Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(2), 325-331
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.132036

Hans汉斯

再保险人视角下最优自留额研究

谢靓艺，连熠瑾，刘予茜

江西财经大学金融学院，江西 南昌

收稿日期：2023年1月21日；录用日期：2023年2月20日；发布日期：2023年2月28日

摘 要

本文对再保险中停止－损失再保险进行了研究。从再保险人视角，基于保险人风险总约束的情况下，求出VaR (Value-at-Risk)风险度量下再保险人面临总风险最小值的最优自留额。最后，我们对求解的结果进行数值模拟，比较不同情况下的值。

关键词

最优再保险，拉格朗日乘数法，最优自留额

Research on the Optimal Retention from the Perspectives of Reinsurer

Liangyi Xie, Yijin Lian, Yuxi Liu

School of Finance, Jiangxi University of Finance and Economics, Nanchang Jiangxi

Received: Jan. 21st, 2023; accepted: Feb. 20th, 2023; published: Feb. 28th, 2023

Abstract

In this paper, the stop-loss reinsurance model is adopted. Based on the constrains of insurer's total individual risk, we obtain the optimal retention by minimizing the value of reinsurer's total individual risk in the risk measurement of VaR (Value-at-Risk). In the last, we simulate the result to compare with different conditions.

Keywords

Optimal Reinsurance, Lagrange Multiplier Method, Optimal Retention

文章引用: 谢靓艺, 连熠瑾, 刘予茜. 再保险人视角下最优自留额研究[J]. 理论数学, 2023, 13(2): 325-331.
DOI: 10.12677/pm.2023.132036

1. 引言

1.1.研究背景与研究意义

再保险是风险对冲的一种工具。保险公司签订再保险合同之后，部分自身的风险可以分散到再保险公司。当风险发生时，再保险公司和原保险公司可以共同承担责任。然而，保险公司签订再保险合同，需要向再保险公司缴纳一定的保费。无论是保险公司还是再保险公司，他们需要在保费以及转移风险大小之间进行权衡。研究如何设计一份再保险，使得保费和转移风险之间能够得到权衡的问题称为最优再保险问题。保险精算中有较多的研究，可参考[1] [2] [3] [4] [5]。

停止－损失再保险一般是问题最优的形式之一，因此停止－损失再保险在学术研究和实务中具有特殊的意义。关于停止－损失再保险的更多研究，可参考[6] [7] [8]。

在一份再保险合同当中，存在一定的利益冲突，即一份再保险合同对保险人而言是最优的，但是对于再保险人而言可能是不划算的，具体可参考[9]。当前研究最优再保险的文献，大多以保险人的角度分析。本文选取再保险人的角度，基于保险人个人总风险的约束下，构建 VaR 风险度量方式下停止－损失再保险模型。为了求解出相应的最优解，本文采取拉格朗日乘数法对目标函数求解，求解出的结果会根据约束条件的不同而变化，故再保险人在制定再保险合同时可以考虑投保公司的规模大小以及对风险的容忍程度。

本文基于朱建章等[10]，从再保险人的角度，基于保险人风险总约束的情况下，求出 VaR (Value-at-Risk)风险度量下再保险人面临总风险最小值的最优自留额。

本文的架构如下：第一章对再保险的意义以及基本概念进行简要介绍；第二章构建停止－损失再保险模型并采取拉格朗日乘数法求解得出结论；第三章对第二章得出的结论进行数值模拟；第四章就全文进行总结。

1.2. 基本概念

一定时间内保险人初始的总风险为非负随机变量 $X(X \ge 0)$。$F_X(x) = \Pr\{X \le x\}$ 是其累计分布函数，$S_X(x) = 1 - F_X(x) = \Pr\{X > x\}$ 是其生存函数，此外假设随机变量 $X(X \ge 0)$ 均值存在。我们假设 $X \wedge d = \min(X, d)$，$(X-d)_+ = \max(X-d, 0)$。

在停止－损失再保险模型中，保险人和再保险人的风险：

$$\begin{cases} X_I = \begin{cases} X, & x < d \\ d, & x > d \end{cases} = X \wedge d \\ X_R = \begin{cases} 0, & x \le d \\ X-d, & x > d \end{cases} = (X-d)_+ \end{cases} \tag{1}$$

其中 X_I 表示的是保险人的自留风险，X_R 表示的是再保险人的自留风险。紧接着，我们对风险度量方式 VaR 进行介绍。

定义 1 给定置信水平 $1-\alpha\ (0<\alpha<1)$，VaR (Value-at-Risk)的数学表达式为[11]：

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x : \Pr(X > x) \le \alpha\} \tag{2}$$

从 VaR 的定义可以推知，$VaR_\alpha(X)=S_X^{-1}(\alpha)$，$S_X^{-1}(\alpha)$ 是生存函数 S_X 的反函数。

定义 2 王氏保费准则

参考文献[12] [13]，王氏保费准则(也称作扭曲函数保费准则)的定义：

$$P_X=(1+\rho)\int_0^{+\infty}g(S_X(x))\mathrm{d}x \tag{3}$$

其中 $\rho\ge 0$ 是安全载荷系数，定义 $g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是增的凹函数且满足：1) $g(x)\ge x$ 2) $g(0)=0$，$g(1)=1$。

若分出函数为停止－损失再保险，则由王氏保费准则可计算出保费为

$$P(d)=(1+\rho)\int_d^{+\infty}g(S_X(x))\mathrm{d}x \tag{4}$$

从上述公式中可得知保险人的自留额越大，即保险人自己承受的风险越大，缴纳的保费越少，符合实务中再保险的意义。

基于上述基本概念，我们可以表达保险人以及再保险人面临的总风险，即

$$X_{TI}=X_I+P(d) \tag{5}$$

$$X_{TR}=X_R-P(d) \tag{6}$$

其中保险人的总风险以 X_{TI} 表示，自留风险以 X_I 表示；再保险人的总风险以 X_{TR} 表示，再保险人的自留风险为 X_R。对于度量风险的 VaR，我们定义：

$$VaR_{X_I}(d,\alpha)=\inf\{x:\Pr(X_{X_I}>x)\le\alpha\} \tag{7}$$

$$VaR_{X_R}(d,\beta)=\inf\{x:\Pr(X_{X_R}>x)\le\beta\} \tag{8}$$

2. 再保险人角度下的最优再保险

2.1. 模型构建

实务中保险人与再保险人双方对风险的敏感度不同，且一般保险人对风险的敏感程度相对于再保险人而言更高，故可设置保险人的置信水平 $1-\alpha(0<\alpha<1)$ 比再保险人的置信水平 $1-\beta(0<\beta<1)$ 高，即 $\alpha<\beta$。

为了构建目标函数，我们需要表达出原保险人与再保险人双方在停止－损失再保险模型下的生存函数。根据生存函数的定义，原保险人 X_I 的生存函数为：

$$S_{X_I}(x)=\begin{cases}S_X(x), & 0\le x<d\\ 0, & x\ge d\end{cases} \tag{9}$$

基于生存函数与 VaR 之间的关系，可求出 $VaR_{X_I}(d,\alpha)$ 的表达式，即：

$$VaR_{X_I}(d,\alpha)=\begin{cases}d, & 0<d\le S_X^{-1}(\alpha),\\ S_X^{-1}(\alpha), & d>S_X^{-1}(\alpha).\end{cases} \tag{10}$$

基于 VaR 的性质，可得出

$$VaR_{X_{TI}}(d,\alpha)=\begin{cases}d+P(d), & 0<d\le S_X^{-1}(\alpha),\\ S_X^{-1}(\alpha)+P(d), & d>S_X^{-1}(\alpha).\end{cases} \tag{11}$$

类似的，可以得到再保险人的生存函数表达式：

$$S_{X_R}(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ S_X(x+d), & x>0.\end{cases} \tag{12}$$

同理：

$$VaR_{X_R}(d,\beta)=\begin{cases}S_X^{-1}(\beta)-d, & 0\le d<S_X^{-1}(\beta),\\ 0, & d\ge S_x^{-1}(\beta).\end{cases} \tag{13}$$

以及

$$VaR_{X_{TR}}(d,\beta)=\begin{cases}S_X^{-1}(\beta)-d-P(d), & d<S_X^{-1}(\beta),\\ -P(d), & d\ge S_X^{-1}(\beta).\end{cases} \tag{14}$$

我们目标是从再保险人的角度出发，基于保险人总风险存在一定约束下，最小化再保险人面临总风险的 VaR 值，故本文的研究问题 1 的数学表达式为：

$$\begin{aligned}&h(d)=VaR_{X_{TR}}(d,\beta)\\ &\text{s.t }\ VaR_{X_{TI}}(d,\alpha)\le M\end{aligned} \tag{15}$$

其中 M 是一常数，且 $M\ge 0$。我们目前主要是通过最小化目标函数：

$$h(d^*)=\min\{h(d)\},d\in(0,+\infty) \tag{16}$$

d^* 表示最优自留额。

2.2. 问题求解

定理当存在 $\boldsymbol{d}^*$ 满足：$\boldsymbol{d}^*\le \boldsymbol{S}_X^{-1}(\boldsymbol{\alpha})$，且 $\boldsymbol{d}^*+\boldsymbol{P}(\boldsymbol{d}^*)=\boldsymbol{M}$ 有解；或者存在 $\boldsymbol{d}^{**}$ 满足 $\boldsymbol{d}^{**}>\boldsymbol{S}_X^{-1}(\boldsymbol{\alpha})$，且 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{d}^{**})=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{S}_X^{-1}(\boldsymbol{\alpha})$ 有解时，问题 1 的最优解的情况可分为以下情况：

1) 当 $\boldsymbol{d}^*$ 和 $\boldsymbol{d}^{**}$ 均存在时：

a) 当 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{d}^*)\le \boldsymbol{h}(\boldsymbol{d}^{**})$ 时，问题 1 的最优解为 $\boldsymbol{d}^*$

b) 当 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{d}^*)\ge \boldsymbol{h}(\boldsymbol{d}^{**})$ 时，问题 1 的最优解为 $\boldsymbol{d}^{**}$

2) 当 $\boldsymbol{d}^*$ 存在但 $\boldsymbol{d}^{**}$ 不存在时，问题 1 的最优解为 $\boldsymbol{d}^*$

3) 当 $\boldsymbol{d}^*$ 不存在但 $\boldsymbol{d}^{**}$ 存在时，问题 1 的最优解为 $\boldsymbol{d}^{**}$

证明：在数学分析中，求解带有约束条件的极值问题，一般采取拉格朗日乘数法。我们构建拉格朗日函数：

$$L(d,\lambda)=h(d)+\lambda\left(VaR_{X_{TI}}(d,\alpha)-M\right) \tag{17}$$

其中 λ 是拉格朗日乘数。化简上述式子，可以得到：

$$\begin{aligned}L(d,\lambda)&=h(d)+\lambda\left(VaR_{X_{TI}}(d,\alpha)-M\right)\\ &=\begin{cases}S_X^{-1}(\beta)+(\lambda-1)d+(\lambda-1)P(d)-\lambda M, & d\le S_X^{-1}(\beta)\\ \lambda d+(\lambda-1)P(d)-\lambda M, & S_X^{-1}(\beta)<d\le S_X^{-1}(\alpha)\\ \lambda S_X^{-1}(\alpha)+(\lambda-1)P(d)-\lambda M, & d>S_X^{-1}(\alpha)\end{cases}\end{aligned} \tag{18}$$

对式子(18)分别对 d,λ 求偏导，我们可以得到：

$$\frac{\partial L(d,\lambda)}{\partial d}=\begin{cases}(\lambda-1)\left[1-(1+\rho)g\left(S_X(d)\right)\right], & d\le S_X^{-1}(\beta)\\ \lambda-(\lambda-1)(1+\rho)g\left(S_X(d)\right), & S_X^{-1}(\beta)<d\le S_X^{-1}(\alpha)\\ -(\lambda-1)(1+\rho)g\left(S_X(d)\right), & d>S_X^{-1}(\alpha)\end{cases} \tag{19}$$

$$\frac{\partial L(d,\lambda)}{\partial \lambda}=\begin{cases}d+P(d)-M, & 0<d\le S_X^{-1}(\alpha),\\ S_X^{-1}(\alpha)+P(d)-M, & d>S_X^{-1}(\alpha).\end{cases} \tag{20}$$

根据拉格朗日乘数定理，我们要求 $L(d,\lambda)$ 的最小值，需要满足以下条件：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(d,\lambda)}{\partial d}=0\\ \dfrac{\partial L(d,\lambda)}{\partial \lambda}=0\end{cases} \tag{21}$$

我们分类讨论可以得到：

1) 当 $d\le S_X^{-1}(\beta)$ 时，我们令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(d,\lambda)}{\partial d}=0\\ \dfrac{\partial L(d,\lambda)}{\partial \lambda}=0\end{cases} \tag{22}$$

可以得到 $\begin{cases}\lambda=1\\ d+P(d)=M\end{cases}$ 或 $\begin{cases}(1+\rho)g\left(S_X(d)\right)=1\\ d+P(d)=M\end{cases}$。

综合以上分析，可以得到最小值存在的条件为：存在 $d^*<S_X^{-1}(\beta)$，且 $d^*+P(d^*)=M$ 有解。

2) 当 $S_X^{-1}(\beta)<d\le S_X^{-1}(\alpha)$ 时，我们令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(d,\lambda)}{\partial d}=0\\ \dfrac{\partial L(d,\lambda)}{\partial \lambda}=0\end{cases} \tag{23}$$

可以得到 $\begin{cases}\lambda=(\lambda-1)(1+\rho)g\left(S_X(d)\right)\\ d+P(d)=M\end{cases}$

综合以上分析，可以得到最小值存在的条件为：存在 $S_X^{-1}(\beta)<d<S_X^{-1}(\alpha)$，且 $d^*+P(d^*)=M$ 有解。

3) 当 $S_X^{-1}(\alpha)<d$ 时，我们令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(d,\lambda)}{\partial d}=0\\ \dfrac{\partial L(d,\lambda)}{\partial \lambda}=0\end{cases} \tag{24}$$

可以得到 $\begin{cases}\lambda=1\\ P(d)=M+S_X^{-1}(\alpha)\end{cases}$

综合以上分析，可以得到最小值存在的条件为：存在 $S_X^{-1}(\alpha)<d^*$，且 $P(d^*)=M+S_X^{-1}(\alpha)$ 有解

定理证毕。

3. 数值模拟

3.1. 参数选取

这一节我们对第二章的定理进行数值验证。假设保险人面临的初始损失 X 的生存函数为：

$$S_X(x)=\begin{cases}e^{-0.1x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases} \tag{25}$$

基于第二章求解的定理，保险人与再保险人双方的置信水平、约束保险人总风险的上限值、保费的具体形式对得出的最优自留额的大小都有影响。本文选取期望保费原理，对得出的结论进行数值模拟。

3.2. 算例

我们先验证在保险人风险容忍度为 $\alpha=0.01$，再保险人风险容忍度 $\beta=0.05$，风险载荷系数 $\rho=0.1$，表 1 是针对不同约束约束条件 M 大小下的情况。

Table 1. Influence of upper limit of constraint on optimal retention
表 1. 约束上限对最优自留额的影响

M	d^*	$P(d^*)$	$h(d^*)$	d^* 是否存在 (T 表示有解，F 表示没有解)
20	18.2216	1.77844	9.9573	T
30	29.4196	0.4804	0.5804	T
40	39.7943	0.2057	−0.2057	T
50	Not exist			F

表 1 表明随着约束条件 M 越大，最优的自留额越大，对于再保险人而言其接纳的分出损失越小。

我们然后验证在保险人风险容忍度为 $\alpha=0.01$，再保险人风险容忍度 $\beta=0.05$，约束条件 $M=20$ $\rho=0.1$，表 2 是针对不同风险载荷系数 ρ 大小下的情况。

Table 2. Influence on optimal retention due to changes in the relative safety load factor
表 2. 载荷系数对最优自留额影响

ρ	d^*	$P(d^*)$	$h(d^*)$	d^* 是否存在 (T 表示有解，F 表示没有解)
0.1	18.2216	1.7784	9.9573	T
0.2	18.0205	1.9795	9.9573	T
0.3	17.8099	2.1901	9.9573	T
0.4	17.5886	2.4114	9.9573	T

表 2 表明随着载荷系数 ρ 越大，在其他条件下保持不变的情况下，最优的自留额越小，对于再保险人而言其接纳的分出损失越大。根据式子(14)，我们知道 $d^*<S_X^{-1}(\beta)$ 时，$h(d^*)=S_X^{-1}(\beta)-d^*-P(d^*)$。而约束条件 $d^*+P(d^*)=M$ 是一定值，故 $h(d^*)$ 也是一定值。

4. 结论

不同于一般从保险人角度分析的文献，本文从再保险人的角度分析最优再保险的问题，能给我们提供更加多样的角度分析问题。之后的研究可以考虑结合保险人与再保险人双方的角度分析最优再保险，此外约束条件还可以将再保险人总风险约束纳入。值得一提的是，在实务当中，停止－损失保险被广泛应用于医疗、汽车等保险产品定价上，本文能够为保险公司提供一定的保险产品定价理论价值。基于本文的研究结论，可以得出最优的再保险会随着保险人的约束条件变化而变化，故再保险公司在制定再保险合同的时候可以基于投保公司的规模大小以及对风险的容忍度进行考虑。

参考文献

[1] Borch, K. (1960) An Attempt to Determine the Optimum Amount of Stop Loss Reinsurance. *Transactions of the* 16*th International Congress of Actuaries*, **I**, 597-610

[2] Cai, J., Lemieux, C. and Liu, F. (2016) Optimal Reinsurance from the Perspectives of Both an Insurer and a Reinsurer. *ASTIN Bulletin*: *The Journal of the IAA*, **46**, 815-849. https://doi.org/10.1017/asb.2015.23

[3] Arrow, K.J. (1965) Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care. *American Economic Review*, **55**, 154-158.

[4] Vajda, S. (1962) Minimum Variance Reinsurance. *ASTIN Bulletin*: *The Journal of the IAA*, **2**, 257-260. https://doi.org/10.1017/S0515036100009995

[5] Kaluszka, M. and Okolewski, A. (2008) An Extension of Arrow's Result on Optimal Reinsurance Contract. *Journal of Risk and Insurance*, **75**, 275-288. https://doi.org/10.1111/j.1539-6975.2008.00260.x

[6] Cai, J. and Tan, K.S. (2007) Optimal Retention for a Stop-Loss Reinsurance under the VaR and CTE Risk Measures. *ASTIN Bulletin*: *The Journal of the IAA*, **37**, 93-112. https://doi.org/10.1017/S0515036100014756

[7] Cai, J., Tan, K.S., Weng, C. and Zhang, Y. (2008) Optimal Reinsurance under VaR and CTE Risk Measures. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **43**, 185-196. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.05.011

[8] 杨博, 吴黎军. 方差相关保费原理下基于VaR和CTE下停止-损失再保险的最优自留额比较研究[J]. 统计学与应用, 2016, 5(2): 179-195.

[9] Borch, K. (1969) The Optimal Reinsurance Treaty. *ASTIN Bulletin*: *The Journal of the IAA*, **5**, 293-297. https://doi.org/10.1017/S051503610000814X

[10] 朱建章, 刘章, 王心彦, 胡亦钧. 扭曲风险度量下的带约束最优再保险[J/OL]. 数学学报(中文版), 2022: 1-16.

[11] Jorion, P. (2000) Value at Risk: The New Benchmark for Managing Phase-Type Distributions. *Journal of Applied Probability*, **42**, 810-825.

[12] 杜军红, 李智明, 吴黎军. 王氏保费准则下隐含再保险公司违约风险的最优再保险设计[J]. 应用概率统计, 2019, 35(1): 73-85.

[13] Wang, S. (1996) Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Default Risk. *ASTIN Bulletin*: *The Journal of the IAA*, **26**, 71-92. https://doi.org/10.2143/AST.26.1.563234