

四阶问题的Morley有限元及其Bell有限元方法

岳 运

贵州大学数学与统计学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2023年9月18日; 录用日期: 2023年10月19日; 发布日期: 2023年10月31日

摘 要

四阶问题又叫做重调和方程, 起源于物理中连续介质力学领域的弹性薄板理论。对重调和方程的加速求解对许多实际问题, 如工程建筑设计, 流体力学等具有很重要的意义。本文主要讨论求解重调和问题的有限元方法, 首先推导出其弱形式, 利用morley有限元空间, bell有限元空间逼近原方程的解空间, 然后给出对应的 L^∞ 误差并且对比了两种方法的收敛阶。

关键词

重调和, 有限元, Morley元, Bell元

The Morley Element and Bell Element for Fourth Order Elliptic Equations

Yun Yue

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Sep. 18th, 2022; accepted: Oct. 19th, 2023; published: Oct. 31st, 2023

Abstract

The fourth-order problem, also known as the reharmonic equation, originates from the

elastic sheet theory in the field of continuum mechanics in physics. The accelerated solution of reharmonic equations is of great significance for many practical problems, such as engineering and architectural design and fluid mechanics. This paper focuses on the finite element method for solving the reharmonic problem, first derive its weak form, using the morley finite-element space and the bell finite-element space approaching the solution space of the original equation, Then the corresponding L^∞ error is given and the convergence order of the two methods is compared.

Keywords

Biharmonic, Finite Element, Morley Fem, Bell Fem

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

重调和方程是数学中研究的一类方程，其涉及未知函数及其偏导数之间的关系，广泛应用于物理学、工程学、经济学和生物学等领域，对于描述自然现象和解决实际问题起着关键作用。尤其在流体力学中有广泛的应用，可以用于模拟和分析各种流体现象和问题。如界面运动和表面张力：界面问题涉及两种或多种不同流体之间的交界面。通过应用界面重调和方程，可以研究液滴、气泡、液体薄膜等的形态演化和动力学行为。此外，重调和方程还可以描述表面张力现象，如液滴的稳定性和薄膜的变形。多相流动涉及不同相(如固体、液体、气体)在流体中的相互作用。通过求解两流体间的相互作用重调和方程，可以研究和优化油气开采、雾化过程、化工反应器等多相流动现象。总之，重调和方程在流体力学中的应用范围广泛，涵盖了界面运动和表面张力、多相流动等领域。这些应用为我们深入理解和解决实际流体问题提供了重要的数学工具和方法。

重调和方程是是一个非线性的方程，用于描述物体的动态，可以用于描述多种不同类型的振动，其中包括水波、电磁场和谐振子等等。重调和方程的定义可以用来描述某些类型的动态系统，这些系统可以用参量表示，如特殊参量动力学(SPMD)参量、特殊参量结构(SPS)参量等。它可以写成：

$$\nabla^4 \varphi = 0$$

或者写成：

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$$

或者写成:

$$\Delta^2 \varphi = 0$$

其中 ∇ 是梯度算子, Δ 是Laplace算子.

四阶椭圆问题在现实生活中有许多重要应用, 其经典问题是描述了板弯曲问题, 如下:

$$\Delta^2 u = f \quad \text{in } \Omega \quad (1.1)$$

边界条件:

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (1.2)$$

这里 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是有界矩形区域, 边界为: $\partial\Omega$, \mathbf{n} 是边界 $\partial\Omega$ 的外法向量.下面给出弱解的定义:

我们假设 $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(U)$, $f \in L^2(U)$, 如果方程 $Lu = f$ 有解 u , 那么显然 $u \in C^2(U)$.我们扩张一下, 在 $H_0^1(U)$ 内考虑, 它是一个Hilbert空间.算子 L 是一个有界算子, 根据Hilbert空间的理论, 它对应一个双线性型.定义散度型算子 L 的双线性型为:

$$B[u, v] = \int_U \left(\sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v + cuv \right) dx, u, v \in H_0^1 \quad (1.3)$$

称 $u \in H_0^1$ 为前述边值问题的弱解, 如果

$$B[u, v] = (f, v), \forall v \in H_0^1 \quad (1.4)$$

其内积是 $L^2(U)$ 上的.

方程(1.1)-(1.2)的弱解定义如下: $H_0^2(\Omega) = \{ \varphi \in H^2(\Omega) : \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \}$, $\varphi \in H_0^2(\Omega)$ 满足

$$a(u, \varphi) = F(\varphi) \quad (1.5)$$

这里

$$a(u, \varphi) = \langle \Delta u, \Delta \varphi \rangle \quad (1.6)$$

$$F(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle \quad (1.7)$$

2. 弱解的存在性和唯一性

在本节, 我们考虑双线性型 $a(u, v) = (\Delta u, \Delta v)$,下面说明方程(1.5)的弱解存在且唯一. 我们考虑方程(1.1)的弱解(1.5)的存在唯一性.由(Lax - Milgram)定理给出.

引理(Lax - Milgram) 设 $B : H \times H \rightarrow R$ 是双线性型, 且存在正数 α, β 使得

$$(1) |B[u, v]| \leq \alpha \|u\| \|v\|$$

$$(2) B[u, v] \geq \beta \|u\|^2$$

且 $u, v \in H$, 设 $f \in H^*$ 是有界线性泛函, 则存在唯一的 $u \in H$ 使得 $B[u, v] = (f, v), \forall v \in H$

定理 (*Existence and Uniqueness*) 设 $V = H_0^2(\Omega)$, 内积是 $\langle v, w \rangle = \iint_{\Omega} \Delta v \cdot \Delta w dx dy, \forall v, w \in V$. 由内积诱导的范数为 $\|v\|_{2, \Omega} = \left(\iint_{\Omega} |\Delta v|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$. 则 (1.5) 有唯一解.

Proof. 因为 $V = H_0^2(\Omega)$, 则 V 是 *Hilbert* 空间. 显然 a 是双线性型的, 且

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \iint_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v dx dy \\ &\leq \left(\iint_{\Omega} |\Delta u|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_{\Omega} |\Delta v|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|v\|_{2, \Omega} \|u\|_{2, \Omega} \end{aligned}$$

另外, $\forall v \in V, a(v, v) = \|\Delta v\|_{2, \Omega}^2$, 由于 $v|_{\partial\Omega} = 0$ and *Poincaré* 不等式, 令 $\Delta v = \nabla w$, 我们得到

$$a(v, v) = \|\nabla w\|_{2, \Omega}^2 \geq C \|w\|_{2, \Omega}^2$$

最后, 因为 $f \in L^2(\Omega)$, 我们可以得到

$$\begin{aligned} F(v) = \langle f, v \rangle &= \iint_{\Omega} f(x, y) v(x, y) dx dy \leq \left(\iint_{\Omega} |\Delta f|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_{\Omega} |\Delta v|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C \|v\|_{2, \Omega} \end{aligned}$$

而且因为 f 是一个在 V 上的连续函数. 由 *Lax - Milgram* 定理, 知道 (1.5) 存在唯一解.

3. 有限元空间

在本节中, 令 τ_h 是区域 $\bar{\Omega}$ 上的三角形单元, 且 $h = \max_{K \in \tau_h} h_K$, 这里 $h_K = \text{diam}(K)$. 我们以 $\tau_h, \varepsilon_h, \mathcal{N}_h$ 分别表示三角形单元、三角形边、三角形顶点.

现在我们考虑方程 (1.5) 的有限元空间, 假设该区域是多边形的, 并将其划分为三角形单元, 满足通常的正则性条件和逆不等式. 假设单元 K 直径为 $h_K \leq h$.

令 V_h 为方程 (1.5) 的有限元空间, 则在空间 V_h 寻找基函数 φ_h , 且有:

$$a_h(u_h, \varphi_h) = (f, \varphi_h), \forall \varphi_h \in V_h \quad (3.1)$$

3.1. Morley 有限元

Morley 有限元有 6 个自由度, 在每个单元上的基函数由三个节点的函数值 $u_i, i = 1, 2, 3$ 和三条边的中点的法向导数 $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i, i = 1, 2, 3$ 决定. 在区域边界处, 函数的节点值和法向导数都是 0. 更多 Morley 有限元空间相关知识, 看 [1-3], 其有限元空间定义如下, 如图 1:

$$S_m = \{ \varphi_h \in \mathbb{P}_2(\tau_h) : \varphi_h \text{ 是连续的对任意的 } p \in \mathcal{N}_h, \\ \varphi_h \text{ 为 } 0 \text{ 对任意的 } p \in \mathcal{N}_h \cap \partial\Omega, \\ \text{且 } \int_e \frac{\partial \varphi_h}{\partial n} = 0, \forall e \in \varepsilon_h \}$$

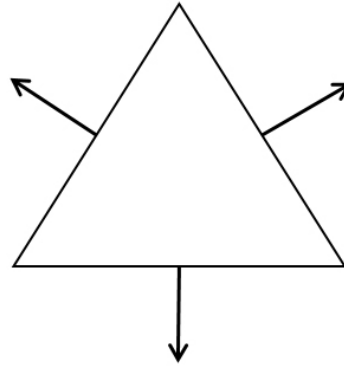


Figure 1. Morley finite element

图 1. Morley有限元

3.2. Bell有限元

Bell有限元有18个自由度,且它的基函数由顶点函数值 $u_i, i = 1, 2, 3$,一阶偏导值 $(\frac{\partial u}{\partial x})_i, (\frac{\partial u}{\partial y})_i, i = 1, 2, 3$,二阶偏导值 $(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x})_i, (\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y})_i, (\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})_i, i = 1, 2, 3$ 决定.而且在边界上的法向导数值在边界上限制为3次多项式,且Bell元的基函数是5次多项式,如图 2.更多Bell有限元空间看 [4],定义如下:

$$S_b = \{ \varphi_h \in \mathbb{P}_5(\tau_h) : \varphi_h \text{ 是连续的对任意的 } p \in \mathcal{N}_h, \\ \varphi_h \text{ 为 } 0 \text{ 对任意的 } p \in \mathcal{N}_h \cap \partial\Omega, \\ \text{且 } \int_e \frac{\partial \varphi_h}{\partial n} = 0, \forall e \in \varepsilon_h \}$$

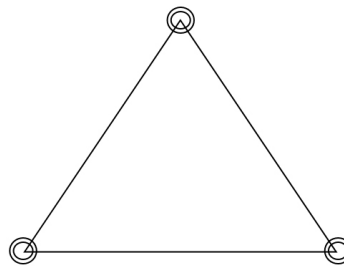


Figure 2. Bell finite element

图 2. Bell有限元

4. 数值结果

在本节,我们使用morley有限元和bell有限元计算了三个数值算例并比较了它们的误差收敛阶.下面给出数值算例,且考虑的区域都是 $[0,1] \times [0,1]$ 的矩形区域.第一个例子的真解为:

$$u(x, y) = 256x^2(1-x)^2y^2(1-y)^2 \quad (4.1)$$

随着单元的划分越来越细，可以求出每次划分的误差最大值，这即是所谓的 L^∞ 误差，下面给出前四次划分 L^∞ 误差,见表 1.再利用ChenLong软件包里面的函数showrate求出误差收敛阶.主要结果为：morley元(如图 3)和bell元(如图 4)数值解的图像及其 L^∞ 误差图像如下。

Table 1. L^∞ error

表 1. L^∞ 误差

| 划分次数 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------|-------------------|-------------------|-----------------------|-----------------------|
| morley | 0.010417 | 0.002930 | 0.000758 | 0.000191 |
| bell | 0.038917004592808 | 0.001017775678474 | 3.897287700121987e-05 | 1.395051674533531e-06 |

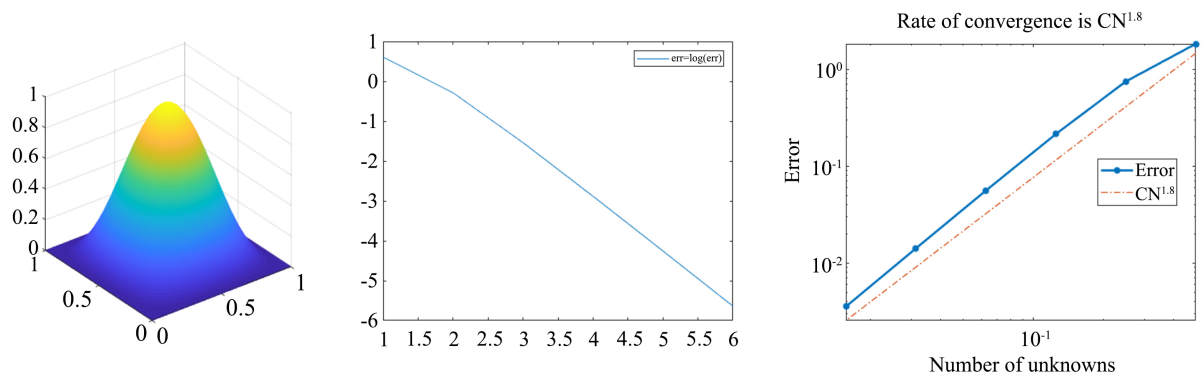


Figure 3. Morley numerical solutions and error logarithmic graph and error convergence order

图 3. Morley有限元的数值解以及误差对数图以及误差收敛阶

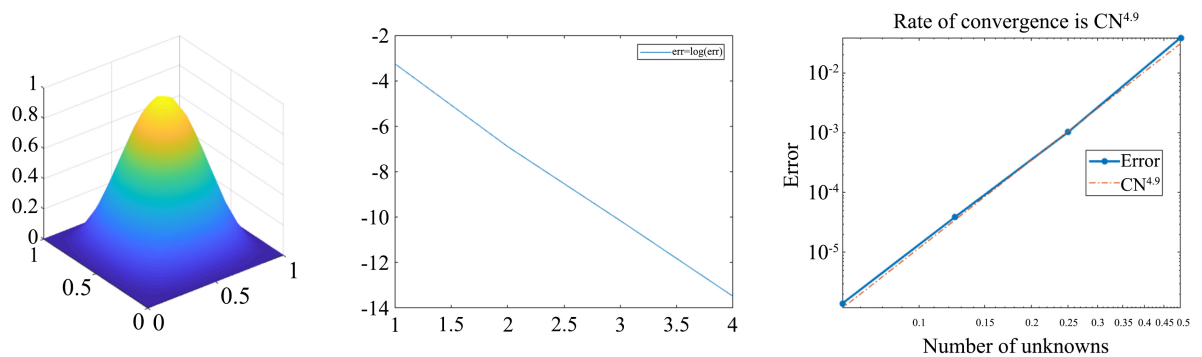


Figure 4. Bell numerical solutions and error logarithmic graph and error convergence order

图 4. Bell有限元的数值解以及误差对数图以及误差收敛阶

Morley元和Bell元的误差收敛阶分别为1.9462636,4.9010191.

第二个数值算例的真解为：

$$u(x, y) = \sin(3\pi x^2) \sin(3\pi y^2) (x - 1)^2 (y - 1) y \tag{4.2}$$

同理, L^∞ 误差分别为, 见表 2. morley元(如图 5)和bell元(如图 6)数值解的图像及其 L^∞ 误差图像如下.

Table 2. L^∞ error

表 2. L^∞ 误差

| 划分次数 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------|-------------------|-------------------|-----------------------|-----------------------|
| morley | 1.995570470491183 | 0.418989959309076 | 0.069287926574291 | 0.026190032843825 |
| bell | 0.011971727283247 | 0.002791471179761 | 2.020078198839911e-04 | 8.458974880281786e-06 |

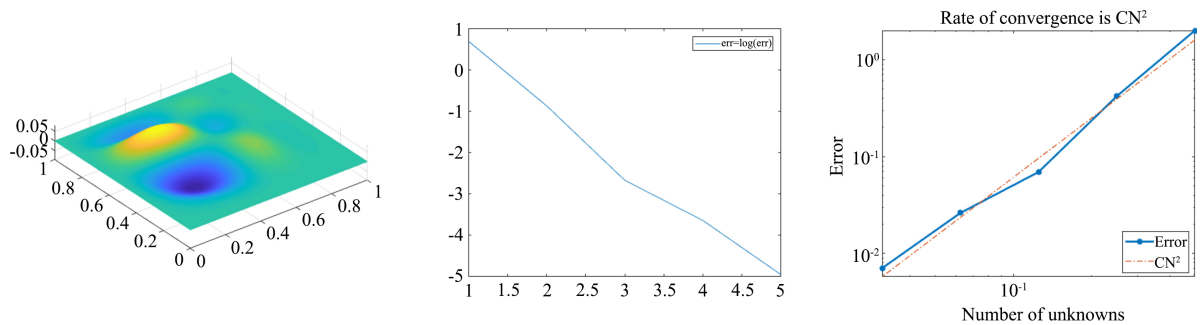


Figure 5. Morley numerical solutions and error logarithmic graph and error convergence order

图 5. Morley有限元的数值解以及误差对数图以及误差收敛阶

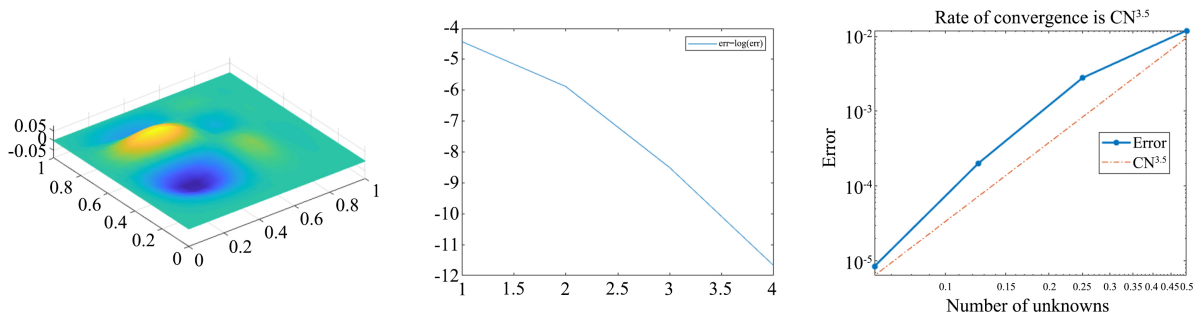


Figure 6. Bell numerical solutions and error logarithmic graph and error convergence order

图 6. Bell有限元的数值解以及误差对数图以及误差收敛阶

它们的误差收敛率分别为: 2.0282621,3.5189126 .

第三个数值算例的真解为:

$$u(x, y) = x^2(1 - x)^2y^2(1 - y)^2e^{x^2}e^{y^2} \tag{4.3}$$

同理, L^∞ 误差分别为, 见表 3.morley元(如图 7)和bell元(如图 8)数值解的图像及其 L^∞ 误差图像如下.

Table 3. L^∞ error

表 3. L^∞ 误差

| 划分次数 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| morley | 0.018397469113792 | 0.006846097300470 | 0.002129520977141 | 5.703030884719887e-04 |
| bell | 3.798423909805058e-04 | 2.788286297165064e-05 | 1.408800314133484e-06 | 6.253175516018233e-08 |

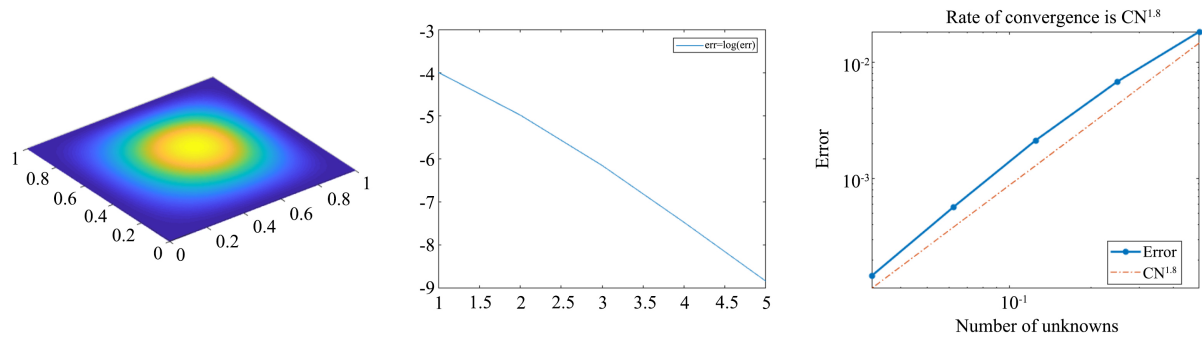


Figure 7. Morley numerical solutions and error logarithmic graph and error convergence order

图 7. Morley有限元的数值解以及误差对数图以及误差收敛阶

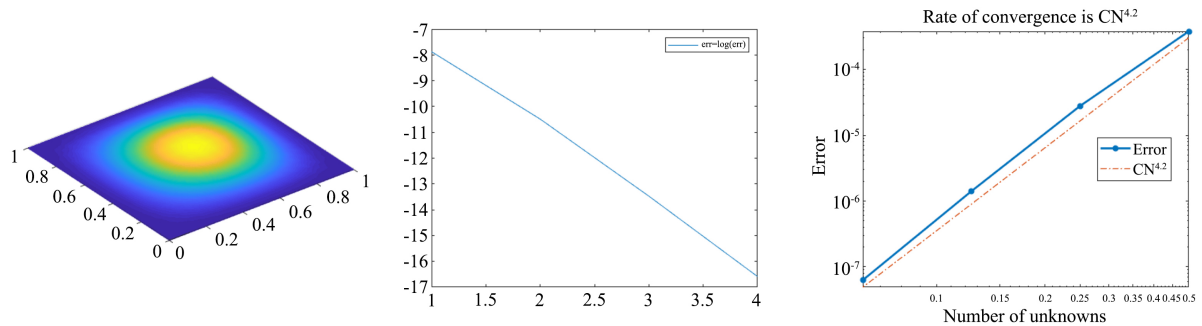


Figure 8. Bell numerical solutions and error logarithmic graph and error convergence order

图 8. Bell有限元的数值解以及误差对数图以及误差收敛阶

它们的误差收敛率为: 1.7547371,4.2012410 .

从上面的几个例子可以看出, morley元的误差相比bell元还是很大的, 且bell元的收敛速度比morley元快.

5. 总结

本篇文章给出了两种不同的有限元空间去逼近四阶问题的解空间, 其中morley元是非协调元, bell元是协调元.在相同的网格划分下, 可以看出morley元的收敛速度是远远低于bell元的收敛速度的, 这与理论是相符合的.在下一步的工作中, 我将会使用精度更高的Argyris元去计算重调和方程的数值解.重调和方程的有限元解法与深度学习和人工智能相结合也是一个值得让人探究的问题,

可以用于改进深度神经网络的训练和优化过程，提高模型的稳定性和收敛速度。总之，重调和方程的应用背景十分丰富，其相关的数值解法也是能够使人从中获得启发的。这些应用将为各个领域提供更好的问题建模和解决方法，促进相关技术和领域的发展。

参考文献

- [1] Kim, D., Pani, A.K. and Park, E.-J. (2021) Morley Finite Element Methods for the Stationary Quasi-Geostrophic Equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **375**, Article 113639. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113639>
- [2] Saber, R. and Murray, R. (2003) Consensus Protocols for Networks of Dynamic Agents. *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, Denver, CO, 4-6 June 2003, 951-956. <https://doi.org/10.1109/ACC.2003.1239709>
- [3] 石钟慈. 关于Morley元的误差估计[J]. 计算数学, 1990, 12(2): 113-118.
- [4] Ming, W. and Xu, J. (2006) The Morley Element for Fourth Order Elliptic Equations in Any Dimensions. *Numerische Mathematik*, **103**, 155-169. <https://doi.org/10.1007/s00211-005-0662-x>