Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(2), 212-218
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.132025

Hans汉斯

指数函数曲线上的矩阵值Riemann边值问题

刘艳楠，刘　华

天津职业技术师范大学理学院，天津

收稿日期：2023年1月6日；录用日期：2023年2月8日；发布日期：2023年2月16日

摘　要

本文讨论的是指数函数曲线上的矩阵值Riemann边值问题，我们主要是对一类特殊的下三角矩阵值Riemann边值问题进行求解。首先使用双线性形式给出指数函数曲线上的伪正交多项式；其次给出特殊的下三角矩阵值边值问题并转化为边值问题；最后使用Liouville定理和伪正交多项式给出矩阵值Riemann边值问题的求解。

关键词

指数函数曲线，Cauchy型积分，矩阵值Riemann边值问题

Matrix Value Riemann Boundary Value Problems on the Exponential Function Curve

Yannan Liu, Hua Liu

School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: Jan. 6th, 2023; accepted: Feb. 8th, 2023; published: Feb. 16th, 2023

Abstract

In this paper, we mainly discussed matrix value Riemann boundary value problems on the exponential function curve and solved a special class of lower triangular matrix value Riemann boundary value problems. Firstly, the pseudo-orthogonal polynomial on the curve of exponential func-

文章引用: 刘艳楠, 刘华. 指数函数曲线上的矩阵值 Riemann 边值问题[J]. 理论数学, 2023, 13(2): 212-218.
DOI: 10.12677/pm.2023.132025

tion is given by using bilinear form. Secondly, a special boundary value problem of lower triangular matrix values is presented and transformed into a boundary value problem. Finally, the solution of Riemann boundary value problem with matrix values is given by Liouville theorem and pseudo-orthogonal polynomials.

Keywords

The Exponential Function Curve, Cauchy-Type Integral, Matrix Value Riemann Boundary Value Problem

1. 引言

正交多项式理论是分析数学的一个重要分支，它联系着数学和物理的许多重要方向，前有王莹，段萍，杜金元研究正实轴上的矩阵值 Riemann 边值问题，还有余密密基于 Riemann-Hilbert 方法的第二类正交三角多项式渐近分析，而 Riemann 边值问题是一种复变函数的重要特性，所以基于 Riemann-Hilbert 方法对指数函数曲线上的矩阵值 Riemann 边值问题的研究尤为重要。

Riemann-Hilbert 方法是近年 20 来形成的研究正交多项式的一种全新方法。1992 年，FoKas A.S.，Its A.R.和 Kitaev A.V.在[1]中构造了一个矩阵值 Riemann-Hilbert 边值问题，其唯一解是实轴上的正交多项式。1993 年，Deift P.和 Zhou X.在[2]中引入关于振荡型 Riemann-Hilbert 边值问题。并应用到正交多项式的研究中，因此，形成了 Riemann-Hilbert 方法[2]。

本文首先叙述了沿指数函数曲线剖开的复平面上的全纯函数在无穷远处主部的定义，这是一个新概念，因为其在无穷远点不再是孤立奇点，这在[3]中有详细的介绍。在此基础上提出了带有无穷远处增长性条件的指数函数曲线上的矩阵值边值 Riemann 问题，并对其进行求解。

本文的结构安排：

第一部分：使用双线性形式给出指数函数曲线上的伪正交多项式。

第二部分：基于第一部分给出特殊的下三角矩阵值边值问题并转化为边值问题，并使用 Liouville 定理和伪正交多项式给出矩阵值 Riemann 边值问题的解。

2. 基础知识

为方便读者，我们在此简述相关基础知识。在这篇文章中，对任意的 $a\in\mathbb{R}$，我们记 $l_a=a+ie^a$，在指数函数曲线上我们任取 L_{ab} 表示从 l_a 到 l_b 上的一段弧(其中 $\widehat{l_a l_b}$ 是一段有限弧)。

在复平面的一般曲线上内积处理起来不太方便，有时候我们需要用双线性形式来代替内积，如[4]中，就用这种方式给出奇异积分方程的可积条件[4]。Deift P.等在[5]中用双线性形式定义了类似正交多项式的多项式组。我们在指数函数曲线 L 上研究类似的多项式组[5]。

设 ω 为 L 上的权函数，我们在次数不超过 n 的多项式空间 $\prod_n$ 上引进双线性形式如下：

$$(f,g)=\int_L \omega fg\mathrm{d}t,\quad f,g\in\prod_n \tag{2.1}$$

取 $\prod_n$ 的一组基 $1,t,t^2,\cdots,t^n$，我们对这组基作类似于 Schmidt 正交化，即

$$
\begin{aligned}
&p_0(z)=\frac{1}{\left(\int_L w\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}}\\
&p_1(z)=\frac{t-\frac{(t,p_0)}{(p_0,p_0)}p_0}{\left(t-\frac{(t,p_0)}{(p_0,p_0)}p_0,t-\frac{(t,p_0)}{(p_0,p_0)}p_0\right)^{\frac{1}{2}}}\\
&\qquad\vdots\\
&p_n(z)=\frac{t^n-\frac{(t^n,p_{n-1})}{(p_{n-1},p_{n-1})}p_{n-1}-\cdots-\frac{(t^n,p_1)}{(p_1,p_1)}p_1-\frac{(t^n,p_0)}{(p_0,p_0)}p_0}{(A_n,A_n)}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

基于多值函数 $\sqrt{z}$ 取主分支，如果 $\langle P_k,P_k\rangle$ 始终不为 0，则这个过程可以一直进行下去，最后我们得到 L 上权函数 ω 的伪正交多项式组：

$$P_0(z),P_1(z),P_2(z),\cdots,P_n(z) \tag{2.3}$$

设 $P_k(z)=\frac{1}{\alpha_k}p_k(z),k=0,1,\cdots,n$，其中 α_k 为 $p_k(z)$ 的首项系数，则 $p_k(z)$ 是次数为 k 的首 1 伪正交多项式 [4] [5]。

显然，如果伪正交多项式组为 $P_0(z),P_1(z),P_2(z),\cdots,P_n(z)$，则它们是唯一存在的[5]。

无穷远处广义主部及阶的定义，细节见[3]。

定义 2.1 设 $F\in A(\mathbb{C}\setminus L)$。如果存在一个整函数 $E(z)$，使得

$$\lim_{z\to\infty}\left[F(z)-E(z)\right]=0 \tag{2.4}$$

那么称 $E(z)$ 为 F 在 $z=\infty$ 处的广义主部，记为 $G.P[F,\infty](z)$。

引理 2.1 [3]设 F 在 $z=\infty$ 处有孤立奇点，那么

$$G.P[F,\infty]=P.P[F,\infty] \tag{2.5}$$

定义 2.2 设函数 F 为定义在以指数函数曲线 L 为跳跃曲线上的分区全纯函数，即 $F\in A(\mathbb{C}\setminus L)$，指的是 f 在 $\mathbb{C}\setminus L$ 解析且在 L 的正负边值存在。

定义 2.3 设 $f(t)$ 是定义在指数函数曲线 L 上，如果存在 $\Delta>0$，使得当 $|a'|>\Delta$，$|a''|>\Delta$ 时，(其中 $l_{a'}=t',l_{a''}=t''$，t' 和 t'' 是 L 上的任意两点)，有

$$\left|f(t')-f(t'')\right|\le A\left|\frac{1}{t'}-\frac{1}{t''}\right|^{\mu},\ 0<\mu\le 1 \tag{2.6}$$

其中上式中的 A 和 μ 是确定的常数，那么称 f 在∞附近满足 μ 阶的 $\hat{H}$ 条件，记作 $f(t)\in\hat{H}^{\mu}(\infty)$。另外，如果 $f(t)\in H^{\mu}(L)$，记作 $f\in\hat{H}^{\mu}(L)$。若不强调 μ，可分别记为 $f(t)\in\hat{H}(\infty)$ 和 $f\in\hat{H}(L)$。如果 $f(\infty)=0$，其也可被记为 $f\in\hat{H}_0^{\mu}(\infty)$ 或 $f\in\hat{H}_0(\infty)$。

定义 2.4 如果存在 $f^*\in H^{\mu}(L_{-\infty\Delta}\cup L_{\Delta\infty})$ 且 $f^*\in H(\infty)$ 使得

$$f(t)=\frac{f^*(t)}{t^{v}} \tag{2.7}$$

其中 $t=a+i\mathrm{e}^{a}$ 且 $|a|>\Delta$，记作 $f\in H_v^{\mu}(\infty)$。

另外，如果对于 $t^m f(t)\in H_v^\mu(\infty)$ （$m\in\mathbb{N}$），我们记其为 $f\in H_{m,v}^\mu(\infty)$，同理 $H_{m,0}^\mu(\infty)$ 也有类似的含义。若不强调 μ，则把它们分别记为 $f(t)\in H_{m,v}(\infty)$ 和 $f(t)\in H_{m,0}(\infty)$。

设 f 是定义在 L 上的函数，我们引入下面的 Cauchy 型积分：

设

$$C[f](z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,\ z\notin L \tag{2.8}$$

以及 Cauchy 奇异积分

$$C[f](z)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|s-\sigma|>r}\frac{f(s+ie^s)(1+ie^s)}{s-\sigma+(ie^s-ie^\sigma)}\mathrm{d}s \tag{2.9}$$

其中 $\tau=s+ie^s$，$z=\sigma+ie^\sigma$，为指数函数曲线上带核密度 f 的 Cauchy 型积分或简称为 Cauchy 型积分。

定理 2.1 如果 $f\in H_v^\mu(\infty)\cap\hat{H}^\mu(L)(v>0)$，那么它的 Cauchy 型积分有正负边值，且有下面的 Plemelj 公式成立。

$$(C[f])^{\pm}(t)=\pm\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau \tag{2.10}$$

定理 2.2 [5]如果 $f\in H_v^\mu(\infty)\cap\hat{H}^\mu(L)(v>0)$，那么有

$$P.P[C[f],\infty]=0 \tag{2.11}$$

注： 这些结果是求解指数函数曲线上的 Cauchy 型积分在无穷远处的性状，是指数函数曲线上 Riemann 边值问题的基础。在一些文章中，这些结果被认为和有限曲线的情况一样，是显而易见的结果。事实上，在无限长曲线的情况下，得到的这些结果并不明显。

3. 矩阵值 Riemann 边值问题

设

$$\Phi(z)=\begin{pmatrix}\Phi_{1,1} & \Phi_{1,2}\\ \Phi_{2,1} & \Phi_{2,2}\end{pmatrix} \tag{3.1}$$

是一个定义在复平面 $\mathbb{C}$ 的开集 Ω 上的 2×2 矩阵值函数，这里我们规定只要是 Φ 有的性质，Φ 中的所有元素 $\Omega_{j,k}$ 也都具有相应的性质，比如连续性、解析性等。因此，$\Phi\in A(\mathbb{C}\setminus L)$，$\Phi\in\hat{H}(L)$，$P.P[\Phi,\infty](z)$，$\Phi\in A(\Omega)$ 和分段全纯函数等含义是显而易见的[6]。特别地，

$$\lim_{z\to z_0}\Phi(z)=a=\begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{pmatrix} \tag{3.2}$$

其中 a 是一个复值 2×2 矩阵

$$a_{j,k}=\lim_{z\to z_0}\Phi_{j,k},\ j,k=1,2 \tag{3.3}$$

接下来，我们讨论指数函数曲线 L 上的一个特殊的下三角矩阵值 Riemann 边值问题。

问题 1 找一个以 L 为跳跃曲线的 2×2 矩阵值分区全纯函数 Y，让其满足

$$\begin{cases}Y^+(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \omega(t) & 1\end{pmatrix}Y^-(t),\ t\in L\\ G.P[\Xi Y,\infty](z)=I\end{cases} \tag{3.4}$$

其中

$$\Xi(z)=\begin{pmatrix} z^{-n} & 0 \\ 0 & z^{n} \end{pmatrix},\ n>1 \tag{3.5}$$

其中 I 是 2×2 的单位矩阵，$\omega\in\hat{H}^{\mu}(L)\cap H_{2n,0}(\infty)$，且 ω 对应的伪正交多项式组存在。

(3.4)可以转化成为下面四个分区全纯函数的 Riemann 边值问题组：

$$\begin{cases} Y_{1,1}^{+}(t)=Y_{1,1}^{-}(t),t\in L \\ G.P\left[z^{-n}Y_{1,1}(z),\infty\right](z)=1 \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} Y_{1,2}^{+}(t)=Y_{1,2}^{-}(t),t\in L \\ G.P\left[z^{-n}Y_{1,2}(z),\infty\right](z)=0 \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} Y_{2,1}^{+}(t)=Y_{2,1}^{-}(t)+\omega(t)Y_{1,1}^{-}(t),t\in L \\ G.P\left[z^{n}Y_{2,1}(z),\infty\right](z)=0 \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} Y_{2,2}^{+}(t)=Y_{2,2}^{-}(t)+\omega(t)Y_{1,2}^{-}(t),t\in L \\ G.P\left[z^{n}Y_{2,2}(z),\infty\right](z)=1 \end{cases} \tag{3.9}$$

设 Y 为(3.4)的一个解。

(3.6)是一个的 Liouville 问题。由 Painlevé 定理可以知道 $Y_{1,1}(z)$ 在整个复平面是解析的，因此 $z=\infty$ 是孤立奇点。又 $G.P\left[z^{-n}Y_{1,1}(z),\infty\right](z)=1$。故由广义的 Liouville 定理知，$Y_{1,1}(z)$ 是形如

$$Y_{1,1}(z)=P_n(z) \tag{3.10}$$

其中 p_n 是首项系数为 1 且次数为 n 的多项式。

把(3.10)代入(3.8)得

$$\begin{cases} Y_{2,1}^{+}(t)=Y_{2,1}^{-}(t)+\omega(t)P_n(t),t\in L \\ G.P\left[z^{n}Y_{2,1}(z),\infty\right](z)=0 \end{cases} \tag{3.11}$$

上式是一个以无穷远处为主部的跳跃问题。

设

$$\psi(z)=C[\omega P_n](z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)P_n(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,\quad z\in L \tag{3.12}$$

这时

$$\omega P_n\in\hat{H}^{\mu}(L)\cap H_{n,0}(\infty) \tag{3.13}$$

因此由 Plemelj 公式(2.10)和定理 2.1 可以知道 $\psi(z)$ 是以 L 为跳跃曲线的分区全纯函数，且满足

$$\begin{cases} \psi^{+}(t)=\psi^{-}(t)+\omega(t)P_n(t),t\in L \\ G.P\left[\psi(t),\infty\right](z)=0 \end{cases} \tag{3.14}$$

显然 $Y_{2,1}$ 也是(3.14)的解。但由[3]，这个方程如果有解，也只能有唯一解，故 $Y_{2,1}=\psi$。因此由 $Y_{2,1}$ 在无穷远处的性状，我们有

$$G.P\left[z^{n}\psi,\infty\right](z)=0 \tag{3.15}$$

由(3.12)我们有

$$z^n\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)P_n(\tau)(z^n-\tau^n)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)P_n(\tau)\tau^n}{\tau-z}\mathrm{d}\tau \tag{3.16}$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{z^k}{2\pi i}\int_L\omega(\tau)P_n(\tau)\tau^{n-1-k}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)P_n(\tau)\tau^n}{\tau-z}\mathrm{d}\tau \tag{3.17}$$

由 $\omega(\tau)P(\tau)\tau^n\in H_{v,0}^{\mu}$ 和[3]知

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)P(\tau)\tau^n}{\tau-z}\mathrm{d}\tau=0 \tag{3.18}$$

故得

$$G.P\left[z^n\psi,\infty\right]=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{z^k}{2\pi i}\int_L\omega(\tau)P_n(\tau)\tau^{n-1-k}\mathrm{d}\tau \tag{3.19}$$

则(3.15)等价于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\omega(\tau)P_n(\tau)\tau^k\mathrm{d}\tau=0,\ \ k=0,1,\cdots,n-1 \tag{3.20}$$

即当且仅当(3.20)成立，有

$$Y_{2,1}(z)=C[\omega P_n](z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)P_n(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau \tag{3.21}$$

(3.20)表明 P_n 是 L 上关于权函数 ω 的首项系数为 1 的伪正交多项式。

定义 5

$$f^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)f(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,\ \ z\notin L \tag{3.22}$$

我们称它为 f 关于权函数 ω 的相伴函数。

注：上式中的函数在伪正交多项式 Riemann-Hilbert 中起着非常重要的作用。

接下来，与(3.6)的分析类似，(3.7)也是一个 Liouville 问题，其解

$$Y_{1,2}(z)=q_{n-1}(z) \tag{3.23}$$

是一个次数不超过 $n-1$ 的多项式。将上式代入(3.9)中可得

$$\begin{cases}Y_{2,2}^+(t)=Y_{2,2}^-(t)+\omega(t)q_{n-1}(t),t\in L\\ G.P\left[z^nY_{2,2}(z),\infty\right](z)=1\end{cases} \tag{3.24}$$

和(3.7)一样可得

$$Y_{2,2}(z)=C[\omega q_{n-1}](z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)q_{n-1}(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,\ \ z\notin L \tag{3.25}$$

且 q_{n-1} 必须满足

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\omega(\tau)q_{n-1}(\tau)\tau^k\mathrm{d}\tau=0,\ \ k=0,1,\cdots,n-2,\\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\omega(\tau)q_{n-1}(\tau)\tau^{n-1}\mathrm{d}\tau=-1\end{cases} \tag{3.26}$$

设 $q_{n-1}=\lambda P_{n-1}$，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(\tau)\lambda P_{n-1}(\tau)P_{n-1}(\tau)=-1 \tag{3.27}$$

即

$$\lambda=\frac{-2\pi i}{\int_L \omega(\tau)P_{n-1}^2(\tau)\mathrm{d}\tau} \tag{3.28}$$

即表明 q_{n-1} 是 L 上关于权函数 ω 伪正交的 $n-1$ 次多项式。

定理 3.1 如果权函数 $\omega\in\hat{H}^{\mu}(L)\cap H_{2n,0}(\infty)$，则三角矩阵值 Riemann 边值问题(3.4)有解，其解有如下形式：

$$Y(z)=\begin{pmatrix} P_n(z) & \lambda P_{n-1}(z) \\ P_n^*(z) & \lambda P_{n-1}^*(z)\end{pmatrix} \tag{3.29}$$

这里 P_n 是 L 上关于权函数 ω 的伪正交首 1 多项式，P_n^* 是 P_n 关于(3.22)中权函数 ω 的相伴函数。

证明若(3.4)有解，由前面讨论它的解的形式为(3.29)的形式。

反过来，伪正交首一多项式系是唯一存在的，设 Y (3.29)所定义，逆推前面的每一步，则得到 Y 是(3.4)的解，也即(3.4)有且仅有一组解(3.29)。

矩阵值边值问题(3.4)为 L 上关于权函数 ω 的伪正交首 1 多项式 P_n 所刻画。因此，我们称该问题为 L 上关于权函数 ω 正交的首一多项式 Riemann-Hilbert 特征刻画，或者称 P_n 为矩阵值边值问题(3.4)的特征正交多项式[6]。

参考文献

[1] Fokas, A.S., Its, A.R. and Kitaev, A.V. (1992) The Isomonodromy Approach to Matric Models in 2D Quantum Gravity. *Communications in Mathematical Physics*, **147**, 395-430. https://doi.org/10.1007/BF02096594

[2] Deift, P. and Zhou, X. (1993) A Steepest Descent Method for Oscillatory Riemann--Hilbert Problems. Asymptotics for the MKdV Equation. *Annals of Mathematics*, **137**, 295-368. https://doi.org/10.2307/2946540

[3] 王莹, 段萍, 杜金元. 正实轴上的 Riemann 边值问题[J]. 中国科学: 数学, 2017, 47(8): 887-918.

[4] 路见可. 解析函数边值问题[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004.

[5] Deift, P., Its, A. and Krasovsky, I. (2011) Asymptotics of Toeplitz, Hankel, and Toeplitz+Hankel determinants with Fisher-Hartwig Singularities. *Annals of Mathematics*, **174**, 1234-1299. https://doi.org/10.4007/annals.2011.174.2.12

[6] 段萍. 带变化大负参数广义 Bessel 多项式的整体渐近[D]: [博士学位论文]. 武汉: 武汉大学, 2013.