Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 824-828
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134086

Hans汉斯

基于一道课本例题的探究与拓展

邸贺璇[1,2]，陈献华[3]，郭继东[1,2]

[1]伊犁师范大学数学与统计学院，新疆 伊宁
[2]伊犁师范大学应用数学研究所，新疆 伊宁
[3]伊宁市第三中学，新疆 伊宁

收稿日期：2023年3月13日；录用日期：2023年4月14日；发布日期：2023年4月23日

摘　要

中学数学课本中的例题具有示范性、典型性和探究性，是课本的精髓。浏览近几年全国各地的高考数学试卷，很多试题来源于课本，“题在书外，根在书内”。本文选择人教A版必修二“平面向量数量积的坐标表示”的习题中的拓广探索进行探究，分别从选题意义、试题分析、解题思路、价值与拓展和高等知识的联系等方面进行分析。

关键词

例题，探究，拓展

Based on a Textbook Example Question to Explore and Expand

Hexuan Di[1,2], Xianhua Chen[3], Jidong Guo[1,2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang
[2]Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yining Xinjiang
[3]Yining No. 3 Middle School, Yining Xinjiang

Received: Mar. 13th, 2023; accepted: Apr. 14th, 2023; published: Apr. 23rd, 2023

Abstract

The examples in middle school math textbooks are exemplary, typical and exploratory, which is the essence of the textbook. Browsing the recent years of national college entrance examination math papers, many questions from the textbook, “the problem is outside the book, rooted in the book”. This paper selects the extension exploration in the exercise “coordinate representation of

文章引用: 邸贺璇, 陈献华, 郭继东. 基于一道课本例题的探究与拓展[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 824-828.
DOI: 10.12677/pm.2023.134086

plane vector dot product" of compulsory A edition of Human Education, respectively from the significance of topic selection, analysis of test questions, problem-solving ideas, value and expansion and the connection of higher knowledge.

Keywords

Examples, Exploration, Expansion

1. 引言

向量是近代数学中重要和基本概念之一，向量理论具有丰富的物理背景和深刻的数学内涵。《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订版)》特别强调了向量的作用，指明向量既是几何学的研究对象，又是代数学的研究对象[1]。作为几何对象，向量有方向，可以刻画长度、面积体积等几何度量问题；作为代数对象，可以进行运算。从数的运算到向量的运算是一次飞跃，而向量的数量积可以刻画长度。为此，向量是沟通几何与代数的桥梁。向量的学习，不仅有助于学生对几何、三角函数、复数等知识的理解，也是学习线性代数、解析几何、泛函分析等大学课程的理论基础[2]。除了在数学方面的应用，向量还在实际生活中有着广泛的应用。例如，向量可以用来解释和说明电学的基本原理；向量在气象学和天文学中也经常用到；在宇宙航行原理方面，向量是很重要的一种工具等等。因此，向量是进一步学习和研究其他领域问题的基础，在解决实际问题中发挥着重要作用[3]。

众所周知，数学学习中，做习题是必须经历的环节。做习题的过程是应用数学知识解决问题的过程[4]。教材中的课后习题是数学知识转化为基本技能的载体，体现教材的深度和广度，揭示解题的思路和方法，使学生进一步巩固所学的数学基础知识，加深、扩大对理论用途的认识，并学会熟练地运用基础知识。同时，习题在教学中起着培养和发展学生的数学思维能力的作用。本文选择人教 A 版必修二“平面向量数量积的坐标表示”的习题中的拓广探索进行探究，分别从选题意义、试题分析、解题思路、价值与拓展和高等知识的联系等方面进行分析。

2. 题目介绍

如图，设 Ox、Oy 是平面内相交成 60° 角的两条数轴，$\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 分别是与 x 轴、y 轴正方向同向的单位向量，若向量 $\boldsymbol{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，则把有序数对 (x,y) 叫做向量 $\boldsymbol{PO}$ 在坐标系 xOy 中的坐标[5]。假设 $\boldsymbol{OP}=3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，

1) 计算的 $|\boldsymbol{OP}|$ 大小；

2) 由平面向量基本定理，本题中向量坐标的规定是否合理？

2.1. 选题的意义

《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订版)》中指出平面向量这部分内容是以几何和代数为主要课程主线的，要突出在学习过程当中进行几何和代数之间的融合，就能够帮助学生们实现数学知识的关联加强了整体性的理解。

在高中的数学课本当中，向量是一种既可以表示几何学，也可以表示代数学的研究对象。

在近代数学当中，向量是非常常用的一个数学概念，同时它也是结合三角函数，代数以及几何的一个重要工具。

2.2. 试题分析

该题目的背景是某个物体受到的两个力的作用来求合力的大小。几何背景是知道此物体是处在平行四边形的两边和夹角当中，可以求出对角线的长。随让考查知识点较为单一，只是涉及道求距离的问题，但是它让我们加强了对于坐标和距离这一概念有更广泛的认识。

2.3. 解题思路

如图 1，解决求长度的一般方法有代数法、几何法和向量法。利用代数法求长度问题往往要借助两点间的距离公式，利用几何法求解时通常转化为解三角形的问题，涉及到的知识点为正、余弦定理，向量具有集数和形于一身的特征，很多求长度的问题用数量积的知识解决也比较方法。

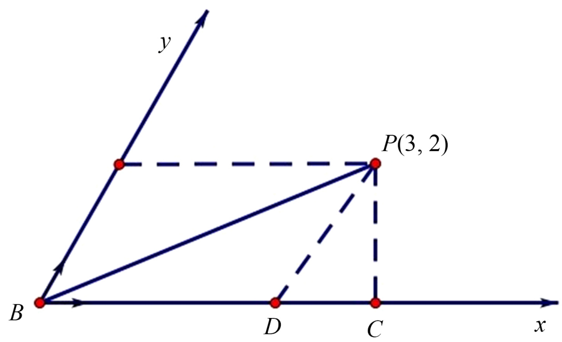

Figure 1. Sketch map
图 1. 平面示意图

解法一：构造直角三角形，利用勾股定理求 $|\boldsymbol{OP}|$ 的长。

在 $Rt\Delta PDC$ 求的 $|CD| = 2\cos 60^\circ = 1$，$|PC| = 2\sin 60^\circ = \sqrt{3}$ 的长，利用勾股定理求 $|OP| = \sqrt{OC^2 + PC^2} = \sqrt{19}$。

本问题中的坐标系是平面斜坐标系，它与平面直角坐标系有什么关系呢？设平面上任一点 $P(x, y)$，斜坐标为 (x', y')，$\omega = \angle xOy$。斜坐标可以通过几何变换转化成直角坐标。

$$\begin{cases} x = x' + y'\cos\omega \\ y = y'\sin\omega \end{cases}$$

比如：点 P 的斜坐标为 $(3,2)$，通过上述变换可以得到点 P 的直角坐标 $\left(4, \sqrt{3}\right)$，利用两点间的距离公式可以求得 $|OP| = \sqrt{4^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{19}$。

在此基础上，我们可以进一步推出：在平面斜坐标系下，两点间的距离公式

$$|OP| = \sqrt{\left(x' + y'\cos\omega\right)^2 + \left(y'\cos\omega\right)^2} = \sqrt{\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2 + 2x'y'\cos\omega}.$$

$$|OP| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2\times 3\times 2\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{19}.$$

为此，由平面向量基本定理可知，本题目提供的向量坐标规定是合理的，它是线性代数中基变换与

坐标变换内容的具体实例，而且加深了对于坐标概念的理解。

解法二：利用余弦定理求得$|OP|$。

$$OP^2 = OD^2 + DP^2 - 2OD \cdot DP\cos 120^\circ = 19$$

解法三：数量积$|\boldsymbol{OP}| = \sqrt{\boldsymbol{OP}^2}$。

$$\boldsymbol{OP}^2 = (3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2)^2 = 9\boldsymbol{e}_1^2 + 12\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_2^2 = 19.$$

若，$\boldsymbol{OP} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$，则$|OP| = \sqrt{\boldsymbol{OP}^2} = \sqrt{(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2)^2} = \sqrt{(x\boldsymbol{e}_1)^2 + 2xy\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 + (y\boldsymbol{e}_2)^2}$

由此可见，数量积求模长适用任何坐标系，更具有一般意义。

2.4. 价值与推广

2.4.1. 题目的条件和结论颠倒改编成特殊情况下的静态试题

题目1：如图2平面内有三个向量$\boldsymbol{OA}, \boldsymbol{OB}, \boldsymbol{OC}$，其中$\boldsymbol{OA}$与$\boldsymbol{OB}$的夹角为$120^\circ$，$\boldsymbol{OA}$与$\boldsymbol{OC}$夹角为$30^\circ$，且$|\boldsymbol{OA}| = |\boldsymbol{OB}| = 1$，$|\boldsymbol{OC}| = 2\sqrt{2}$，若$\boldsymbol{OC} = x\boldsymbol{OA} + y\boldsymbol{OB}$其中$x, y \in R$，求$x + y$

解：如图所示，$\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{OD} + \boldsymbol{OE} = x\boldsymbol{OA} + y\boldsymbol{OB}$，

在ΔOCD中，$\angle COD = 30^\circ$，$\angle OCD = \angle COB = 90^\circ$。

可求$|\boldsymbol{OD}| = 4$，

同理可求$|\boldsymbol{OE}| = 2$，

$\therefore x = 4, y = 2$

$\because x + y = 6$。

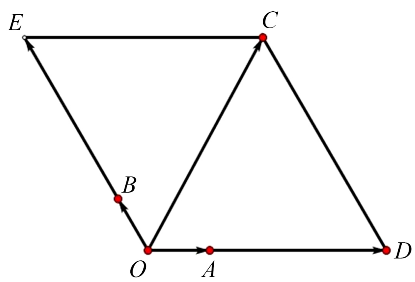

Figure 2. Sketch map
图 2. 示意图

2.4.2. 将题目 1 的条件一般化，将特殊试题变成一般试题

题目2：(2017江苏省高考题)在同一个平面内，向量$\boldsymbol{OA}, \boldsymbol{OB}, \boldsymbol{OC}$的模长分别为$1, 1, \sqrt{2}$，$\boldsymbol{OA}$与$\boldsymbol{OC}$夹角为$\alpha$，且$\tan\alpha = 7$，$\boldsymbol{OB}$与$\boldsymbol{OC}$夹角为$45^\circ$，若$\boldsymbol{OC} = x\boldsymbol{OA} + y\boldsymbol{OB}$其中$x, y \in R$，求$x + y$的值。

解：由$\tan\alpha = 7$，可得$\sin a = \dfrac{7\sqrt{2}}{10}$，$\cos a = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$。根据向量的分解，

易得$\begin{cases} x\cos 45^\circ + y\cos\alpha = \sqrt{2} \\ x\sin 45^\circ - y\cos\alpha = 0 \end{cases}$，即$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{10}y = \sqrt{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{10}y = 0 \end{cases}$

即$\begin{cases} 5x + y = 10 \\ 5x - 7y = 0 \end{cases}$即得$x = \dfrac{7}{4}$，$y = \dfrac{5}{4}$

DOI: 10.12677/pm.2023.134086

所以 $x+y=3$

2.4.3. 在题目 1 的基础上，将静态试题变成动态试题

题目 3：(2009 年安徽省高考题)给定两个长度为 1 的平面向量 $\boldsymbol{OA}$、$\boldsymbol{OB}$，它们的夹角为 120°，点 C 在圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上运动，若 $\boldsymbol{OC}=x\boldsymbol{OA}+y\boldsymbol{OB}$ 其中 $x,y\in R$，求 $x+y$ 的最大值。

解：由已知条件知

$\boldsymbol{OC}^2=1=\left(x\boldsymbol{OA}+y\boldsymbol{OB}\right)^2=x^2\boldsymbol{OA}^2+2xy\boldsymbol{OA}\cdot\boldsymbol{OB}+y^2\boldsymbol{OB}^2=x^2-xy+y^2=\left(x+y\right)^2-3xy$；

$\therefore\left(x+y\right)^2-1=3xy$ 根据向量加法的平行四边形法则，容易判断出 $x,y>0$，

$\therefore x+y\geq 2\sqrt{xy}$，$\because xy\leq\dfrac{\left(x+y\right)^2}{4}$；

$\therefore\left(x+y\right)^2-1\leq\dfrac{3}{4}\left(x+y\right)^2$，$\left(x+y\right)^2\leq 4$，

$\therefore x+y\leq 2$，即 $x+y$ 的最大值为 2。

3. 结语

题目可以千变万化，但很多高考试题都是“题在书外，根在书中”[6] [7]。教师应注重课本中的例题和习题，深入挖掘课本例题和习题中的“新意”[8]，善于从多角度看问题，去发现知识和方法之间的联系，构建较为完善的知识网络图[9]，能够帮助学生跳出题目审视题目，进而让学生能在现有的知识基础上学会发现问题、提出问题、分析问题、解决问题[10]。

基金项目

伊犁师范大学科研项目——基于数学核心素养创新试题的研究(2021YSYB062)。

参考文献

[1] 教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2022 年修订版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
[2] 吕世虎. 高中数学新课程中的向量及其教学[J]. 课程·教材·教法, 2006, 26(1): 47-50.
[3] D·A·约翰逊, W·H·格伦. 向量的基本概念[M]. 北京: 科学出版社, 1986.
[4] 曹才翰, 章建跃. 中学数学教学概论[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2012.
[5] 人民教育出版社, 等. 普通高中教科书数学必修二(2019 年 A 版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.
[6] 柯跃海. 高考数学试题情境的创设实践[J]. 中国考试, 2020(6): 1-9.
[7] 黄光扬. 当前高考命题改革首要关注的若干问题研究[J]. 课程·教材·教法, 2011, 31(6): 9-14.
[8] 吕建强. 新课改背景下高考命题立意的转变[J]. 教育测量与评价, 2009(11): 53-55.
[9] 任子朝, 赵轩. 基于高考评价体系的数学科考试内容改革实施路径[J]. 中国考试, 2019(12): 27-32.
[10] 朱文芳. 数学教育心理学[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2015.