Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 854-861
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134090

带有积分边界条件的分数阶发展方程Mild解的存在性

张　永[1,2]，胡芳芳[1,2]，辛　珍[1,2*]

[1]伊犁师范大学数学与统计学院，新疆 伊宁
[2]伊犁师范大学应用数学研究所，新疆 伊宁

收稿日期：2023年3月17日；录用日期：2023年4月18日；发布日期：2023年4月26日

摘　要

本文利用增算子不动点定理证明了有序Banach空间中带有积分边界条件的分数阶发展方程mild解存在性，并且给出了计算该解的迭代序列，最后举例阐述了所得结论。

关键词

分数阶发展方程，非紧性测度，积分边界条件，增算子，存在性

Existence of Mild Solutions for Fractional Evolution Equations with Integral Boundary Conditions

Yong Zhang[1,2], Fangfang Hu[1,2], Zhen Xin[1,2*]

[1]School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang
[2]Institute of Applied Mathematics, Yili Normal University, Yining Xinjiang

Received: Mar. 17th, 2023; accepted: Apr. 18th, 2023; published: Apr. 26th, 2023

Abstract

In this paper, by using the fixed point theorem of increasing operators, the existence of mild solutions for fractional evolution equations with integral boundary conditions in ordered Banach spaces is proved and gives iterative sequence. Finally, an example is provided to illustrate the ap-

[*]通讯作者。

文章引用: 张永, 胡芳芳, 辛珍. 带有积分边界条件的分数阶发展方程 Mild 解的存在性[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 854-861. DOI: 10.12677/pm.2023.134090

plications of the obtained result.

Keywords

Fractional Evolution Equations, Measure of Noncompactness, Integral Boundary Condition, Increasing Operators, Existence

1. 引言

本文研究了有序 Banach 空间 X 中带积分边界条件的分数阶发展方程

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}x(t)+Ax(t)=f\left(t,x(t)\right),t\in I:=[0,a], \\ x(0)=\int_0^a g\left(s,x(s)\right)\mathrm{d}s \end{cases} \tag{1}$$

mild 解存在性。其中 ${}^{C}D^{\alpha}$ 是 $\alpha(0<\alpha\le 1)$ 阶 Caputo 型分数阶导数；$A:D(A)\subset X\to X$ 是稠定闭线性算子，$-A$ 生成正 C_0-半群 $T(t)(t\ge 0)$，$g,f:I\times X\to X$ 是给定的函数。

分数阶微分方程是整数阶微分方程的推广。除了在数学方面的应用外，它还在流体力学，分数控制系统与分数控制器，各种电子回路，电分析化学，生物系统的电传导等方面有广泛的应用。因此，分数阶问题引起了许多学者的关注。近年来，带有积分边界条件的微分方程已有不少研究成果[1] [2] [3]。问题(1)是含时间 t 的带积分边界条件的分数阶偏微分方程初值问题的抽象模型[4] [5]，这类问题的研究成果较少。在文献[6]中，作者用逐次逼近的方法获得了问题(1)在实 Banach 空间 X 中 mild 解存在的充分条件。在文献[7]中，作者用增算子不动点定理的方法证明了方程

$$x'(t)+Ax(t)=f\left(t,x(t)\right),\ t\in\Re$$

在 Banach 空间 X 中 ω-周期解的存在性，其中要求 $-A$ 生成正 C_0-半群 $T(t)(t\ge 0)$ 为紧半群。随后，在文献[8]中，作者用 Sadovskii 不动点定理证明了初值问题

$$\begin{cases} x'(t)+Ax(t)=f\left(t,x(t)\right),t>0, \\ x(0)=x_0 \end{cases}$$

在 Banach 空间 X 中 mild 解的存在性。

受上述工作的启发，本文在有序 Banach 空间中，用非紧性测度条件代替了文献[7]中的紧半群条件，将文献[8]中的初值条件 $x(0)=x_0$ 演化为非局部条件 $x(0)=\int_0^a g\left(s,x(s)\right)\mathrm{d}s$，利用增算子不动点定理讨论了问题(1) mild 解的存在性。证明了当问题(1)中的非线性项 $f(t,x)$ 和非局部函数 $g(t,x)$ 只需满足容易验证的序条件时，问题(1) mild 解的存在性，并且给出了计算该 mild 解的迭代序列。

2. 预备知识

设 X 为 Banach 空间，其范数为 $\|\cdot\|$，$C(I,X)$ 为定义于 I 取值于 X 的连续函数之集，按范数

$$\|x\|_C=\max_{t\in I}\|x(t)\|$$

构成 Banach 空间。本文记 N 为正整数集。

设 K 为 X 中的闭凸锥，$-A$ 生成的 C_0-半群为正算子半群，即对 $x\geq 0$，有 $T(t)x\geq 0$。不失一般性，设 $\exists M\geq 1$，使得

$$\|T(t)\|\leq M,\ \forall t\geq 0\text{。}$$

下面介绍分数阶微积分的概念：

定义 1. 定义在区间 I 上的函数 f 的 $\alpha(0<\alpha<1)$ 阶分数阶积分定义为

$$I^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-1}}\mathrm{d}s,\ t>0\text{，}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数。

定义 2. 定义在区间 I 上的函数 f 的 $\alpha(0<\alpha<1)$ 阶 Riemann-Liouville 型分数阶导数定义为

$${}^{L}D^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\int_0^t\frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}}\mathrm{d}s,\ t>0\text{，}$$

其中 $\alpha\in(n-1,n]$，$n\in N$。

定义 3. 定义在区间 I 上的函数 f 的 $\alpha(0<\alpha<1)$ 阶 Caputo 型分数阶导数定义为

$${}^{C}D^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t\frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}}\mathrm{d}s=I_t^{n-\alpha}f^{(n)}(t),\ t>0\text{，}$$

其中 $\alpha\in(n-1,n]$，$n\in N$。

注 1：(1) Riemamn-Liouville 型分数阶导数和 Caputo 型分数阶导数有下列关系：

$${}^{C}D^{\alpha}f(t)={}^{L}D^{\alpha}\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}f^{(k)}(0)\right)\text{。}$$

(2) 常数的 Caputo 型导数为 0。

(3) 如果 f 是 X 中的抽象函数，则定义 1，2，3 中的积分为 Bochner 意义下的积分。

首先，对 $\forall h\in C(I,X)$，考虑问题(1)相应的线性问题

$$\begin{cases}{}^{C}D^{\alpha}x(t)+Ax(t)=h(t),t\in I,\\ x(0)=\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s.\end{cases}\tag{2}$$

由定义 1，2，3 可知，问题(2)可化为下列积分方程

$$\begin{cases}x(t)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left[h(s)-Ax(s)\right]\mathrm{d}s,t\in I,\\ x(0)=\displaystyle\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s.\end{cases}$$

与文献[9]中引理 3.1 中的证明方法类似，可以证明下列引理：

引理 1. 设 $x\in C(I,X)$ 是问题(2)的 mild 解，当 x 且仅当满足积分方程

$$x(t)=S_{\alpha}(t)\int_0^a g(s,x(s))\mathrm{d}s+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}T_{\alpha}(t-s)h(s)\mathrm{d}s,\ t\in I\text{，}$$

其中

$$S_{\alpha}(t)=\int_0^{\infty}\xi_{\alpha}(\theta)T(t^{\alpha}\theta)\mathrm{d}\theta\text{，}$$

$$T_\alpha(t)=\alpha\int_0^\infty \theta\xi_\alpha(\theta)T(t^\alpha\theta)\mathrm{d}\theta,\quad \xi_\alpha(\theta)=\frac{1}{\alpha}\theta^{-1-\frac{1}{\alpha}}\varpi_\alpha\left(\theta^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\geq 0,$$

$$\varpi_\alpha(\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{-\alpha n-1}\frac{\Gamma(n\alpha+1)}{n!}\sin(n\pi\alpha),\quad \theta\in(0,\infty),$$

ξ_α 是定义在 $(0,\infty)$ 上的单边概率密度函数，且 $\int_0^\infty \xi_\alpha(\theta)\mathrm{d}\theta=1$， $\theta\in(0,\infty)$。

注 2：由算子半群 $T(t)(t\geq 0)$ 的正性易知，对 $x\geq 0$，有 $S_\alpha(t)x\geq 0$， $T_\alpha(t)x\geq 0$。

引理 2. [9] 对任意给定的 $t\geq 0$， $S_\alpha(t)$， $T_\alpha(t)$ 是有界线性算子，即对 $\forall x\in X$，有

$$\|S_\alpha(t)x\|\leq M\|x\|,\quad \|T_\alpha(t)x\|\leq\frac{\alpha M}{\Gamma(1+\alpha)}\|x\|,$$

其中 $\|T(t)\|\leq M$，$\forall t\geq 0$。

设 $\beta(\cdot)$ 为 X 中的非空有界集的 Kuratowski 非紧性测度，$\beta_C(\cdot)$ 为 $C(I,X)$ 中非空有界集的 Kuratowski 非紧性测度。本文将用到关于非紧性测度的如下重要引理：

引理 3. [10] 设 X 为 Banach 空间，若 $D\subset C(I,X)$ 为有界且等度连续集，则 $\beta(D(t))$ 在 I 上连续，且

$$\beta_C(D)=\max_{t\in I}\beta(D(t))=\beta(D(I))。$$

引理 4. [11] 设 X 为 Banach 空间，$D_0=\{x_n\}\subset C(I,X)$ 为可列集，若存在 $\phi\in L^1(I)$，使得 $\|x_n(t)\|\leq\phi(t)$，$a.e.$，$t\in I$， $n=1,2,\cdots$，则 $\beta(D(t))$ 在 I 上 Lebesgae 可积，且

$$\beta\left(\left\{\int_I x_n(t)\mathrm{d}t\,\middle|\,n\in N\right\}\right)\leq 2\int_I\beta(D_0(t))\mathrm{d}t。$$

引理 5. [7] 设 X 是 Banach 空间， $D\subset C(I,X)$ 有界，则存在可列子集 $D_0\subset D$，使得

$$\beta(D)\leq 2\beta(D_0)。$$

设 X 是 Banach 空间，K 为 X 中的一个锥，则 K 确定了 X 中的一个半序“$\leq$”。下面给出问题(1)上下解的定义：

定义 4. 若 $\exists v_0\in C(I,X)$，满足

$$\begin{cases}{}^C D^\alpha v_0(t)+Av_0(t)\leq f(t,v_0(t)),t\in I,\\ v_0(0)\leq\int_0^a g(s,v_0(s))\mathrm{d}s,\end{cases}$$

则称 v_0 为问题(1)的下解。若 $\exists w_0\in C(I,X)$，满足

$$\begin{cases}{}^C D^q w_0(t)+Aw_0(t)\geq f(t,w_0(t)),t\in I,\\ w_0(0)\geq\int_0^a g(s,w_0(s))\mathrm{d}s\end{cases}$$

则称 w_0 为问题(1)的上解。

本文主要定理的证明基于如下不动点定理：

引理 6. [12] (**增算子不动点定理**) 设 X 是实 Banach 空间，K 是正规锥， $F:[v_0,w_0]\to X$ 是凝聚映射，并且是增算子。又设

$$v_0\leq Fv_0,\ Fw_0\leq w_0,$$

那么 F 在 $[v_0,w_0]$ 中必有最大不动点 $\overline{x}$ 与最小不动点 $\underline{x}$ (即若 x^* 为 F 在 $[v_0,w_0]$ 中的任一不动点，必有 $\underline{x}\leq x^*\leq\overline{x}$)，并且

$$\overline{x}=\lim_{n\to\infty}w_n,\ \underline{x}=\lim_{n\to\infty}v_n,$$

其中 $v_n=Fv_{n-1}$， $w_n=Fw_{n-1}$，满足

$$v_0\le v_1\le\cdots\le v_n\le\cdots\le w_n\le\cdots\le w_1\le w_0。$$

为了证明主要结论，我们给出下列假设：

(P1) 函数 $g:I\times X\to X$ 是连续函数，存在 $M_1>0$，对 $\forall x$， $y\in\left[v_0(t),w_0(t)\right]$，当 $x\le y$ 时，有

$$g(t,y)-g(t,x)\ge -M_1(x-y),\ t\in I。$$

(P2) 函数 $f:I\times X\to X$ 是连续函数，存在 $M_2>0$，对 $\forall x$， $y\in\left[v_0(t),w_0(t)\right]$，当 $x\le y$ 时，有

$$f(t,y)-f(t,x)\ge -M_2(x-y),\ t\in I。$$

(P3) 对 $\forall t\in I$，存在常数 $L_1>0$， $L_2>0$，使得

$$\beta\left(f(t,D)\right)\le L_1\beta(D),\ \beta\left(g(t,D)\right)\le L_2\beta(D),\ t\in I,$$

其中 $D\subset\left[v_0(t),w_0(t)\right]$ 为非空有界集。

注 3：若非线性函数 $f(t,x)$， $g(t,x)$ 满足 Lipschitz 条件，则 $f(t,x)$， $g(t,x)$ 满足条件(P3)。

3. 主要结果及其证明

定理 1. 设 X 是有序 Banach 空间， $K\subset X$ 为正规锥， $-A$ 生成 X 中的正 C_0-半群 $T(t)(t\ge 0)$，若问题(1)存在下解 v_0 和上解 v_0，使得 $v_0(t)\le w_0(t)(t\in I)$，函数 $f(t,x)$， $f(t,x)$ 满足条件(P1)~(P3)，且

$$2aML_2+\frac{2ML_1a^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}<\frac{1}{2},\tag{3}$$

则问题(1)在 $[v_0,w_0]$ 上存在最大 mild 解 $\overline{x}$ 及最小 mild 解 $\underline{x}$，且

$$\overline{x}=\lim_{n\to\infty}w_n,\ \underline{x}=\lim_{n\to\infty}v_n,$$

其中

$$v_n(t)=S_\alpha(t)\int_0^a g\left(s,v_{n-1}(s)\right)\mathrm{d}s+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}T_\alpha(t-s)f\left(s,v_{n-1}(s)\right)\mathrm{d}s,\ t\in I,$$

$$w_n(t)=S_\alpha(t)\int_0^a g\left(s,w_{n-1}(s)\right)\mathrm{d}s+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}T_\alpha(t-s)f\left(s,w_{n-1}(s)\right)\mathrm{d}s,\ t\in I,$$

满足

$$v_0(t)\le v_1(t)\le\cdots\le v_n(t)\le\cdots\le w_n(t)\le\cdots\le w_1(t)\le w_0(t),\ t\in I。$$

证明：定义算子 $F:C(I,X)\to C(I,X)$ 如下：

$$(Fx)(t)=S_\alpha(t)\int_0^a g\left(s,x(s)\right)\mathrm{d}s+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}T_\alpha(t-s)f\left(s,x(s)\right),\ t\in I。$$

记 $D=[v_0,w_0]\subset C(I,X)$。首先证明 F 是增算子。对 $\forall h_1$， $h_2\in D$， $h_1\le h_2$，由条件(P1)，(P2)，有

$$\begin{aligned}&(Fh_2)(t)-(Fh_1)(t)\\&=S_\alpha(t)\int_0^a\left[g(s,h_2)-g(s,h_1)\right]\mathrm{d}s+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}T_\alpha(t-s)\left[f\left(s,h_2(s)\right)-f\left(s,h_1(s)\right)\right]\mathrm{d}s\\&\ge -M_1S_\alpha(t)\int_0^a\left[h_1(s)-h_2(s)\right]\mathrm{d}s-M_2\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}T_\alpha(t-s)\left[h_1(s)-h_2(s)\right]\mathrm{d}s\\&\ge 0,\end{aligned}$$

故 F 是增算子。

接下来证明 $F(D)\subset D$，即证明 $v_0\le F(v_0)$，$w_0\le F(w_0)$。因为 v_0 为问题(1)的下解，由定义 4 知，${}^{C}D^{\alpha}v_0(t)+Av_0(t)\le f(t,v_0(t))$，$t\in I$。记上式的左端为 $y(t)$，则由线性方程解的表示，有

$$\begin{aligned}v_0(t)&=S_\alpha(t)\int_0^a g(s,v_0(s))\mathrm{d}s+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}T_\alpha(t-s)y(s)\mathrm{d}s\\&\le S_\alpha(t)\int_0^a g(s,v_0(s))\mathrm{d}s+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}T_\alpha(t-s)f(s,v_0(s))\mathrm{d}s\\&=F(v_0(t)).\end{aligned}$$

故 $v_0\le F(v_0)$，同理可证明 $w_0\le F(w_0)$。

最后证明 $F:D\to D$ 是凝聚映射。因为 $D\subset C(I,X)$ 为非空有界集，由引理 5，存在 $D_0=\{x_n\in C(I,X)|n\in N\}\subset D$ 为可列集，使得

$$\beta(D)\le 2\beta(D_0)。$$

进而，由引理 4 及条件(P3)，有

$$\begin{aligned}0&\le\beta(F(D_0(t)))\\&=\beta\left(\left\{S_\alpha(t)\int_0^a g(s,x_n(s))\mathrm{d}s+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}T_\alpha(t-s)f(s,x_n(s))\mathrm{d}s\middle|n\in N\right\}\right)\\&=\beta\left(\left\{S_\alpha(t)\int_0^a g(s,x_n(s))\mathrm{d}s\middle|n\in N\right\}\right)+\beta\left(\left\{\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}T_\alpha(t-s)f(s,x_n(s))\mathrm{d}s\middle|n\in N\right\}\right)\\&\le M\beta\left(\left\{\int_0^a g(s,x_n(s))\mathrm{d}s\middle|n\in N\right\}\right)+\frac{\alpha M}{\Gamma(1+\alpha)}\beta\left(\left\{\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x_n(s))\mathrm{d}s\middle|n\in N\right\}\right)\\&\le 2M\int_0^a\beta(g(s,D_0(s)))\mathrm{d}s+\frac{2\alpha M}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\beta(f(s,D_0(s)))\mathrm{d}s\\&\le 2ML_2\int_0^a\beta(D_0(s))\mathrm{d}s+\frac{2\alpha ML_1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\beta(D_0(s))\mathrm{d}s\\&\le 2aML_2\beta(D)+\frac{2ML_1a^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\beta(D).\end{aligned}$$

所以，由引理 4 可知，

$$\begin{aligned}\beta_C(F(D))&=\max_{t\in I}\beta(F(D(t)))\\&\le 2\max_{t\in I}\beta(F(D_0(t)))\\&\le 2\left(2aML_2+\frac{2ML_1a^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\beta_C(D).\end{aligned}$$

因此，由(3)式可知，$\beta_C(F(D))<\beta_C(D)$。所以，$F:D\to D$ 是凝聚映射。故由引理 6 可知，算子 F 在 $[v_0,w_0]$ 上存在最大不动点 $\overline{x}$ 和最小不动点 $\underline{x}$。易知 $\overline{x}$，$\underline{x}$ 分别为问题(1)在 $[v_0,w_0]$ 中的最大 mild 解和最小 mild 解。证毕。

定理 2. 设 K 为 X 中的正则锥，$-A$ 生成 X 中的正 C_0-半群 $T(t)(t\ge 0)$，若问题(1)存在下解 v_0 和上解 w_0，使得 $v_0(t)\le w_0(t)(t\in I)$，函数 $f(t,x)$，$g(t,x)$ 满足条件(P1)，(P2)，则问题(1)在 $[v_0,w_0]$ 上存在最大 mild 解 $\overline{x}$ 及最小 mild 解 $\underline{x}$，且

$$\overline{x}=\lim_{n\to\infty}w_n,\ \underline{x}=\lim_{n\to\infty}v_n,$$

其中 $v_n(t)=(Fv_{n-1})(t)$，$w_n(t)=(Fw_{n-1})(t)$，满足

$$v_0(t)\le v_1(t)\le\cdots\le v_n(t)\le\cdots\le w_n(t)\le\cdots\le w_1(t)\le w_0(t),\ t\in I\ 。$$

证明：设 F 为定理 1 中定义的算子，由于条件(P1)，(P2)，成立，则按照定理 1 的证明可知，F 为连续的增算子，且有 $v_0\le F(v_0)$，$(Fw_0)\le w_0$ 成立。作迭代 $v_n(t)=(Fv_{n-1})(t)$，$w_n(t)=(Fw_{n-1})(t)$，由于 F 是增算子，则有

$$v_0(t)\le v_1(t)\le\cdots\le v_n(t)\le\cdots\le w_n(t)\le\cdots\le w_1(t)\le w_0(t),\ t\in I\ 。$$

故序列 $\{v_n(t)\}$，$\{w_n(t)\}$ 为 X 中的单调序列。按锥 K 的正则性可知，

$$\overline{x}=\lim_{n\to\infty}w_n,\ \underline{x}=\lim_{n\to\infty}v_n\ 。$$

在 $v_n=Fv_{n-1}$，$w_n=Fw_{n-1}$，两边取极限，注意到 F 的连续性可知，$F\overline{x}=\overline{x}$，$F\underline{x}=\underline{x}$。证毕。

注 4：当 $A\equiv 0$ 时，$T(t)\equiv I$。问题(1)退化为 Banach 空间中的常微分方程，故本文的结论是带积分边界条件的分数阶常微分方程的推广。

4. 应用

例 考虑如下带积分边界条件的分数阶偏微分方程

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\frac{1}{4}}x(t,u)-\dfrac{\partial^2 x(t,u)}{\partial u^2}=\varphi(t)\sin\left(x(t,u)\right),u\in\Omega,t\in I \\ x|_{\partial\Omega}=0 \\ x(0,u)=\int_0^a\psi(s)\cos\left(x(s,u)\right)\mathrm{d}s,u\in\Omega \end{cases}\tag{4}$$

mild 解存在性，其中 ${}^{C}D^{\frac{1}{4}}$ 是 $\alpha=\dfrac{1}{4}$ 阶 Caputo 型分数阶导数，$I:=[0,1]$，$\varphi(t)$，$\psi(t)\in C^+(I,\Re)$，$\Omega\subset\Re^n(n\in N)$ 为边界 $\partial\Omega$ 充分光滑的有界区域。

定理 3. 若问题(4)存在下解 v_0 和上解 w_0，则问题(4)在 $[v_0,w_0]$ 上存在最大 mild 解 $\overline{x}$ 及最小 mild 解 $\underline{x}$。

证明：设 $X=L^2(\Omega)$，$K=\left\{x\in X\,\middle|\,\|x\|_2\ge 0\right\}$，则 K 为 X 中的正规锥。作 X 中的算子 A：

$$(Ax)(t)=-x''(t),\ t\in I,\ D(A)=\left\{x\in X\,\middle|\,x|_{\partial\Omega}=0,\ x',x''\in X\right\},$$

按文献[13]，$-A$ 生成 X 中的解析半群 $T(t)(t\ge 0)$。设 $x(t)=x(t,\cdot)$，$f(t,x(t)):=\varphi(t)\sin\left(x(t,u)\right)$，$g(t,x(t)):=\psi(t)\cos\left(x(t,u)\right)$，这样问题(4)可化为形如问题(1)的分数阶发展方程。由抛物型方程的极大值原理易知，$T(t)(t\ge 0)$ 为正 C_0-半群。下面验证非线性函数满足 Lipschitz 条件。对 $\forall t\in I$，$u\in\Omega$，y，$x\in X$，满足 $0<y-x<\pi$，有

$$\begin{aligned}\left\|\varphi(t)\sin\left(y(t,u)\right)-\varphi(t)\sin\left(x(t,u)\right)\right\| &= 2\varphi(t)\left\|\cos\frac{\left(y(t,u)+x(t,u)\right)}{2}\right\|\left\|\sin\frac{\left(y(t,u)-x(t,u)\right)}{2}\right\| \\ &\le 2\varphi(t)\frac{\left\|\left(y(t,u)-x(t,u)\right)\right\|}{2} \\ &\le R_1\left\|\left(y(t,u)-x(t,u)\right)\right\|,\end{aligned}$$

其中 $R_1:=\sup\limits_{t\in I}\varphi(t)$。故非线性函数 $f(t,x)$ 满足 Lipschitz 条件。类似地，可以验证存在 $R_2:=\sup\limits_{t\in I}\psi(t)$ 使得 $f(t,x)$ 亦满足 Lipschitz 条件。从而，条件(P1)~(P3)成立，其中

$$\alpha=\frac{1}{4},\ M_1=L_1=R_1,\ M_2=L_2=R_2,\ a=1,\ M=1,$$

使得当 $R_2 + R_1 < \frac{1}{4}$ 时，(3)式成立。由定理 1 可知，问题(4)在 $[v_0, w_0]$ 上存在最大 mild 解 $\overline{x}$ 及最小 mild 解 $\underline{x}$ 。证毕。

基金项目

伊犁师范大学校级资助项目(2021YSYB078)。

参考文献

[1] 张立新，王海菊. 含积分边界条件的分数阶微分方程边值问题的正解的存在性[J]. 纯粹数学与应用数学，2013, 29(5): 450-457.

[2] 张立新. 一类含积分边界条件的分数阶微分方程的正解的存在性[J]. 应用数学学报, 2015, 38(3): 421-433.

[3] 安佳辉，高亚兵，陈鹏玉. 具有非局部积分边界条件的完全二阶边值问题解的存在性[J]. 南昌大学学报(理科版), 2018, 42(2): 108-114.

[4] 杜鹃，崔明根. 再生核空间中求解带有积分边界条件的半线性热传导[J]. 数学物理学报, 2010, 30A(1): 245-257.

[5] 庞凤琴. 一类具有时间积分边界条件的反应扩散方程组解的性质[J]. 绵阳师范学院学报, 2015, 34(11): 21-25.

[6] Chen, P.Y., Zhang, X.P. and Li, Y.X. (2017) Approximation Technique for Fractional Evolution Equations with Nonlocal Integral Conditions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **14**, Article No. 226. https://doi.org/10.1007/s00009-017-1029-0

[7] 李永祥. Banach 空间半线性方程的周期解[J]. 数学学报, 1998, 41(3): 629-636.

[8] 李永祥. 抽象半线性发展方程初值问题解的存在性[J]. 数学学报, 2005, 48(6): 1089-1094.

[9] Zhou, Y. and Jiao, F. (2010) Existence of Mild Solutions for Fractional Neutral Evolution Equations. *Computers & Mathematics with Applications*, **59**, 1063-1077. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.06.026

[10] Banas, J. and Goebel, K. (1980) Measures of Noncompactness in Banach Spaces. Marcel Dekker, Inc., New York.

[11] Heinz, H.P. (1983) On the Behaviour of Measures of Noncompactness with Respect to Differentiation and Integration of Vector-Valued Functions. *Nonlinear Analysis*, **7**, 1351-1371. https://doi.org/10.1016/0362-546X(83)90006-8

[12] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 第二版. 济南: 山东科技出版社, 2001.

[13] Fatima, Z.M. and Fu, X.L. (2014) Approximate Controllability of Semi-Linear Neutral Integro-Differential Systems with Finte Delay. *Applied Mathematics and Computation*, **242**, 202-215. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.05.055