Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 1062-1072
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134112

球空间中具有拟平行第二基本形式的超曲面

苏 峰

云南师范大学数学学院，云南 昆明

收稿日期：2023年3月20日；录用日期：2023年4月21日；发布日期：2023年4月28日

摘 要

设$x: M^n \to S^{n+1}$为黎曼流形到单位球空间中等距浸入，g和B分别为x的莫比乌斯度量和莫比乌斯第二基本形式，R 为g诱导的曲率张量．本文研究满足条件$RB = 0$的超曲面，获得了几个初步的结果．

关键词

几何，超曲面，拟平行，第二基本形式，Möbius形式

Hypersurfaces with Quasi-Parallel Second Basic Form in Spherical Space

Feng Su

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: Mar. 20^{th}, 2023; accepted: Apr. 21^{st}, 2023; published: Apr. 28^{th}, 2023

Abstract

Let $x : M^n \to S^{n+1}$ be isometri immersion of Riemannian manifold into unit sphere space, and g and B be Mobius metric and Mobius second fundamental form of x

文章引用: 苏峰. 球空间中具有拟平行第二基本形式的超曲面[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 1062-1072.
DOI: 10.12677/pm.2023.134112

respectively R is a curvature tensor induced by g. In this paper, we study the hypersurface operator satisfying the condition $RB=0$, and obtain some preliminary results.

Keywords

Möbius Geometry, Hypersurface, Quasi-Parallel, Möbius Second Fundamental Form, Möbius Form

1. 引言及主要结果

Möbius几何是球面上在Möbius变换群下子流形的共性几何, 对Möbius不变量加上不同的限制条件, 就会得到不同的有意义的研究方向. 最近, 胡泽军率先提出并研究了拟平行子流形并获得了有趣的结果, 例如$B^{\alpha}_{ij,kl}=B^{\alpha}_{ij,lk}$;$C^{\alpha}_{i,j}=C^{\alpha}_{j,i}$. 受其启发, 本文是在Möbius 第二基本形式B拟平行的基础上做研究. 先简单介绍一下拟平行: 设∇ 是由Möbius 度量g 所诱导的联络, 曲率算子是R. 设X,Y,Z 为子流形上的光滑向量场. 则有$R(X,Y)=-\nabla_X\nabla_Y+\nabla_Y\nabla_X+\nabla_{[X,Y]}$, 如果$R(X,Y)B=0$, 则称Möbius第二基本形式$B$是拟平行的. 本文进一步研究了拟平行超曲面的一些几何性质, 获得了下列几个初步的结果.

定理1.1 球S^{n+1} 中的拟平行超曲面M^n, 如果Möbius形式Φ平行, 则超曲面M^n局部Möbius 等价于下列超曲面之一:

(i) 环面$S^k(a)\times S^{n-k}\left(\sqrt{1-a^2}\right)$, 其中$1\le k\le n-1$;

(ii) R^{n+1}中的标准柱面$S^k(a)\times R^{n-k}$在映射σ 下的像,其中$1\le k\le n-1$;

(iii) H^{n+1} 中的标准柱面$S^k(a)\times H^{n-k}\left(\sqrt{1+a^2}\right)$ 在映射τ 下的像,其中$1\le k\le n-2$;

(iv) 超曲面$CSS(p,q,a)$.

其中空间、映射、CSS的定义详见预备知识.

定理1.2 S^{n+1}中的紧超曲面M^n, 若Möbius第二基本形式B是拟平行的, 则有下式成立:

$$n(n-1)\int_M|\Phi|^2\,dM=\int_M|\nabla B|^2\,dM.$$

定理1.3 S^{n+1}中的紧超曲面M^n, 若$A=\lambda g$, $\lambda\in C^{\infty}(M)$, 且Möbius第二基本形式B拟平行, 则

有以下不等式成立.

$$\frac{1}{n}\int_M(\triangle\lambda)^2\,dM\geq\int_M 2\left(\lambda-\frac{1}{2n}\right)|\nabla\lambda|^2\,dM.$$

本文的结构安排

本文分为四个部分，第一部分为引言和主要定理，这部分主要介绍了目前Möbius几何研究热点，同时给出了本文的研究目的和结果;第二部分为预备知识，这部分定义了Möbius第二基本形式拟平行，并得到一个关键命题.第三部分主要介绍了拟平行的概念和引用的定理. 第四部分为主要定理的证明，这部分通过对已有的两个结果($B^{\alpha}_{ij,kl}=B^{\alpha}_{ij,lk};C^{\alpha}_{i,j}=C^{\alpha}_{j,i}$) 加以利用，并得到进一步的结果.

2. 预备知识

王长平在1998年建立了球空间中子流形的光锥模型和莫比乌斯完全不变量系统, 本文沿用其中的公式与记号, 细节详见文献 [1].

我们首先定义S^{m+p}中Möbius不变量并且给出结构方程.

设R^{m+p+2}_1是Lorentz空间, 则其Lorentz内积定义为：

$$\langle x,\xi\rangle=-x_0\xi_0+x_1\xi_1+x_2\xi_2+\cdots+x_{m+p+1}\xi_{m+p+1}$$

其中$x=(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{m+p+1})\,;\xi=(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{m+p+1})$,

设$x:M^m\to S^{m+p}\subset R^{m+p+1}$是$S^{m+p}$中的无脐浸入子流形. 将$x$的Möbius位置向量$X:M^m\to R^{m+2}_1$如下：

$$X=\rho\,(1,x):M^m\to R^{m+2}_1,\rho^2=\frac{m}{m-1}\left(\|II\|-mH^2\right)>0.$$

定理2.1 若两个子流形$x,\tilde{x}:M^m\to S^{m+p}$是Möbius等价的, 当且仅当存在$R^{m+p+1}_1$ 中的Lorentz变换$T\in O\,(m+p+1,1)$, 使得$X=\widetilde{X}T$.

其中$O\,(m+p+1,1)$是R^{m+p+2}_1中保持内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$不变的Lorentz 群, 因为$S^{m+p}$ 中的Möbius群等距于$O\,(m+p+1,1)$ 的保持正光锥的子群$O^+\,(m+p+1,1)$, 可得

$$g=\langle dX,dX\rangle=\rho^2dx\cdot dx, \tag{2.1}$$

是Möbius不变量, 我们将g称为Möbius度量或者Möbius第一基本形式. 设$\triangle$ 为(M,g)的Laplace算子, 故有

$$\langle\triangle X,\triangle X\rangle=1+m^2k,$$

其中k为度量g的纯量曲率.

设$\{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$是$(M, g)$ 的一个局部标准正交基, $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$为其对偶基. 并且$E_i(X) = X_i$, 那么有:

$$\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}, 1 \le i, j \le m,$$

定义

$$N = -\frac{1}{m} \triangle X - \frac{1}{2m^2} \langle \triangle X, \triangle X \rangle X, \tag{2.2}$$

那么有

$$\langle X, X \rangle = \langle N, N \rangle = 0, \langle X, N \rangle = 1, \langle X_i, X \rangle = 0, (1 \le i, j \le m). \tag{2.3}$$

且

$$\langle X, dX \rangle = 0, \langle \triangle X, X \rangle = -m, \langle \triangle X, X_k \rangle = 0, 1 \le k \le m. \tag{2.4}$$

因此

$$span\{N, X\} \perp span\{X_1, X_2, \ldots, X_m\},$$

定义

$$V = \{span\{N, X\} \oplus span\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}\}^{\perp}, \tag{2.5}$$

令V是子空间$span\{X, N, X_1, X_2, \ldots, X_m\}$在$R_1^{m+p+2}$中的正交补空间, 可以得到下面正交分解.

$$R_1^{m+p+2} = span\{X, N\} \oplus span\{X_1, X_2, \ldots, X_m\} \oplus V, \tag{2.6}$$

我们对本文指标有如下规定: $1 \le i, j, k, \cdots \le m; m+1 \le \alpha \le m+p$, 我们还按照爱因斯坦约定默认重复指标表示在各自范围内求和. 称V是$x : M^m \to S^{m+p}$的Möbius法丛. 取法丛V沿M^m的一个局部标准正交基为$\{E_{m+1}, \ldots, E_{m+p}\}$.

那么$\{X, N, X_1, \ldots, X_m, E_{m+1}, \ldots, E_{m+p}\}$ 构成R^{m+p+2}沿M^m 的活动标架. 其结构方程如下:

$$dX = \sum_i \omega_i X_i, \tag{2.7}$$

$$dN = \sum_{i,j} A_{ij} \omega_j X_i + \sum_{i,\alpha} C_i^{\alpha} \omega_i E_{\alpha}, \tag{2.8}$$

$$dX_i = -\sum_j A_{ij} \omega_j X - \omega_i N + \sum_j \omega_{ij} X_j + \sum_{i,\alpha} B_{ij}^{\alpha} \omega_j E_{\alpha}, \tag{2.9}$$

$$dE_\alpha = -\sum_i C_i^\alpha \omega_i X - \sum_{i,j} B_{ij}^\alpha \omega_j X_i + \sum_\beta \omega_{\alpha\beta} E_\beta, \tag{2.10}$$

其中$\{\omega_{ij}\}$是Möbius度量g的联络形式，$\{\omega_{\alpha\beta}\}$ 是M^m上的法联络，且有$A_{ij}=A_{ji}, B_{ij}^\alpha = B_{ji}^\alpha$. 进而得

$$A = \sum_{i,j} A_{ij}\omega_i \otimes \omega_j, \tag{2.11}$$

$$B = \sum_{i,j,\alpha} B_{ij}^\alpha \omega_i \otimes \omega_j E_\alpha, \tag{2.12}$$

$$\Phi = \sum_{i,\alpha} C_i^\alpha \omega_i E_\alpha, \tag{2.13}$$

都是Möbius不变量；分别称A为x的Blaschke张量，B为x的Möbius第二基本形式，Φ为x 的Möbius形式.

分别定义$C_i^\alpha, A_{ij}, B_{ij}^\alpha$的一阶协变导数如下

$$\sum_j C_{i,j}^\alpha \omega_j = dC_i^\alpha + \sum_j C_j^\alpha \omega_{ji} + \sum_\beta C_i^\beta \omega_{\beta\alpha}, \tag{2.14}$$

$$\sum_k A_{ij,k} = dA_{ij} + \sum A_{ik}\omega_{kj} + \sum_k A_{kj}\omega_{ki}, \tag{2.15}$$

$$\sum B_{ij,k}^\alpha \omega_k = dB_{ij} + \sum_k B_{ik}^\alpha \omega_{kj} + \sum_k B_{kj}^\alpha \omega_{ki} + \sum_\beta B_{ij}^\beta \omega_{\beta\alpha}, \tag{2.16}$$

而且

$$d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik}\wedge\omega_{kj} = -\frac{1}{2}R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l, R_{ijkl} = -R_{ijlk}, \tag{2.17}$$

那么可得结构方程的可积条件为

$$A_{ij,k} - A_{ik,j} = B_{ik}^\alpha C_j^\alpha - B_{ij}^\alpha C_k^\alpha, \tag{2.18}$$

$$C_{i,j}^\alpha - C_{j,i}^\alpha = B_{ik}^\alpha A_{kj} - B_{kj}^\alpha A_{ki}, \tag{2.19}$$

$$B_{ij,k}^\alpha - B_{ik,j}^\alpha = \delta_{ij}C_k^\alpha - \delta_{ik}C_j^\alpha, \tag{2.20}$$

$$R_{ijkl} = \sum_\alpha \left(B_{ik}^\alpha B_{jl}^\alpha - B_{il}^\alpha B_{jk}^\alpha\right) + \left(\delta_{ik}A_{jl} + \delta_{jl}A_{ik} - \delta_{il}A_{jk} - \delta_{jk}A_{il}\right), \tag{2.21}$$

$$tr\,(A) = \frac{1}{2m}\left(1 + \frac{m}{m-1}R\right), \sum_i B_{ii}^\alpha = 0. \tag{2.22}$$

其中是$\{A_{ij,k}\}$，$\{B^{\alpha}_{ij,k}\}$和$\{C^{\alpha}_{i,j}\}$是A,B 和Φ关于g 诱导的联络的协变导数再标准基下的分量.

$i=j$求和得

$$-\sum B^{\alpha}_{ij,i}=(m-1)\,C^{\alpha}_{j}, \tag{2.23}$$

$i=k$求和得

$$\sum_{ij}\left(B^{\alpha}_{ij}\right)^{2}=\frac{m-1}{m}, \tag{2.24}$$

定义A_{ij}和B_{ij}的二阶协变导数

$$\sum_{l}A_{ij,kl}\omega_{l}=dA_{ij,k}+\sum_{l}A_{lj,k}\omega_{li}+\sum_{l}A_{il,k}\omega_{lj}+\sum A_{ij,l}\omega_{lk}, \tag{2.25}$$

$$\sum_{l}B^{\alpha}_{ij,kl}\omega_{l}=dB^{\alpha}_{ij,k}+\sum_{l}B^{\alpha}_{lj,k}\omega_{li}+\sum_{l}B^{\alpha}_{il,k}\omega_{lj}+\sum_{l}B^{\alpha}_{ij,l}\omega_{lk}+\sum_{\beta}B^{\beta}_{ij,k}\omega_{\beta\alpha}, \tag{2.26}$$

3. 拟平行的概念

定义3.1 设(M^n,g)是一个黎曼流形, ∇和R分别为度量g所诱导的联络和曲率张量. 如果一个张量T 满足$RT=0$, 那么则称张量T是拟平行的.
设X, Y, Z是M^n上的光滑向量场, 其中

$$R\,(X,Y)\,Z=-\left(\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]}\right)Z, \tag{3.1}$$

T为二阶协变张量场, 则将RT定义为

$$(R\,(X,Y)\,T)\,(Z,W):=R\,(X,Y)\,(T\,(Z,W))-T\,(R\,(X,Y)\,Z,W)-T\,(Z,R\,(X,Y)\,W)\,. \tag{3.2}$$

命题3.2 二阶协变张量T拟平行当且仅当

$$T\,(R\,(X,Y)\,Z,W)+T\,(Z,R\,(X,Y)\,W)=0.$$

证 对$\forall f\in C^{\infty}(M)$, 有$\nabla_X f=X\,(f)$. 则

$$(\nabla_X\nabla_Y)\,f=\nabla_X\,(\nabla_Y f)=\nabla_X\,(Y\,(f))=X\,(Y\,(f))\,, \tag{3.3}$$

同时由(3.1), 有

$$\begin{aligned}R\,(X,Y)\,(f)&=-\left(\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]}\right)(f)\\&=-\left(X\circ Y-Y\circ X-[X,Y]\right)(f)\\&=0.\end{aligned} \tag{3.4}$$

由此证明了当T为二阶协变张量时, 由于$T(Z,W)$为光滑函数, 有

$$R(X,Y)(T(Z,W))=0, \tag{3.5}$$

所以由定义3.1知, 二阶协变张量T拟平行当且仅当

$$0=(R(X,Y)T)(Z,W)=-T(R(X,Y)Z,W)-T(Z,R(X,Y)W). \tag{3.6}$$

即$T(R(X,Y)Z,W)+T(Z,R(X,Y)W)=0$, 命题成立.

设$\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$是(M^n,g) 的一个局部标准正交基, $\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$为其对偶基. 则

$$R(e_i,e_j)e_k=R_{ijkl}e_l, \tag{3.7}$$

故命题3.2可写成二阶协变张量T拟平行当且仅当

$$R_{ijkm}T_{ml}+R_{ijlm}T_{mk}=0. \tag{3.8}$$

定义3.3 设$x:M^n\to S^{n+1}$为等距浸入, g和B分别为x的Möbius度量和Möbius 第二基本形式. 如果B关于g诱导的联络是拟平行的, 则称x为Möbius拟平行超曲面, 或M-拟平行超曲面.

在2004年, 胡泽军和李海中在文献 [3]中有如下分类定理：

定理3.4 设$x:M^n\to S^{n+1}\,(n\geq 2)$是具有平行Möbius第二基本形式的无脐浸入超曲面. 那么M^n局部Möbius等价下列超曲面之一：

(i) 环面$S^k(a)\times S^{n-k}\left(\sqrt{1-a^2}\right)$, 其中$1\leq k\leq n-1$;

(ii) R^{n+1}中的标准柱面$S^k(a)\times R^{n-k}$在映射σ 下的像,其中$1\leq k\leq n-1$;

(iii) H^{n+1} 中的标准柱面$S^k(a)\times H^{n-k}\left(\sqrt{1+a^2}\right)$ 在映射τ 下的像,其中$1\leq k\leq n-2$;

(iv) 由例1给出的超曲面$CSS(p,q,a)$.

其中H^{n+1}是$n+1$维双曲空间,定义为

$$H^{n+1}=\left\{(y_0,y_1)\in R^+\times R^{n+1}\mid -y_0^2+y_1\cdot y_1=-1\right\},$$

$\sigma:R^{n+1}\to S^{n+1}$是球极投影的逆, 定义为

$$\sigma(u)=\left(\frac{1-|u|^2}{1+|u|^2},\frac{2u}{1+|u|^2}\right),u\in R^{n+1},$$

$\tau:H^{n+1}\to S^{n+1}$是共性映射,定义为

$$\tau(y_0,y_1)=\left(\frac{1}{y_0},\frac{y_1}{y_0}\right),(y_0,y_1)\in H^{n+1}.$$

例1 $CSS(p,q,a)$

对给定的自然数$p,q,p+q<n$, 及实数$a\in(0,1)$和$b=\sqrt{1-a^2}$, 考虑扭曲乘积嵌入超曲面$u:S^p(a)\times S^q(b)\times R^{n-p-q-1}\to R^{n+1}$:

$$u=(tu',tu'',u'''),u'\in S^p(a),u''\in S^q(b),t\in R^+,u'''\in R^{n-p-q-1},$$

令

$$x=\sigma\circ u:S^p(a)\times S^q(b)\times R^+\times R^{n-p-q-1}\to S^{n+1},$$

定义

$$CSS(p,q,a)=x\left(u:S^p(a)\times S^q(b)\times R^+\times R^{n-p-q-1}\right).$$

它是S^{n+1}中的超曲面.

4. 主要定理的证明

定理1.1证 由文献 [1]知

$$|B|^2=\frac{n-1}{n},$$

进而考虑$\triangle|B|^2$得

$$\begin{aligned}0&=\frac{1}{2}\triangle|B|^2\\&=\frac{1}{2}\triangle\sum_{i,j}(B_{ij})^2\\&=\sum_k\left(\sum_{i,j}B_{ij}B_{ij}\right)_k\\&=\sum_{i,j,k}(B_{ij,k})^2+\sum_{i,j,k}B_{ij}B_{ij,kk}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

将$B_{ij,kk}$写为

$$B_{ij,kk}=(B_{ij,kk}-B_{ik,jk})+(B_{ki,jk}-B_{ki,kj})+(B_{ki,kj}-B_{kk,ij})+B_{kk,ij}.\tag{4.2}$$

对可积条件$B_{ij,k}-B_{ik,j}=\delta_{ij}C_k-\delta_{ik}C_j$求导可得

$$B_{ij,kk}-B_{ik,jk}=\delta_{ij}C_{k,k}-\delta_{ik}C_{j,k},\tag{4.3}$$

由超曲面M^n拟平行, 胡泽军证明了$B_{ij,kl} = B_{ij,lk}$, 再将之与(3.3)一同代入(3.2) 可得

$$B_{ij,kk} = (\delta_{ij}C_{k,k} - \delta_{ik}C_{j,k}) + 0 + (\delta_{ki}C_{k,j} - \delta_{kk}C_{i,j}) + B_{kk,ij}, \tag{4.4}$$

再将(3.4)对k求和得

$$\sum_k B_{ij,kk} = \delta_{ij}\sum_k C_{k,k} - C_{j,i} + C_{i,j} - nC_{i,j} \tag{4.5}$$

由超曲面M^n拟平行, 胡泽军证明了$C_{i,j} = C_{j,i}$, (3.5)可化为

$$\sum_k B_{ij,kk} = \delta_{ij}\sum_k C_{k,k} - nC_{i,j}. \tag{4.6}$$

可计算

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k} B_{ij}B_{ij,kk} &= \sum_{i,j,k} B_{ij}\left(\delta_{ij}C_{k,k} - nC_{i,j}\right)\\ &= -\sum_{i,j} nB_{ij}C_{i,j}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

最后将$|\nabla B|^2 = \sum_{i,j,k}(B_{ij,k})^2$及(3.7)代入(3.1)有

$$\begin{aligned}|\nabla B|^2 &= -\sum_{i,j,k} B_{ij}B_{ij,kk}\\ &= \sum_{i,j} nB_{ij}C_{i,j}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

由于子流形M^n的Möbius形式Φ平行($\nabla\Phi = 0$), 即$C^{\alpha}_{i,j} = 0$, 所以由(3.8) 最终可以证得$\nabla B = 0$, 即B平行. 则根据定理2.4可知, 定理1.1成立.

定理1.2的证明

证 进一步, 若超曲面M^n是紧的, 则可对(3.8)在超曲面M^n上积分, 有

$$\int_M |\nabla B|^2 dM = n\int_M \sum_{i,j} B_{ij}C_{i,j}dM, \tag{4.9}$$

利用分部积分, 可得

$$\int_M |\nabla B|^2 dM = n\int_M \sum_{i,j}\left[(B_{ij}\cdot C_i)_j - B_{ij,j}C_i\right] dM, \tag{4.10}$$

由散度定理可得

$$\int_M |\nabla B|^2 dM = -n\int_M \sum_{i,j} B_{ij,j}C_i dM, \tag{4.11}$$

将(2.1.23)式代入(3.0.30)得到

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla B|^2 dM &= n(n-1)\int_M C_i^2 dM \\ &= n(n-1)\int_M |\Phi|^2 dM. \qquad (4.12)\end{aligned}$$

由此证明了定理1.2成立.

定理1.3的证明

证 Blaschke张量迷向的相关概念可参考文献 [2]. 这里我们考虑计算$\frac{1}{2}\triangle|\nabla\lambda|^2$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle|\nabla\lambda|^2 &= \sum_{i,j}\left(\lambda_{i,j}^2+\lambda_i\lambda_{i,jj}\right) \\ &= \sum_{i,j}\left(\lambda_{i,j}^2+\lambda_i\lambda_{j,ij}\right) \qquad (4.13)\end{aligned}$$

由Ricci恒等式可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle|\nabla\lambda|^2 &= \sum_{i,j}\lambda_{i,j}^2+\sum_{i,j,m}\lambda_i\left(\lambda_{j,ji}+\lambda_m R_{mjij}\right) \\ &= \sum_{i,j}\lambda_{i,j}^2+\sum_i\lambda_i(\triangle\lambda)_i+\sum_{i,m}\lambda_i\lambda_m R_{im}, \qquad (4.14)\end{aligned}$$

由文献 [1]知, $R_{ij}=-\sum_k B_{ik}B_{kj}+tr(A)\delta_{ij}+(n-2)A_{ij}$, 将之代入(3.14) 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle|\nabla\lambda|^2 &= \sum_{i,j}\lambda_{i,j}^2+\sum_i\lambda_i(\triangle\lambda)_i+\sum_{i,m}\lambda_i\lambda_m\left(-\sum_k B_{ik}B_{km}+tr(A)\delta_{im}+(n-2)A_{im}\right) \\ &= \sum_{i,j}\lambda_{i,j}^2+\sum_i\lambda_i(\triangle\lambda)_i+\sum_{i,m}\lambda_i\lambda_m\left(-\sum_k B_{ik}B_{km}+n\lambda\delta_{im}+(n-2)\lambda\delta_{im}\right) \\ &= \sum_{i,j}\lambda_{i,j}^2+\sum_i\lambda_i(\triangle\lambda)_i-\sum_{i,m}\lambda_i\lambda_m B_{ik}B_{km}+2(n-1)|\nabla\lambda|^2\lambda, \qquad (4.15)\end{aligned}$$

由$\sum_{i,j}\lambda_{i,j}^2\geq\sum_i\lambda_{i,i}^2$, 再由柯西—施瓦茨不等式有$\sum_i\lambda_{i,i}^2\geq\frac{1}{n}\left(\sum_i\lambda_{i,i}\right)^2$, 故(3.15)可放缩为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle|\nabla\lambda|^2 &\geq \frac{1}{n}\left(\sum_i\lambda_{i,i}\right)^2+\sum_i\lambda_i(\triangle\lambda)_i-\sum_{i,m}\lambda_i\lambda_m B_{ik}B_{km}+2(n-1)|\nabla\lambda|^2\lambda \\ &= \frac{1}{n}(\triangle\lambda)^2+\sum_i\lambda_i(\triangle\lambda)_i-\sum_k\left(\sum_i B_{ik}\lambda_i\right)^2+2(n-1)|\nabla\lambda|^2\lambda, \qquad (4.16)\end{aligned}$$

由于$\sum_k\left[\sum_i\left(B_{ik}\right)^2\cdot\sum_i\left(\lambda_i\right)^2\right]\geq\sum_k\left(\sum_i B_{ik}\lambda_i\right)^2$, 则可继续放缩

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle\left|\nabla\lambda\right|^2&\geq\frac{1}{n}\left(\triangle\lambda\right)^2+\sum_i\lambda_i\left(\triangle\lambda\right)_i+2\left(n-1\right)\lambda\left|\nabla\lambda\right|^2-\sum_k\left[\sum_i\left(B_{ik}\right)^2\cdot\sum_i\left(\lambda_i\right)^2\right]\\&=\frac{1}{n}\left(\triangle\lambda\right)^2+\sum_i\lambda_i\left(\triangle\lambda\right)_i+2\left(n-1\right)\lambda\left|\nabla\lambda\right|^2-\frac{n-1}{n}\left|\nabla\lambda\right|^2,\end{aligned}\tag{4.17}$$

由子流形M^n紧, 则对(3.17)式两边在M^n上积分有

$$\begin{aligned}0&\geq\int_M\frac{1}{n}\left(\triangle\lambda\right)^2dM+\int_M\sum_i\lambda_i\left(\triangle\lambda\right)_i dM+\int_M 2\left(n-1\right)\left(\lambda-\frac{1}{2n}\right)\left|\nabla\lambda\right|^2dM\\&=\int_M\frac{1}{n}\left(\triangle\lambda\right)^2dM+\int_M\sum_i\left(\lambda_i\cdot\triangle\lambda\right)_i dM-\int_M\sum_i\lambda_{i,i}\cdot\triangle\lambda dM+\int_M 2\left(n-1\right)\left(\lambda-\frac{1}{2n}\right)\left|\nabla\lambda\right|^2dM\\&=\int_M\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\triangle\lambda\right)^2dM+\int_M 2\left(n-1\right)\left(\lambda-\frac{1}{2n}\right)\left|\nabla\lambda\right|^2\end{aligned}\tag{4.18}$$

整理后有

$$\frac{1}{n}\int_M\left(\triangle\lambda\right)^2dM\geq\int_M 2\left(\lambda-\frac{1}{2n}\right)\left|\nabla\lambda\right|^2dM\tag{4.19}$$

定理1.3得证.

参考文献

[1] Wang, C.P. (1998) Moebius Geometry of Submanifolds in s^n. *Manuscripta Mathematica*, **96**, 517-534. https://doi.org/10.1007/s002290050080

[2] Guo, Z., Fang, J.B. and Lin, L.M. (2011) Hypersurfaces with Isotropic Blaschke Tensor. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **63**, 1155-1186. https://doi.org/10.2969/jmsj/06341155

[3] Hu, Z.J. and Li, H.Z. (2004) Classification of Hypersurfaces with Parallel Möbius Second Fundamental Form in S^{n+1}. *Science China-Mathematics*, **47**, 417-430.