

四次带参数PH曲线的构造方法

杨雪, 彭兴璇*, 段卓

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2023年1月31日; 录用日期: 2023年3月1日; 发布日期: 2023年3月8日

摘要

针对四次带参数PH曲线, 讨论其几何特征和几何构造方法。首先, 定义了一类含一个形状参数的四次m-Bernstein基函数, 进而得到四次m-Bézier曲线。然后通过引入辅助控制顶点给出四次m-Bézier曲线成为PH曲线的几何特征条件, 最后提出一种新的四次带参数PH曲线的几何构造方法, 并给出误差分析, 通过数值例子, 验证了方法的有效性和可行性。

关键词

m-Bézier曲线, 形状参数, PH曲线, 几何特征

Construction Approach of Quartic PH Curves with Parameter

Xue Yang, Xingxuan Peng*, Zhuo Duan

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jan. 31st, 2023; accepted: Mar. 1st, 2023; published: Mar. 8th, 2023

Abstract

The geometric characteristics and the geometric construction method of quartic PH curve with parameter are discussed. First, we define a class of quartic m-Bernstein basis function with a shape parameter. Then the quartic m-Bézier curve is obtained. By introducing the auxiliary control vertex, the geometric characteristic conditions for quartic m-Bézier curve becoming PH curve is given. We propose a new geometric construction approach of quartic PH curve with parameter.

*通讯作者。

And the error analysis is given. The validity and feasibility of the study are verified by numerical examples.

Keywords

m-Bézier Curves, Shape Parameter, PH Curves, Geometric Characteristics

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. 引言

随着计算机技术的不断完善和发展,计算机辅助几何设计(CAGD)在航空、建筑、机械设计和制造等现代工业领域得到广泛应用。利用 Bézier 方法表示与逼近曲线曲面在 CAGD 中具有重要的应用价值。Bézier 曲线的形状仅与其控制多边形的控制顶点有关,为了在不改变控制顶点的前提下自由调整曲线形状,国内外学者引入了含有一个或多个形状参数的 Bézier 曲线[1]-[6]。

Bézier 曲线具有凸包性、变差缩减性、几何不变性等优点。然而,由于其单位法向量包含一个平方根,Bézier 曲线并不总有有理等距曲线。1990 年, Farouki [7]引入了一种平面参数曲线 Pythagorean-hodograph 曲线(简称 PH 曲线),这类曲线的弧长和等距线可用有理多项式表示。此后,涌现了大量对 PH 曲线相关理论及应用的研究,文献[7]给出了在边角分离的条件下,三次 PH 曲线的控制多边形的几何特征;为了推广三次 PH 曲线的应用,文献[8]讨论了给定 3 个型值点插值三次 PH 曲线,并给出其构造方法;文献[9]讨论了四次 PH 曲线控制多边形的几何条件以及 Hermite 插值问题;文献[10]从几何结构和复分析的角度构造了 Hermite 插值的四次 PH 曲线,并给出插值逼近的误差;文献[11]通过引入辅助控制顶点研究了五次 Bézier 曲线成为 PH 曲线的充要条件,得到五次 PH 曲线的控制多边形的几何特征;文献[12]给出了五次 PH 曲线的 Bézier 控制点之间的几何关系,给出了在 Hermite 插值条件下构造五次 PH 曲线的几何方法;文献[13]、[14]分别讨论了六次、七次 PH 曲线的构造方法以及 Hermite 插值问题;文献[15]提出了七次 Bézier 曲线成为 PH 曲线时其控制多边形满足的边角约束条件;文献[16]以基曲线端点、一阶导数及曲率为插值条件构造 G^2 连续的七次 PH 曲线。此外,PH 曲线的应用得到进一步拓展,文献[17]给出了三次 H-Bézier 曲线成为 PH 曲线的边角分离的几何条件,并提出一种新的几何构造法。四次 PH 曲线具有更多的自由度,应用更加灵活,目前为止,四次曲线的几何构造方法还没有被研究。

本文主要研究了带参数 PH 曲线的逼近问题,结构安排如下:首先,定义了一类含一个形状参数的四次 m-Bernstein 基函数,从而得到四次 m-Bézier 曲线;其次,通过引入辅助控制顶点的方法给出四次 m-Bézier 曲线成为 PH 曲线的边角特征;最后,进一步讨论了四次 PH 曲线的几何构造方法,并给出误差估计和数值实例。

2. 四次带参数的 m-Bézier 曲线

本节定义了一类含一个形状参数的四次 m-Bernstein 基函数,进而得到四次 m-Bézier 曲线。

定义 1 对于任意的 $t \in [0,1], m \in [0,1]$, 称关于 t 的多项式

$$\begin{cases} b_{0,4}(t) = (1-mt)^4 \\ b_{1,4}(t) = 4mt(1-mt)^3 \\ b_{2,4}(t) = 6m^2t^2(1-mt)^2 \\ b_{3,4}(t) = 4m^3t^3(1-mt) \\ b_{4,4}(t) = m^4t^4 \end{cases} \quad (1)$$

为四次 m-Bernstein 基函数。

定义 2 给定控制顶点 $P_i \in \mathbf{R}^2, i=0,1,2,3,4$ ，对任意的 $t \in [0,1]$ ，则称

$$B(t) = \sum_{i=0}^4 P_i b_{i,4}(t), i=0,1,2,3,4 \quad (2)$$

为四次 m-Bézier 曲线。

从四次 m-Bernstein 基函数的定义中，我们可以得到 m-Bézier 曲线与 Bézier 曲线有许多共同的基本性质，比如端点性、对称性、几何不变性、保凸性、变差缩减性等。另外，其速端曲线也可以表示为 Bernstein 形式：

$$B'(t) = 4 \sum_{i=0}^3 \Delta P_i b_{i,3}(t), i=0,1,2,3 \quad (3)$$

其中 $\Delta P_i = P_{i+1} - P_i, i=0,1,2,3$ 为控制顶点的一阶向前差分， $L_i = \|\Delta P_i\|, i=0,1,2,3$ 为控制多边形的边长。

3. 四次带参数的 m-Bézier 曲线成为 PH 曲线的几何特征条件

定义 3 [6] 给定一条平面参数多项式曲线 $q(t) = (x(t), y(t))$ ，若存在一个实多项式 $\sigma(t)$ ，使得 $\sigma^2(t) = x'^2(t) + y'^2(t)$ ，则称该曲线为一条平面 PH 曲线。

引理 1 [9] 一条平面参数曲线是 PH 曲线当且仅当其一阶导数满足

$$P'(t) = \rho(t)Q^2(t) \quad (4)$$

其中 $\rho(t)$ 为实多项式， $Q(t)$ 为复多项式。

因为四次 PH 曲线的导矢是三次的，所以 $P(t)$ 可写成如下形式：

$$P'(t) = [a_0(1-\alpha t) + \alpha t][z_0(1-\alpha t) + z_1(\alpha t)]^2, a_0 \in \mathbf{R}, z_0, z_1 \in \mathbf{C} \quad (5)$$

将(5)式展开，得到

$$P'(t) = a_0 z_0^2 (1-\alpha t)^3 + (2a_0 z_0 z_1 + z_0^2) \alpha t (1-\alpha t)^2 + (a_0 z_1^2 + 2z_0 z_1) \alpha t^2 (1-\alpha t) + z_1^2 (\alpha t)^3 \quad (6)$$

利用比较系数法，将(6)式与 Bernstein 多项式系数比较，得到

$$\begin{cases} a_0 z_0^2 = 4\alpha \Delta P_0 \\ 2a_0 z_0 z_1 + z_0^2 = 12\alpha \Delta P_1 \\ a_0 z_1^2 + 2z_0 z_1 = 12\alpha \Delta P_2 \\ z_1^2 = 4\alpha \Delta P_3 \end{cases} \quad (7)$$

为方便讨论，令 $\angle P_0 Q_1 P_2 = \angle P_2 Q_2 P_3$ ，引入辅助控制顶点 Q_1, Q_2 ，

$$\begin{cases} Q_1 = P_1 + \frac{z_0^2}{12\alpha} = P_2 - \frac{a_0 z_0 z_1}{6\alpha} \\ Q_2 = P_2 + \frac{z_0 z_1}{6\alpha} = P_3 - \frac{a_0 z_1^2}{12\alpha} \end{cases} \quad (8)$$

不妨记

$$|P_1 - Q_1| = R_0, |Q_1 - P_2| = R_1, |P_2 - Q_2| = R_2, |Q_2 - P_3| = R_3,$$

得到四次 PH 曲线的控制多边形如图 1 所示。

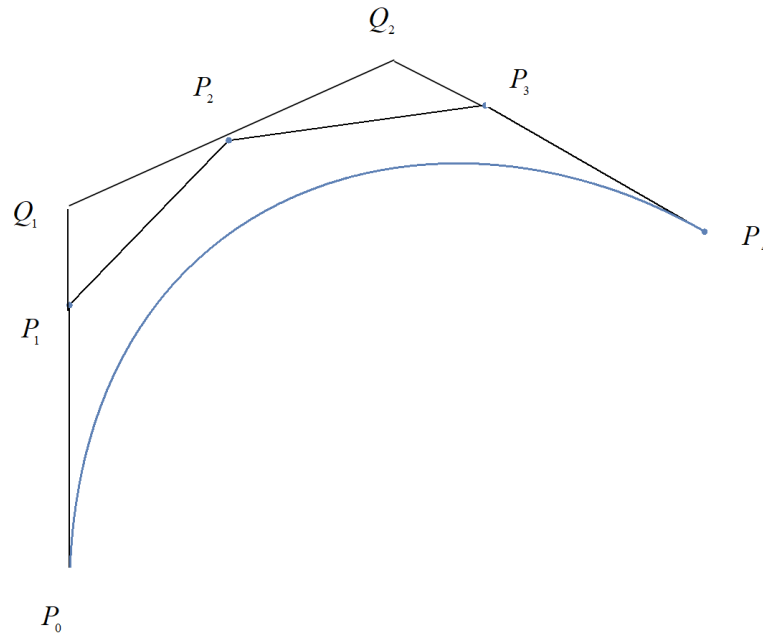


Figure 1. Control polygon of quartic PH curve
图 1. 四次 PH 曲线的控制多边形

(8)式可化为

$$\begin{cases} R_0 = \frac{z_0^2}{12\alpha} \\ R_1 = \frac{a_0 z_0 z_1}{6\alpha} \\ R_2 = \frac{z_0 z_1}{6\alpha} \\ R_3 = \frac{a_0 z_1^2}{12\alpha} \end{cases} \quad (9)$$

即 $R_1 R_2 = 4R_0 R_3$ 。

由(8)、(9)式，得到

$$a_0 = \frac{L_0}{3R_0} = \frac{3R_3}{L_3} = \frac{R_1}{R_2} \quad (10)$$

通过调整 a_0 的取值可以对曲线的形状进行调整。

从而 $L_0R_2 = 3R_0R_1, L_3R_1 = 3R_2R_3$ 。

综上, 我们给出四次带参数的 m-Bézier 曲线成为 PH 曲线的几何特征, 得到了四次带参数的 PH 曲线, 我们称为 m-PH 曲线, 如定理 2 所述。

定理 2 给定 $\angle P_0Q_1P_2 = \angle P_2Q_2P_3$, 一个四次 m-Bézier 曲线是 m-PH 曲线当且仅当直线 Q_1Q_2 经过点 P_2 , 分别与 P_0P_1 、 P_4P_3 交于点 Q_1 、 Q_2 , 使得

$$\begin{aligned} L_0R_2 &= 3R_0R_1, \\ L_3R_1 &= 3R_2R_3, \\ R_1R_2 &= 4R_0R_3. \end{aligned}$$

4. 四次 m-PH 曲线的几何构造法

基于上一节 m-Bézier 曲线成为 m-PH 曲线的关于控制多边形的几何特征条件, 本节通过构造控制多边形, 求解控制顶点, 得到四次 m-PH 曲线, 给出了几何构造方法。

给定始末控制点 P_0 、 P_4 和任一点 O , 连接 OP_0 、 OP_4 、 P_0P_4 , 令其长度比为 $\frac{|OP_4|}{|OP_0|} = r \geq 1$, 夹角范围为 $0 < \angle P_0OP_4 = \varphi < \pi$, 在边 OP_0 和 OP_4 上取两点 P_1 和 P_3 , 设 $\vec{e}_1 = P_0 - O = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = r(\cos \varphi, \sin \varphi)$, 则点 P_1 、 P_3 分别为:

$$\begin{cases} P_1 = \mu \vec{e}_1, \\ P_3 = \omega \vec{e}_2, \end{cases} 0 \leq \mu, \omega \leq 1 \quad (11)$$

以 O 为坐标原点, OP_0 为 x 轴建立平面直角坐标系, 取线段 P_0P_4 的中点 M , 则 $M = \left(\frac{1+r \cos \varphi}{2}, \frac{r \sin \varphi}{2} \right)$, 连接 OM , 则 $P_2 = \eta M = \eta \left(\frac{1+r \cos \varphi}{2}, \frac{r \sin \varphi}{2} \right)$ 。过点 P_2 作一条直线 EF 交 OP_0 、 OP_4 于 E 、 F , 且使 $\angle P_0EF = \angle P_4FE = \theta$, 由(11)式, 得到所构造的 PH 曲线的控制顶点坐标为:

$$\begin{cases} P_0 = (1, 0) \\ P_1 = (\mu, 0) \\ P_2 = \eta \left(\frac{1+r \cos \varphi}{2}, \frac{r \sin \varphi}{2} \right) \\ P_3 = \omega r (\cos \varphi, \sin \varphi) \\ P_4 = r (\cos \varphi, \sin \varphi) \end{cases} \quad (12)$$

为方便计算, 不妨令 $L_0^* = L_0 + R_0, L_1^* = R_1 + R_2, L_2^* = R_3 + L_3, \lambda = \frac{L_0}{R_0}, 0 < \lambda < +\infty$, 由定理 2, 得到

$$\frac{L_3}{R_3} = \frac{9}{\lambda} \quad (13)$$

L_0^* 、 L_1^* 、 L_2^* 满足如下约束关系:

$$L_1^* = k \sqrt{L_1^* L_2^*}, \text{ 其中 } k = \frac{2(\lambda+3)}{\sqrt{3(\lambda+9)(\lambda+1)}} \quad (14)$$

接下来, 由(12)、(13)式得到点 E 、 F 与边长及角度几何量之间的关系式:

$$\begin{cases} E+(R_0,0)=P_1 \\ E+(R_0,0)+(L_0,0)=P_0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} F+(R_3 \cos \varphi, R_3 \sin \varphi)=P_3 \\ F+(R_3 \cos \varphi, R_3 \sin \varphi)+(L_3 \cos \varphi, L_3 \sin \varphi)=P_4 \end{cases} \quad (16)$$

求解得到

$$E = \left(\frac{(\lambda+1)\mu-1}{\lambda}, 0 \right)$$

$$F = \left(\omega r - \frac{(1-\omega)r\lambda}{9}, \right) (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

根据 $\angle P_0EF = \angle P_4FE$ ，可得

$$\frac{(\lambda+1)\mu-1}{\lambda} = \omega r - \frac{(1-\omega)r\lambda}{9} \quad (17)$$

解得

$$\omega = \frac{r\lambda^2 + 9\mu\lambda + 9\mu - 9}{\lambda r(9 + \lambda)} \quad (18)$$

将(18)代入(14)中，得到关于参数 μ 的方程

$$\left(\frac{2(\lambda+1)^2(1-\cos \varphi)}{\lambda^2} - \frac{4(\lambda+3)^2(\lambda+1)}{3(\lambda+9)\lambda^2} \right) \mu^2 + \left(\frac{2(-2\lambda-2)(1-\cos \varphi)}{\lambda^2} - \frac{4(\lambda+3)^2(\lambda+1)}{3(\lambda+9)\lambda^2} \right) \mu + \frac{2(1-\cos \varphi)}{\lambda^2} - \frac{4(\lambda+3)^2(r\lambda+1)}{3\lambda(\lambda+9)} = 0 \quad (19)$$

根据上述推导，可以求出曲线控制多边形的顶点，从而得到四次 m-PH 曲线，即四次 m-PH 曲线的几何构造法。

5. 误差分析

定义 3 给定两组控制顶点 $H_i, P_i, i=0,1,2,3,4$ ，四次 m-Bézier 曲线为 $H(t) = \sum_{i=0}^4 H_i b_{i,4}(t)$ ，四次 m-PH 曲线为 $P(t) = \sum_{i=0}^4 P_i b_{i,4}(t)$ ，对于任意的实数 a ，曲线的误差定义如下：

$$\varepsilon = \max_{i=0,1,2,3,4} \sqrt{\langle H(t) - P(t), H(t) - P(t) \rangle} \quad (20)$$

即

$$\varepsilon = \int_0^a \left\| \sum_{i=0}^4 H_i b_{i,4}(t) - \sum_{i=0}^4 P_i b_{i,4}(t) \right\|^2 dt \leq a \max_{i=0,1,2,3,4} \|H_i - P_i\|$$

6. 数值例子

例 1 给定 m-Bézier 曲线的控制顶点：

$$\begin{aligned}
 H_0 &= (1, 0) \\
 H_1 &= (0.4962, 0) \\
 H_2 &= (0.4046, 0.3172) \\
 H_3 &= (0.3865, 0.6113) \\
 H_4 &= (0.5, 0.8660)
 \end{aligned}$$

四次 m-Bézier 曲线及其控制多边形如图 2 所示。

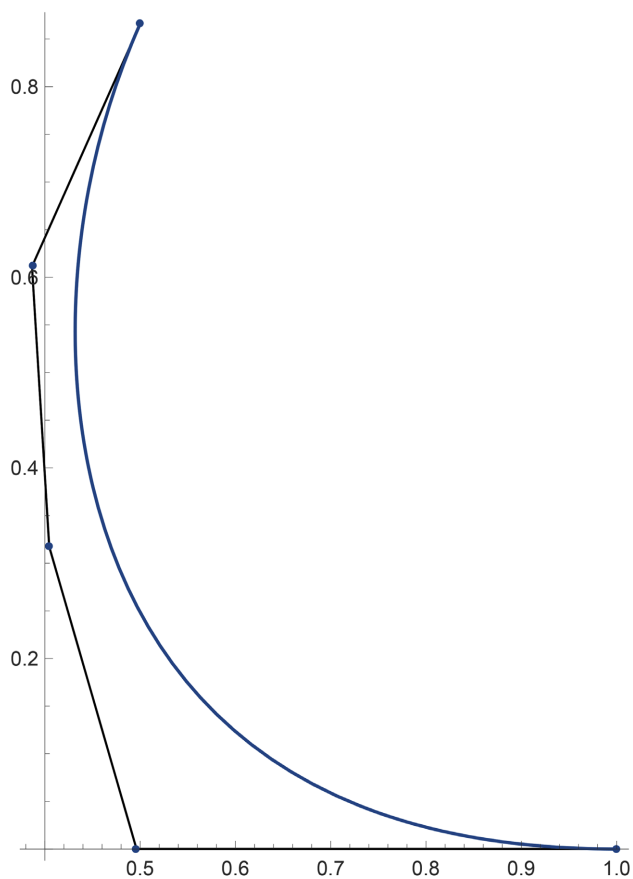


Figure 2. Quartic m-Bézier curve (The angle between two edges of the control polygon is acute)
图 2. 四次 m-Bézier 曲线(控制多边形的两边夹角为锐角)

取 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $r = 1$, $\lambda = 4$, 分别代入(18)、(19)式, 求得 $\omega = 0.6543$, $\mu = 0.6005$, 由(12)式可以得到 m-PH 曲线的控制顶点:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= (1, 0) \\
 P_1 &= (0.6005, 0) \\
 P_2 &= (0.3755, 0.2168) \\
 P_3 &= (0.3271, 0.5666) \\
 P_4 &= (0.5, 0.8660)
 \end{aligned}$$

四次 m-PH 曲线及其控制多边形如图 3 所示。

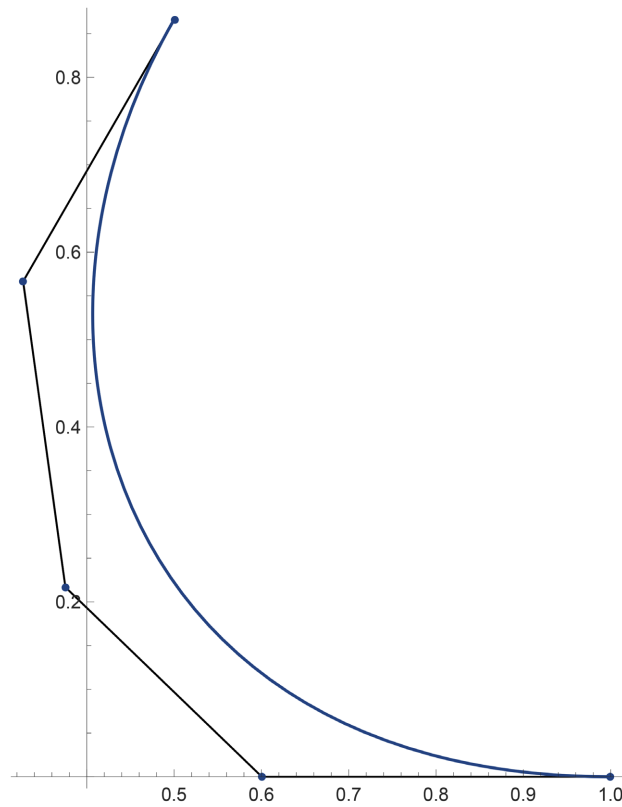


Figure 3. Quartic m-PH curve (The angle between two edges of the control polygon is acute)
图 3. 四次 m-PH 曲线(控制多边形的两边夹角为锐角)

由误差公式得到两条曲线之间的误差为

$$\varepsilon = \int_0^a \left\| \sum_{i=0}^4 H_i b_{i,4}(t) - \sum_{i=0}^4 P_i b_{i,4}(t) \right\|^2 dt$$

令 $n = \left\| \sum_{i=0}^4 H_i b_{i,4}(t) - \sum_{i=0}^4 P_i b_{i,4}(t) \right\|^2$ ，则

$$n = 0.1741m^2t^2 - 1.0446m^3t^3 + 2.9752m^4t^4 - 4.9368m^5t^5 + 4.8821m^6t^6 - 2.6762m^7t^7 + 0.6262m^8t^8$$

从而

$$\varepsilon = 0.0580a^3m^2 - 0.2612a^4m^3 + 0.5950a^5m^4 - 0.8228a^6m^5 + 0.6974a^7m^6 - 0.3345a^8m^7 + 0.0696a^9m^8$$

$$\varphi = a \max_{i=0,1,2,3,4} \|H_i - P_i\| = 0.1045a$$

当 $0 < a < 1, \varepsilon < \varphi$ 时，两条曲线之间的误差较小。

例 2 给定 m-Bézier 曲线的控制顶点：

$$\begin{aligned} H_0 &= (1, 0) \\ H_1 &= (0.4762, 0) \\ H_2 &= (0.1105, 0.1503) \\ H_3 &= (-0.2074, 0.5079) \\ H_4 &= (-0.5, 0.8660) \end{aligned}$$

四次 m-Bézier 曲线及其控制多边形如图 4 所示。

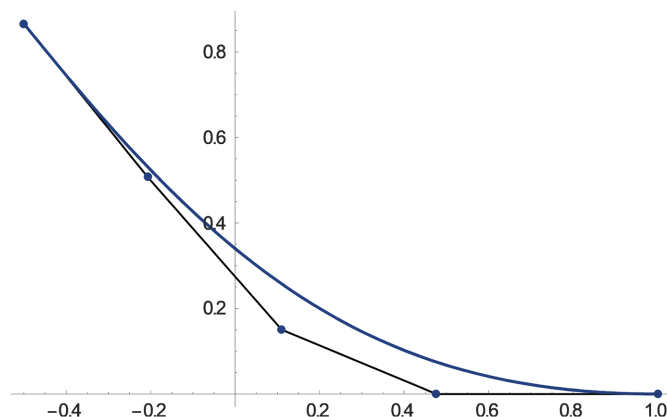


Figure 4. Quartic m-Bézier curve (The angle between two edges of the control polygon is obtuse)
图 4. 四次 m-Bézier 曲线(控制多边形的两边夹角为钝角)

取 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $r = 1$, $\lambda = 4$, 分别代入(18)、(19)式, 求得 $\omega = 0.5615$, $\mu = 0.4933$, 由(12)式可以得到 m-PH 曲线的控制顶点:

$$\begin{aligned} P_0 &= (1, 0) \\ P_1 &= (0.4933, 0) \\ P_2 &= (0.1012, 0.1753) \\ P_3 &= (-0.2808, 0.4862) \\ P_4 &= (-0.5, 0.8660) \end{aligned}$$

四次 m-PH 曲线及其控制多边形如图 5 所示。

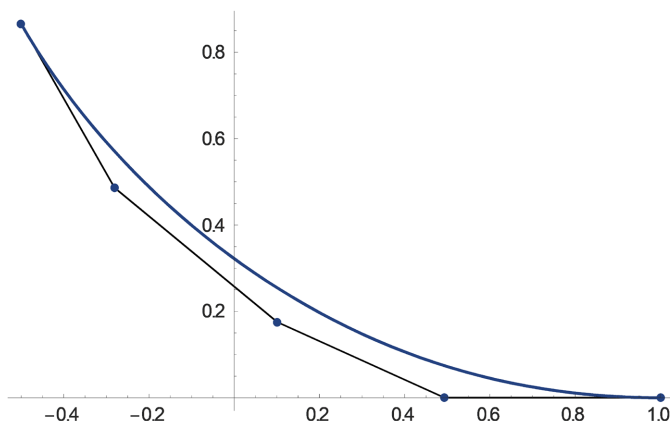


Figure 5. Quartic m-PH curve (The angle between two edges of the control polygon is obtuse)
图 5. 四次 m-PH 曲线(控制多边形的两边夹角为钝角)

由误差公式得到两条曲线之间的误差为

$$\varepsilon = \int_0^a \left\| \sum_{i=0}^4 H_i b_{i,4}(t) - \sum_{i=0}^4 P_i b_{i,4}(t) \right\|^2 dt$$

令 $n = \left\| \sum_{i=0}^4 H_i b_{i,4}(t) - \sum_{i=0}^4 P_i b_{i,4}(t) \right\|^2$, 则

$$n = 0.0047m^2t^2 - 0.0282m^3t^3 + 0.0961m^4t^4 - 0.1964m^5t^5 + 0.3178m^6t^6 - 0.3180m^7t^7 + 0.1240m^8t^8$$

从而

$$\varepsilon = 0.0016a^3m^2 - 0.0071a^4m^3 + 0.0192a^5m^4 - 0.0327a^6m^5 + 0.0454a^7m^6 - 0.0398a^8m^7 + 0.0138a^9m^8$$

$$\varphi = a \max_{i=0,1,2,3,4} \|H_i - P_i\| = 0.0765a$$

当 $0 < a < 1, \varepsilon < \varphi$ 时, 两条曲线之间的误差较小。

7. 总结

因为 PH 曲线的弧长可以用含参数的多项式精确表示, 且其等距线是有理的, 所以 PH 曲线在平面参数曲线中占有重要地位。本文基于定义的一类四次带参数的 Bézier 曲线, 给出了 m-Bézier 曲线成为 PH 曲线的几何特征条件。本文研究的另一个问题, 即将 PH 曲线的构造方法拓展到四次, 随着次数的提高, 曲线具有更高的自由度, 四次 m-Bézier 曲线可以通过修改其中的三个控制顶点, 使其成为 m-PH 曲线。今后将会进一步研究更高维度的曲线构造方法, 还将研究四次带参数 PH 曲线的过渡曲线的构造。

参考文献

- [1] 韩旭里, 刘圣军. 三次均匀 B 样条曲线的扩展[J]. 计算机辅助几何设计与图形学学报, 2003, 15(5): 576-578.
- [2] Wang, W.T. and Wang, G.Z. (2005) Bézier Curves with Shape Parameter. *Journal of Zhejiang University Science A (Science in Engineering)*, **6**, 497-501. <https://doi.org/10.1631/jzus.2005.A0497>
- [3] Zhu, Y.P. and Han, X.L. (2014) Curves and Surfaces Construction Based on New Basis with Exponential Functions. *Acta Applicandae Mathematicae*, **129**, 183-203. <https://doi.org/10.1007/s10440-013-9835-2>
- [4] 严兰兰, 韩旭里, 饶智勇. 带局部形状参数的 λ -B 曲线设计[J]. 中国图象图形学报, 2016, 21(2): 174-183.
- [5] Barsky, B.A. (1981) The Beta Spline: A Local Representation Based on Shape Parameters and Functional Geometric Measures. University of Utah, Salt Lake City.
- [6] 王成伟, 张卷美. 三次 Bézier 曲线另一种带三参数的新拓展及其应用[J]. 北京电子科技学院学报, 2021, 29(1): 47-53.
- [7] Farouki, R.T. and Sakkalis, T. (1990) Pythagorean Hodographs. *IBM Journal of Research and Development*, **34**, 736-752. <https://doi.org/10.1147/rd.345.0736>
- [8] 方林聪, 李毓君. 三点插值的三次 PH 曲线构造方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2020, 32(3): 385-391.
- [9] Wang, G.Z. and Fang, L.C. (2009) On Control Polygons of Quartic Pythagorean-Hodograph Curves. *Computer Aided Geometric Design*, **26**, 1006-1015. <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2009.08.003>
- [10] 郑志浩, 汪国昭. 基于 PH 曲线插值的圆锥曲线逼近[J]. 浙江大学学报(工学版), 2015, 49(12): 2290-2297.
- [11] Fang, L.C. and Wang, G.Z. (2018) Geometric Characteristics of Planar Quintic Pythagorean-Hodograph Curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **330**, 117-127. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.08.014>
- [12] 雍俊海, 郑文. 一类五次 PH 曲线 Hermite 插值的几何方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005(5): 990-995.
- [13] 王慧, 朱春钢, 李彩云. 六次 PH 曲线 G^2 Hermite 插值[J]. 图学学报, 2016, 37(2): 155-165.
- [14] 李毓君, 方林聪. 七次 PH 曲线 $G^2[C^1]$ Hermite 插值方法[J]. 中国科学: 信息科学, 2019, 49(6): 698-707.
- [15] Zheng, Z.H., Wang, G.Z. and Yang, P. (2016) On Control Polygons of Pythagorean Hodograph Septic Curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **296**, 212-227. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.09.006>
- [16] Juttler, B. (2001) Hermite Interpolation by Pythagorean Hodograph Curves of Degree Seven. *Mathematics of Computation*, **70**, 1089-1111. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-00-01288-6>
- [17] Qin, X.Q., Hu, G., Yang, Y., et al. (2014) Construction of PH Splines Based on H-Bézier Curves. *Applied Mathematics and Computation*, **238**, 460-467. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.04.033>