.3)得

$$w(\theta,t)=[w(\theta,0)+\frac{L(0)}{\pi}(e^{\frac{2\pi}{L(0)}t}-1)]e^{-\frac{2\pi}{L(0)}t}.\tag{3.7}$$

因为$w(\theta,0)=\frac{L(0)}{\pi}$, 所以$w(\theta,t)=\frac{L(0)}{\pi}$, 即定理(1.1)成立.

命题3.1 设$X(u,0)$是初始闭凸曲线, $X(u,t)$是曲线流(1.2)的解, 定义函数$\varphi(t)$如下:

$$\varphi(t)=\oint_X\frac{1}{k}ds-\mu[L^2(t)-4\pi A(t)]-2A(t)-\left|\tilde{A}\right|,\tag{3.8}$$

若$-\infty<\mu\le\frac{1}{\pi}$, 则有$\varphi(t)$单调递减其收敛到0.

证明命题3.1: 由$d\theta=kds$以及引理2.5, 直接对(3.8)两边关于t求导得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}=-2\int_0^{2\pi}\frac{\lambda(t)k-k^2}{k^3}d\theta+(4\pi\mu-2)A_t+\tilde{A}_t.\tag{3.9}$$

又由引理2.1中(2.10)与引理2.4中(2.22)得

$$\begin{aligned}\tilde{A}_t&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2p_\theta p_{t\theta}-2p_{\theta\theta}p_{t\theta\theta})d\theta\\&=-\frac{4\pi}{L(t)}\int_0^{2\pi}p_\theta^2-p_{\theta\theta}^2d\theta\\&=-\frac{4\pi}{L(t)}\tilde{A}(t).\end{aligned}\tag{3.10}$$

将(3.10)代入(3.9), 再结合引理2.1得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{2\pi}{L(0)}\int_0^{2\pi}p_{\theta\theta}^2d\theta+\frac{2\pi}{L(0)}(4\pi\mu+1)\int_0^{2\pi}p_\theta^2d\theta-\frac{2\pi}{L(0)}4\pi\mu\int_0^{2\pi}p^2d\theta+4\pi\mu L(0),$$

再由引理2.4整理得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{2\pi^2}{L(0)}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+a_n^2)(n^2-1)(n^2-4\pi\mu).$$

由$-\infty<\mu\le\frac{1}{\pi}$, 由引理2.4知, 上式级数收敛, 得$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\le 0$, 所以$\varphi(t)$单调递减. 又因为$X(u,t)$在流(1.2)下收敛到有限圆, 所以有

$$\lim_{t\to\infty}[\oint_X\frac{1}{k}ds-\mu[L^2(t)-4\pi A(t)]-2A(t)-\left|\tilde{A}\right|]=0.$$

综上, 命题3.1成立.

定理1.2的证明 由命题3.1得$\varphi(0)\geq 0$, 即

$$\oint_X \frac{1}{k}ds \geq \mu(L^2-4\pi A)+2A+\left|\tilde{A}\right|, \tag{3.11}$$

若$-\infty<\mu<\frac{1}{\pi}$, 则有

$$\begin{aligned}\oint_X \frac{1}{k}ds-\mu(L^2-4\pi A)-2A-\left|\tilde{A}\right| &= \int_0^{2\pi} p^2+p_{\theta\theta}^2-2p_\theta^2 d\theta+(2\pi\mu-1)\int_0^{2\pi} p^2-p_\theta^2 d\theta \\ &-\mu(\int_0^{2\pi} pd\theta)^2+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p_\theta^2-p_{\theta\theta}^2 d\theta \\ &=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p_{\theta\theta}^2 d\theta-(2\pi\mu+\frac{1}{2})\int_0^{2\pi} p_\theta^2 d\theta \\ &+2\pi\mu\int_0^{2\pi} p^2 d\theta-\mu(\int_0^{2\pi} pd\theta)^2 \\ &=\frac{1}{2}\pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)(n^2-1)(n^2-4\pi\mu) \\ &=0.\end{aligned}$$

由上式可知, 若$(n\geq 2)$, 等号成立, 有$a_n=b_n=0$, 即支撑函数为:$p=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\theta+b_1\sin\theta$, 从而$X$是圆, 即(1)成立.

若$\mu=\frac{1}{\pi}$, 则有

$$\oint_X \frac{1}{k}ds-\frac{L^2-2\pi A}{\pi}-\left|\tilde{A}\right|=\frac{1}{2}\pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)(n^2-1)(n^2-4)=0.$$

由上式知, 若$n\geq 3$等号成立, 则有$a_n=b_n=0$, 所以支撑函数为

$$p(\theta)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\theta+b_1\sin\theta+a_2\cos 2\theta+b_2\sin 2\theta.$$

再由引理2.2与2.3知, 若$a=\sqrt{a_2^2+b_2^2}=0$, 则有支撑函数为:$p=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\theta+b_1\sin\theta$, 等号成立当且仅当$X$是圆. 若$a=\sqrt{a_2^2+b_2^2}\neq 0$, 由引理2.2与2.3知, 等号成立当其仅当$X$为次数为6的多项式曲线, 且闭凸曲线都有两条彼此互相垂直的对称线, 方程如下

$$\begin{aligned}0=&y^6+(3x^2-\frac{L^2}{4\pi^2}+15a^2-9\frac{aL}{\pi})y^4 \\ &+(3x^4-78a^2x^2-\frac{L^2}{2\pi^2}x^2+2\frac{aL^3}{\pi^3}+20\frac{a^2L^2}{\pi^2}-72\frac{a^3L}{\pi}+48a^4)y^2 \\ &+x^6+15a^2x^4+9\frac{aL}{\pi}x^4-\frac{L^2}{4\pi^2}x^4 \\ &+72\frac{a^3L}{\pi}x^2-4a^2L^4+32\frac{L^2}{\pi^2}a^4-64a^6.\end{aligned}$$

综上, 定理1.2成立.

本文优点 (1)在定理1.2中, 若$\mu=\frac{1}{\pi}$, 该不等式在文 [8]中被高翔等研究, 但等号成立除了闭凸曲线X是圆以外, 次数为6的多项式曲线且闭凸曲线都有两条彼此互相垂直的对称线也能使等号成立. (2)通过平面上闭凸曲线保长度流证明几何不等式, 构造含参函数, 通过曲线收缩流的单调公式可以充分地对参数取值进行分类讨论, 特别地，命题3.1中函数的单调性保证了初始时刻不等式(3.11)成立, 体现了定理1.2中闭凸曲线的任意性.

参考文献

[1] 潘生亮. 几何不等式与曲率流[D]: [博士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2001.

[2] Yang, Y.L. (2020) An Inequality for the Minimum Affine Curvature of a Plane Curve. *Comptes Rendus Mathematique*, **358**, 139-142. https://doi.org/10.5802/crmath.19

[3] Yang, Y. and Wu, W. (2021) The Reverse Isoperimetric Inequality for Convex Plane Curves through a Length-Preserving Flow. *Archiv der Mathematik*, **116**, 107-113. https://doi.org/10.1007/s00013-020-01541-5

[4] 夏康杰, 郭洪欣. 曲线流在平面曲线的几个不等式中的应用[J/OL]. 数学学报(中文版), 2022. https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2038.O1.20220318.1020.014.html, 2022-03-21.

[5] 梅向明, 黄敬之. 微分几何[M]. 北京: 北京高等教育出版社, 2008.

[6] 任德麟. 积分几何学引论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[7] Gao, L., Zhang, Z. and Zhou, F. (2020) An Extension of Rabinowitz's Polynomial Representation for Convex Curves. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, **61**, 455-464. https://doi.org/10.1007/s13366-020-00494-8

[8] Li, C.J. and Gao, X. (2015) The Isoperimetric Inequality and Its Stability. *Journal of Mathematics*, **3**, 897-912. https://doi.org/10.7153/jmi-09-74