Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1190-1206
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135123

基于霍奇理论的外微分形式拉普拉斯迭代方程解的研究

甘丽宁，苏福洪，黄志明，卢卫君*

广西民族大学数学与物理学院，广西 南宁

收稿日期：2023年4月4日；录用日期：2023年5月8日；发布日期：2023年5月15日

摘 要

本文主要研究黎曼流形上外微分形式拉普拉斯方程解的存在性问题。首先利用Hodge分解定理和格林算子对Laplace算子Δ的无穷迭代特征值谱分析给出求解方法，然后利用迭代法对外微分形式的拉普拉斯方程$\Delta\alpha=\omega$进行拓展，最后得到k阶拉普拉斯方程的迭代解，这对高数阶的拉普拉斯方程的解和特征值谱分析的研究产生了一定的影响。

关键词

黎曼流形，Hodge分解定理，迭代解，拉普拉斯方程

Study on Solutions of External Differential Laplace Iterative Equations Based on Hodge's Theory

Lining Gan, Fuhong Su, Zhiming Huang, Weijun Lu*

College of Mathematics and Physics, Guangxi Minzu University, Nanning Guangxi

Received: Apr. 4th, 2023; accepted: May 8th, 2023; published: May 15th, 2023

Abstract

In this paper, we mainly study the existence of solutions to the external differential form Laplace's equation on Riemannian manifold. Firstly, the Hodge decomposition theorem and the Green operator are used to give a solution method for the infinite iterative eigenvalue spectrum analysis of the Laplace operator. Then, the iterative method is used to expand the Laplace's equation $\Delta\alpha=\omega$

*通讯作者。

文章引用: 甘丽宁, 苏福洪, 黄志明, 卢卫君. 基于霍奇理论的外微分形式拉普拉斯迭代方程解的研究[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1190-1206. DOI: 10.12677/pm.2023.135123

in the external differential form, and finally the iterative solution of the Laplace's equation k-order is obtained, which has a certain impact on the research of the solutions of the Laplace's equation of higher order and eigenvalue spectrum analysis.

Keywords

Riemann Manifolds, Hodge Decomposition Theorem, Iterative Solution, Laplace Equation

1. 引言

Warner [1]利用 Fourier 级数作为基本工具给出了 Hodge 理论较详细的证明过程，并解决了 Lapace 算子的特征函数的性质和 Peter-Weyl 定理，对许多困难问题的解决给出解题思路。而后伍鸿熙，陈维桓[2]根据 Garding 不等式、正则性定理以及 Rellich 引理给出了不一样的 Hodge 定理的证明和 de Rham 上同调的 Poincaré 对偶定理。余扬政和冯承天[3]另辟蹊径，从环面上研究 Hodge 分解定理，并研究其在上同调理论中的应用。对于外微分形式上的拉普拉斯方程，许多学者也对它进行了深入的研究。李晓静等人[4]利用 Mawhin 拓展定理研究了一类带 p-Laplace 算子的非线性项前系数可变号的高阶 Rayleigh 型泛函微分方程周期解存在性问题。而张立新和崔海英[5]则对具有 p-Laplace 算子的三点边值问题通过单调迭代方法得到迭代解。文献[6] [7]利用临界点理论、变分方法和分数阶变指数 Sobolev 空间理论，研究带有非局部系数的分数阶 p(x)-拉普拉斯方程边值问题的可解性。当非线性项在零点附近次线性或在无穷远处局部超线性增长时，得到了此类问题多重解存在的充分条件。在文献[8]中，通过变分法和约束变分法证明方程对应的泛函满足 Palais-Smale 条件，将求解特征值转化为求解泛函的临界值得到所定义空间中的特征值和特征向量。

为了得到拉普拉斯方程的迭代解，本文首先在完备化的 $L^2(M)$ 空间上利用正则性定理和紧性定理给出了 Hodge 分解定理的证明，然后应用格林算子和 Laplace 算子 Δ 的特征值谱分析的迭代关系，给出了黎曼流形上外微分形式 k 阶拉普拉斯方程 $\Delta^k\alpha=\omega$ 的迭代解。

2. 相关知识

2.1. 外微分算子

定义 2.1.1 [9]设 M 是 n 维光滑紧定向的黎曼流形，$E^p(M)$ 是 M 上所有 p-形式构成的向量空间。对于可微流形 M，存在一个由 p 次微分到 $(p+1)$ 次微分形式的映射

$$d:E^p(M)\to E^{p+1}(M).$$

如果 d 满足并以下条件

1) $d(\alpha+\beta)=d\alpha+d\beta$，$\alpha$ 和 β 是任意次微分形式；
2) $d(\alpha\wedge\beta)=d\alpha\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge d\beta$，$\forall\alpha\in E^p(M),\beta\in E^{p+1}(M)$；
3) $d\circ d=d^2=0$。

则把 d 称为外微分或外导数。

2.2. 微分形式上的算子

定义 2.2.1 [9]把线性映射

$$*: E^p(M) \to E^{n-p}(M).$$

称为 Hodge 星算子，对于 $\forall \omega \in E^p(M)$，称 $*\omega$ 为 ω 的伴随形式或对偶形式，相应的数学运算叫做对偶运算。若连续两次被 Hodge 算子作用，则得到双对偶形式，即

$$**\big|_{E^p(M)} = (-1)^{p(n-p)} Id\big|_{E^p(M)}.$$

关于 Hodge 星算子有下面引理。

引理 2.2.2 设 (M, g) 是 n 维可定向的紧黎曼流形，则对 $\forall \omega, \eta \in E^p(M)$，Hodge 星算子满足

1) $\omega \wedge *\eta = \langle \eta, *\omega \rangle dV_M$；
2) $*(*\omega) = (-1)^{p(n-p)} \omega$；
3) $(*\omega, *\eta) = (\omega, \eta)$；
4) $dV_M = *1$，$*dV_M = 1$。

下面给出 1) 2)的证明，其他可用类似的方法证明。

证明 对 $\forall \omega, \eta \in E^p(M)$ 在局部坐标系 $\{U; x^i\}$ 下有

$$\omega\big|_U = \frac{1}{p!}\omega_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}, \quad \eta\big|_U = \frac{1}{p!}\eta_{j_1\cdots j_p} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p}, \tag{2.2.1}$$

先证(1)，根据定义直接计算

$$\begin{aligned}
\omega \wedge *\eta &= \frac{1}{P!}\frac{1}{p!(n-p)!}\omega_{i_1\cdots i_p}\eta^{j_1\cdots j_p}\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n} dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_p} \wedge dx^{j_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{j_n} \\
&= \frac{\sqrt{D}}{p!p!}\frac{1}{(n-p)!}\omega_{i_1\cdots i_p}\eta^{j_1\cdots j_p}\delta^{1\cdots n}_{j_1\cdots j_n}\delta^{i_1\cdots i_p j_{p+1}\cdots j_n}_{1\cdots p p+1\cdots n} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\
&= \frac{1}{p!}\omega_{i_1\cdots i_p}\eta^{j_1\cdots j_p}\sqrt{D} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \langle \omega, \eta \rangle dV_M.
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

其中 $D = \sqrt{g_{ij}}$。对于 2)从证明 1)我们注意到

$$*\omega = \frac{\sqrt{D}}{p!(n-p)!}\omega^{i_1\cdots i_p}\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n} dx^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n}.$$

所以

$$\begin{aligned}
(\omega) &= \frac{\sqrt{D}}{p!(n-p)!}(*\omega)^{j_1\cdots j_{n-p}}\delta^{1\cdots n}_{j_1\cdots j_n} dx^{j_{n-p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{j_n} \\
&= \frac{(-1)^{p(n-p)}}{p!}\frac{D}{p!(n-p)!}\delta^{1\cdots n}_{j_1\cdots j_n}\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n} g^{i_1 l_1} \cdots g^{i_p l_p} \cdot g^{i_{p+1} l_{p+1}} \cdots g^{i_n j_n} \omega_{l_1\cdots l_p} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} \\
&= (-1)^{p(n-p)}\frac{1}{p!}\omega_{j_1\cdots j_p} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p} = (-1)^{p(n-p)}\omega.
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

定义 2.2.3 设 (M, g) 是 n 维定向黎曼流形，线性映射

$$d^*: E^p(M) \to E^{p-1}(M).$$

称为 M 上的余微分算子，它的物理意义为散度，且 $d^{*2} = 0$。可用链式线性映射表示之间的关系

$$E^{p}(M)\xrightarrow{*}E^{n-p}(M)\xrightarrow{d}E^{n-p+1}(M)\xrightarrow{*}E^{p-1}(M).$$

则有

$$d^{*}=(-1)^{n(p+1)+1}*\circ d\circ *. \tag{2.2.4}$$

在 0-形式上，d^{*} 就是零线性泛函，并且与 d 互为伴随算子

$$\langle d\omega,\eta\rangle=\langle \omega,d^{*}\eta\rangle.$$

定义 2.2.4 [9]把由 p 次微分形式到 p 次微分形式的线性映射

$$\Delta=d\circ d^{*}+d^{*}\circ d:E^{p}(M)\to E^{p}(M). \tag{2.2.5}$$

称为 M 上的 Hodge-Laplace 算子。

性质 2.2.5 Hodge-Laplace 算子具有下面性质：

1) Δ 为自伴算子，即 $(\Delta\omega,\eta)=(\omega,\Delta\eta)$；

2) $(\Delta\omega,\omega)\geq 0$，当且仅当 $\Delta\omega=0$ 时等号成立；

3) $*\Delta=\Delta *$，$\Delta *$ 为其伴随算子。

证明 首先证明 1)，设任意的 $\omega,\eta\in E^{p}(M)$ 有

$$\begin{aligned}(\Delta\omega,\eta)&=\left(\left(dd^{*}+d^{*}d\right)\omega,\eta\right)=\left(dd^{*}\omega,\eta\right)+\left(d^{*}d\omega,\eta\right)\\&=\left(d^{*}\omega,d^{*}\eta\right)+(d\omega,d\eta)=\left(\omega,dd^{*}\eta\right)+\left(\omega,d^{*}d\eta\right)\\&=\left(\omega,\left(dd^{*}+d^{*}d\right)\eta\right)=(\omega,\Delta\eta).\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

即 Δ 是一个自伴算子。

2) 对任意的 $\omega\in E^{p}(M)$，利用 Δ 的定义得

$$\begin{aligned}(\Delta\omega,\omega)&=\left(\left(dd^{*}+d^{*}d\right)\omega,\omega\right)=\left(dd^{*}\omega,\omega\right)+\left(d^{*}d\omega,\omega\right)\\&=\left(d^{*}\omega,d^{*}\omega\right)+(d\omega,d\omega)=\left\|d^{*}\omega\right\|^{2}+\left\|d\omega\right\|^{2}\geq 0.\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

3) 利用 Δ 的定义和 Hodge 星算子 $*$ 的性质有

$$\begin{aligned}*\Delta&=*\left(dd^{*}+d^{*}d\right)=*dd^{*}+*d^{*}d\\&=d^{*}d*+dd^{*}*=\left(d^{*}d+dd^{*}\right)*=\Delta *.\end{aligned}$$

故 $*\Delta=\Delta *$。

3. Hodge 分解定理的证明

为了便于理解，下面基于文献[9]和[10]的证明的基础上给出 Hodge 分解定理的证明，在证明 Hodge 分解定理之前先补充一些相关知识点。

定义 3.1 对于 $\omega\in E^{p}(M)$，如果存在 $\Delta\omega=0$，把 ω 叫做 $E^{p}(M)$ 上的 p 次调和形式。用 $\mathcal{H}^{p}(M)$ 表示 M 上全体 p 次调和形式构成的集合

$$\mathcal{H}^{p}(M)=\left\{\omega\in E^{p}(M)\,|\,\Delta\omega=0\right\}=\ker\Delta. \tag{3.1}$$

并且 $\mathcal{H}^{p}(M)$ 与 M 上的第 p 个 de Rham 上同调群 $\mathcal{H}^{p}(M,R)$ 是同构的。

利用 d 与 d^{*} 互为共轭，易知

DOI: 10.12677/pm.2023.135123

$$\langle \Delta\omega,\omega\rangle = \langle dd^*\omega,\omega\rangle + \langle d^*d\omega,\omega\rangle = |d^*\omega|^2 + |d\omega|^2 \geq 0.$$

当且仅当 $d^*\omega = d\omega = 0$ 时等号成立。

如果 M 不是紧致的，然后 d 和 d^* 都是闭形式，根据 Δ 的定义可以知道它们是调和的。然而，相反的情况是不正确的，例如 $M = R$ 上的函数 x，上面的论证在处理不一定是收敛的积分时就崩溃了。

引理 3.2 设 $E^p(M)$ 到 $\mathcal{H}^p(M)$ 的正交投影算子为

$$H: E^p(M) \to \mathcal{H}^p(M) = \{\omega \mid E^p(M) \mid \Delta\omega = 0\} = \ker\Delta,$$

$$\alpha \mapsto H(\alpha) = \sum_{i=1}^{t} (\alpha,\omega_i)\omega_i.$$

使得

1) 对 $\forall\alpha \in E^p(M)$，存在唯一的 p-形式 $H(\alpha) \in \mathcal{H}^p(M)$，使得

$$(\alpha,\gamma) = (H(\alpha),\gamma), \forall\gamma \in \mathcal{H}^p(M).$$

2) 对任意 p-形式 $\alpha \in E^p(M)$，H 满足 $H(H(\alpha)) = H(\alpha)$。

其中 $\forall\alpha \in E^p(M)$，$H(\alpha) = \sum_{i=1}^{t}(\alpha,\omega_i)$，$\Delta H(\alpha) = 0$，这里 $\{\omega_1,\cdots,\omega_t\}$ 为调和空间 $\mathcal{H}^p(M)$ 的规范正交基。

定理 3.3 [10] (紧性定理)设 $\{\alpha_n\}$ 是 M 上使得 $\|\alpha_n\| \leq c$ 和 $\|\Delta\alpha_n\| \leq c$ 的一个 p-形式序列，对所有的 n 和某个常数 c 成立，那么 $\{\alpha_n\}$ 中一定存在 $E^p(M)$ 中的一个 Cauchy 序列。

定理 3.4 [10]设 (M,g) 是一个可定向的 $\mathbb{C}^\infty$ 紧黎曼流形，α 是 M 上的光滑函数，ω 为待求的函数，方程

$$\Delta\omega = \alpha. \tag{3.2}$$

在 $E^0(M)$ 中的线性泛函 $\tau: E^0(M) \to R$，有

$$\tau(\Delta\beta) = \langle \beta,\alpha\rangle, \forall\beta \in E^0(M).$$

则称有界的线性泛函 τ 是方程(3.2)的弱解。

定理 3.5 [10] (正则性定理)设 $\alpha \in E^p(M)$，τ 为 $\Delta\omega = \alpha$ 的一个弱解，那么存在 $\omega \in E^p(M)$，使得对任意的 $\beta \in E^p(M)$ 有

$$\tau(\beta) = \langle \omega,\beta\rangle. \tag{3.3}$$

所以 $\Delta\omega = \alpha$。

可见，Hodge 分解定理是定理 3.3 和定理 3.5 的推论。在证明 Hodge 分解定理之前，先证明下面引理。

引理 3.6 [9]设存在一个常数 c，使得

$$\|\varphi\| \leq c\|\Delta\varphi\|, \varphi \in \left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}. \tag{3.4}$$

证明 (反证法)设不存在一个常数 c 使得(3.4)成立，则存在序列 $\phi_j \in \left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}$，$\phi_j \neq 0$，使得 $\|\phi_j\| > j\|\Delta\phi_j\|$。为了方便，设 $\|\phi_j\| = 1$，并且 $\Delta\phi \to 0$，有 $\|\phi_j\| < \frac{1}{j}\|\phi_j\| = \frac{1}{j} \to 0$，由定理 3.3 得，$\phi_j$ 存在一个 Cauchy 子序列，设为 $\{\phi_j\}$，则对 $\forall\varphi \in E^p(M)$，由 Schwarz 不等式得

$$\left|(\phi_{j+1},\varphi),(\phi_j,\varphi)\right|^2 = \left|(\phi_{j+1}-\phi_j),\varphi\right|^2 \leq \|\phi_{j+1}-\phi_j\|\|\varphi\|.$$

于是得到 $\{(\phi_j,\varphi)\}$ 也是 Cauchy 序列，因而 $\lim\limits_{j\to+\infty}(\phi_j,\varphi)$ 存在。对 $\forall\varphi \in E^p(M)$，在 $E^p(M)$ 上定义线性泛函 τ，且

$$\tau(\varphi)=\lim_{j\to+\infty}(\phi_j,\varphi).$$

可以知道τ是有界的，并且对$\forall\varphi\in E^p(M)$，得到$\left|(\Delta\phi_j,\varphi)\right|\le|\Delta\phi_j||\varphi|\to 0$，则有

$$\tau(\Delta\varphi)=\lim_{j\to+\infty}(\phi_j,\Delta\varphi)=\lim_{j\to+\infty}(\Delta\phi_j,\varphi)=(0,\varphi)=0.$$

所以τ为$\Delta\omega=0$的一个弱解。由定理 3.5 得，$\exists\phi\in E^p(M)$，使得

$$\tau(\varphi)=\lim_{j\to+\infty}(\phi_j,\varphi)=\langle\psi,\varphi\rangle,\forall\varphi\in E^p(M).$$

于是$\phi_j\to\phi$，又因为$\|\phi_j\|=1$，$\phi_j\in\left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}$，所以$\|\phi\|=1$，且$\phi\in\left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}$。但是根据定理 3.5 有$\Delta\phi=0$，故$\phi\in\mathcal{H}^p(M)$，因$\mathcal{H}^p(M)\cap\left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}=\{0\}$，所以$\phi=0\Rightarrow\|\phi\|=0$，与$\|\phi\|=1$矛盾，得证。

定理 3.7 [10] (Hodge 分解定理)设M是n维$\mathbb{C}^{\infty}$紧定向黎曼流形，那么

$$\dim\mathcal{H}^p(M)<\infty.$$

并且关于M上的光滑p-形式空间$E^p(M)$的正交直和分解如下

$$\begin{aligned}E^p(M)&=\Delta\left(E^p(M)\right)\oplus\mathcal{H}^p(M)=\operatorname{Im}\Delta\oplus\ker\Delta\\&=\operatorname{Im}dd^*\oplus\operatorname{Im}d^*d\oplus\ker\Delta=\operatorname{Im}d\oplus\operatorname{Im}d^*\oplus\ker\Delta.\end{aligned}$$ □

换种说法，即对$\forall\omega\in E^p(M)$，存在$\alpha\in E^{p-1}(M)$，$\beta\in E^{p+1}(M)$，$\gamma\in\mathcal{H}^p(M)$使得

$$\omega=d\alpha+d^*\beta+\gamma. \tag{3.5}$$

且$d\alpha,d^*\beta,\gamma$的分解是唯一的。因为γ是调和的，即$d\gamma=0$，并根据 Poincaré 引理得$d(d\alpha)=0$。

假设ω是一个闭p-形式，那么$d\omega=0$，并且$d^*\beta$在式子(3.5)是不存在的，所以得到一个更加简短的 Hodge 分解定理

$$\omega=d\alpha+\gamma.$$

其中ω、γ受$d\alpha$的限制。

要证明这个定理，则需要研究它按照内积的完备化空间$L^2(M)$，即证明$\mathcal{H}^p(M)$在$L^2(M)$中是一个闭空间，并且$\mathcal{H}^p(M)=\Delta\left(E^p(M)\right)^{\perp}$和$\left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}=\Delta\left(E^p(M)\right)$。

证明利用 Laplace-Beltrami 算子的正则性容易得到$\mathcal{H}^p(M)$在$L^2(M)$中是一个闭空间，便不作详细介绍。主要目的是介绍$\mathcal{H}^p(M)=\Delta\left(E^p(M)\right)^{\perp}$和$\left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}=\Delta\left(E^p(M)\right)$。

假设$\mathcal{H}^p(M)$不是有限维的，则在$\mathcal{H}^p(M)$中包含一个单位正交无穷序列$\{\omega_1,\cdots\}$，而由定理 3.3 知$\{\omega_1,\cdots\}$中存在一个 Cauchy 子列，但

$$\left\|\omega_{n_j}-\omega_{n_{j+1}}\right\|^2=\left(\omega_{n_j}-\omega_{n_{j+1}},\omega_{n_j}-\omega_{n_{j+1}}\right)=\left\|\omega_{n_j}\right\|^2+\left\|\omega_{n_{j+1}}\right\|^2-2\left(\omega_{n_j},\omega_{n_{j+1}}\right)=2.$$

而距离$\rho\left(\omega_{n_j},\omega_{n_{j+1}}\right)=\left\|\omega_{n_j}-\omega_{n_{j+1}}\right\|=\sqrt{2}$，因此$\{\omega_j\}$不是一个 Cauchy 子列，故$\mathcal{H}^p(M)$是有限维的。

设$(\omega_1,\cdots,\omega_t)$为$\mathcal{H}^p(M)$的规范正交基，则对$\forall\alpha\in E^p(M)$可以表示为

$$H(\alpha)=\sum_{i=1}^{t}(\alpha,\omega_i)\omega_i=\alpha-\beta,$$

$$\alpha=\beta+\sum_{i=1}^{t}(\alpha,\omega_i)\omega_i. \tag{3.6}$$

其中$\beta\in\left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}$，这是正交于$\mathcal{H}^p(M)$所有元素组成的$E^p(M)$的子空间，并且对于$\forall\gamma\in\mathcal{H}^p(M)$有

$$\left(H(\alpha),\gamma\right)=\left(\alpha-\beta,\gamma\right)=\left(\alpha,\gamma\right). \tag{3.7}$$

然而，因为$\mathcal{H}^p(M)$是一个线性空间，所以对$\beta\in\left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}$有

$$H\left(H(\alpha)\right)=H(\alpha)-H(\beta)=H(\alpha). \tag{3.8}$$

设$\omega\in\mathcal{H}^p(M)$，则对任意的$\alpha\in E^p(M)$，利用$\Delta$为自伴算子得

$$\left(\Delta\omega,\alpha\right)=\left(\omega,\Delta\alpha\right)=0.$$

从而$\omega\in\Delta\left(E^p(M)\right)^{\perp}$。

令$\gamma\in\Delta\left(E^p(M)\right)^{\perp}$，则对任意的$\beta\in E^p(M)$有

$$\left(\gamma,\Delta\beta\right)=0.$$

由 Weyl 引理得$\gamma\in\mathcal{H}^p(M)$，所以

$$\Delta\left(E^p(M)\right)^{\perp}=\mathcal{H}^p(M). \tag{3.9}$$

接下来证明$\Delta\left(E^p(M)\right)=\left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}$，即要证明$\Delta\omega=\alpha$总有一个解$\omega$。

先证$\left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}\subset\Delta\left(E^p(M)\right)$。

事实上，对$\forall\Delta\omega\in\Delta\left(E^p(M)\right)$，$\alpha\in\mathcal{H}^p(M)$有

$$\langle\Delta\omega,\alpha\rangle=\langle\omega,\Delta\alpha\rangle=(\omega,0))=0$$

则$\Delta\omega\perp\alpha$，$\Delta\omega\perp\mathcal{H}^p(M)$，则$\Delta\omega\in\left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}$，即有$\Delta\left(E^p(M)\right)\subset\left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}$。

设$\alpha\in\left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}$，通过对$\forall\Delta\phi\in\operatorname{Im}\Delta$诱导线性泛函$\tau:\operatorname{Im}\Delta\to\mathbb{R}$有

$$\tau(\Delta\phi)=\langle\alpha,\phi\rangle。$$

那么τ是可以确定的。如果存在$\Delta\phi_1=\Delta\phi_2$，则$\Delta(\phi_1-\phi_2)=0$，即$\phi_1-\phi_2\in\mathcal{H}^p(M)$从而

$$\langle\alpha,\phi_1-\phi_2\rangle=\langle\alpha,\phi_1\rangle-\langle\alpha,\phi_2\rangle=0.$$

而且这个时候τ还是$\Delta\left(E^p(M)\right)$上的有界线性泛函。令$\Delta\varphi\in\Delta\left(E^p(M)\right)$，$\psi\in\left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}$，由(3.4)和 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}\left|\tau(\Delta\varphi)\right|&=\left|\tau(\Delta\psi)\right|=\left|\langle\alpha,\psi\rangle\right|\\&\le\|\alpha\|\|\psi\|\le c\|\alpha\|\|\psi\|\\&\le c\|\alpha\|\|\Delta\psi\|=c\|\alpha\|\|\Delta\varphi\|\end{aligned} \tag{3.10}$$

由 Hahn-Banach 定理，τ可扩充为$\tau:E^p(M)\to\mathbb{R}$的线性泛函，因而τ是$\Delta\omega=\alpha$的一个弱解。由定理 3.5 知$\exists\omega\in E^p(M)$，使得$\Delta\omega=\alpha\in\Delta\left(E^p(M)\right)$成立，从而

$$\left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}\subset\Delta\left(E^p(M)\right).$$

所以

$$\left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}=\Delta\left(E^p(M)\right).$$

综上，Hodge 分解定理得证。

4. Hodge 分解定理的应用

4.1. 格林算子

对于一个给定的 p-形式 α，一定存在一个 p-形式 β 使满足方程

$$\Delta\beta = \alpha - H(\alpha). \tag{4.1.1}$$

由定理 3.7 有

$$E^p(M) = d\left(E^{p-1}(M)\right) + d^*\left(E^{p+1}(M)\right) + \mathcal{H}^p(M),$$

并且根据(4.1.1)也可以得 $d\alpha + d^*\beta = \alpha - H(\alpha)$ 和 β 使 $\Delta\beta = d\alpha + d^*\beta$ 成立。令任意形式的 β_1、β_2 满足(4.1.1)，得到方程组

$$\begin{cases} \Delta\beta_1 = \alpha - H(\alpha), \\ \Delta\beta_2 = \alpha - H(\alpha). \end{cases}$$

两式相减得 $\Delta(\beta_1 - \beta_2) = 0$，即有 $\beta_1 - \beta_2 \in \mathcal{H}^p(M)$，对于一个模调和形式，方程(4.1.1)存在一个唯一解，我们把这个解记为 $\beta = G(\alpha)$。并且 β 可以投影到 $\Delta\left(E^p(M)\right)$ 上，而在(4.1.1)中只有这部分可以代替 β。因此假设 $G(\alpha)$ 没有调和贡献，将 β 带进(4.1.1)得

$$\alpha = G(\alpha) + H(\alpha). \tag{4.1.2}$$

并且对 $\forall\gamma \in \mathcal{H}^p(M)$ 有 $\left(G(\alpha), \gamma\right) = 0$。

定理 4.1.1 (格林算子)令

$$\begin{aligned} G: E^p(M) &\to \left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}, \\ \alpha &\mapsto G(\alpha) = \omega. \end{aligned}$$

使得 $G(\alpha) \in \left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}$ 为方程(4.1.1)的唯一解，其中 $\alpha = \Delta\beta + H(\alpha)$，把这样的 G 称为格林算子。

从 Hodge 分解定理和格林算子的定义得，对于任意一个 p-形式 α，存在一个 p-形式 $G(\alpha)$，满足微分方程(4.1.1)

$$G(\alpha) = \alpha - H(\alpha). \tag{4.1.3}$$

并且也满足(4.1.2)给出的相关条件。

认识 G 的性质是至关重要的，这些性质在下面的引理中被揭示出来。

引理 4.1.2 G 可以与任何由 Laplace 算子 Δ 构成的线性算子交换，即 G 与 d, d^*, Δ 都可交换，若令 $T = d, d^*, \Delta$，则有 $GT = TG$。

引理 4.1.3 关于格林算子 G 的性质：

a) G 是一个自伴随算子

$$\left(G(\alpha), \beta\right) = \left(\alpha, G(\beta)\right). \tag{4.1.4}$$

对于任意的 p-形式 α, β 都是成立的。

b) G 是一个正算子

$$\left(G(\alpha), \alpha\right) \geq 0.$$

当且仅当 α 是调和形式时成立。

c) G 是一个有界算子，对 $G(\alpha) \in \left(\mathcal{H}^p(M)\right)^{\perp}$，$\alpha \in E^p(M)$ 和存在一个常数 $c > 0$ 恒有

$$\|G(\alpha)\|^2 \le c\|\alpha\|\|G(\alpha)\|.$$

成立。

证明 a) 根据 Hodge 分解定理和定理 4.1.1，设存在 p-形式 α,γ 使得

$$\Delta G(\alpha)=\alpha-H(\alpha)，\quad \Delta G(\gamma)=\gamma-H(\gamma).$$

由正交性得 $(H(\alpha),\gamma)=(\alpha,H(\gamma))$，因此有下列关系

$$(\Delta G(\alpha),\gamma)=(\alpha-H(\alpha),\gamma)=(\alpha,\gamma)-(H(\alpha),\gamma)=(\alpha,\gamma), \tag{4.1.5}$$

$$(\alpha,\Delta G(\gamma))=(\alpha,\gamma-H(\gamma))=(\alpha,\gamma)-(\alpha,H(\gamma))=(\alpha,\gamma). \tag{4.1.6}$$

所以有

$$(\Delta G(\alpha),\gamma)=(\alpha,\Delta G(\gamma)).$$

即 G 是一个自伴随算子。又因 G 和 Δ 是可交换的，可得到下面的表达式

$$(\Delta G(\alpha),\gamma)=(G(\alpha),\Delta\gamma)，\quad (\alpha,\Delta G(\gamma))=(\alpha,G\Delta\gamma).$$

有 $(G(\alpha),\Delta\gamma)=(\alpha,G\Delta\gamma)$。设 $\beta=\Delta\gamma$，则有 $(G(\alpha),\beta)=\alpha(,G(\beta))$。因为 G 的范围不相交于调和子空间，所以它没有影响。如果 β 有一个调和项，那么它不会做出任何的贡献，它投影出去，通过子空间的正交性得到零，故 G 是一个自伴随算子。

b) 因为 $G(\alpha)$ 在 $\mathcal{H}^p(M)$ 里面没有组成部分，通过应用定理 4.1.1 得

$$\begin{aligned}(G(\alpha),\Delta G(\alpha)+H(\alpha)) &= (G(\alpha),\Delta G(\alpha))+(G(\alpha),H(\alpha))\\ &=(G(\alpha),\Delta G(\alpha))\\ &=(d^*G(\alpha),d^*G(\alpha))+(dG(\alpha),dG(\alpha))\\ &=\|d^*G(\alpha)\|^2+\|dG(\alpha)\|^2\ge 0.\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

因此对于 p-形式 μ 有 $(\mu,\mu)\ge 0$。

令 $\alpha\in\mathcal{H}^p(M)$，通过正交性有 $(G(\alpha),\alpha)=0$，假设 $(G(\alpha),\alpha)=0$ 并且 $G(\alpha),\alpha$ 不是 0-形式，如果 $G(\alpha)\in(\mathcal{H}^p(M))^\perp$，则 $\alpha\in\mathcal{H}^p(M)$ 必须在正交子空间中。

c) 设存在 $\beta\in(\mathcal{H}^p(M))^\perp$ 使得 $\Delta\beta=G(\alpha)\in(\mathcal{H}^p(M))^\perp$，并应用引理 4.1.2 得

$$\begin{aligned}\|G(\alpha)\|^2 &=(G(\alpha),G(\alpha))=(\Delta\beta,G(\alpha))\\ &=(\beta,\Delta G(\alpha))=(\beta,\alpha-H(\alpha))\\ &=(\beta,\alpha)-(\beta,H(\alpha))=(\beta,\alpha)\\ &\le\|\alpha\|\cdot\|\beta\|\le c\|\alpha\|\cdot\|\Delta\beta\|=c\|\alpha\|\cdot\|G(\alpha)\|.\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

所以 G 是一个有界算子。

引入 Green 算子和正交调和算子后，我们可以把定理 3.7 改写成一个更为简单的恒等式，即对于一个 p-形式 α 有

$$Id=H(\alpha)+\Delta G(\alpha). \tag{4.1.9}$$

所以黎曼流形上的 Hodge 分解定理也可以叙述为下面内容：

定理 4.1.5 设 M 为 n 维 $\mathbb{C}^\infty$ 黎曼流形，则 p 次调和空间 $\mathcal{H}^p(M)$ 是有限维的，且存在格林算子 G，使得

$$Id = H(\alpha) + \Delta G(\alpha) \tag{4.1.10}$$

成立，其中 $H(\alpha)$ 是 $E^p(M) \to \mathcal{H}^p(M)$ 的正交投影。

根据 Hodge 分解定理和 G 的关系，对于方程 $\Delta^k \alpha = \beta$，若已知存在 $\alpha \in E^p(M)$，并且 $\Delta\alpha \neq 0$，利用 $HG(\alpha) = 0$ 或者式子(4.1.10)能否得出极限 $\lim\limits_{k \to +\infty} \Delta^k G(\alpha)$ 存在或者收敛？

4.2. Laplace 算子Δ的特征值及其应用

定义 4.2.1 [10]给定 p，考虑一个 p-形式 $E^p(M)$ 上的 Laplace-Beltrami 算子 Δ，对于一个实数 λ，存在一个不恒为零的 p-形式 μ 使得 $\Delta\mu = \lambda\mu$，则把 λ 叫做 Δ 的特征值，把任何 p-形式的 μ 称为 Δ 对应于特征值 λ 的特征函数。相应于一个固定特征值 λ 的特征函数构成 $E^p(M)$ 的子空间，叫做特征值 λ 的特征空间。很显然 0 是 Δ 的一个特征值当且仅当 M 上存在非平凡的调和空间 $\mathcal{H}^p(M)$ 是完全一致的 p-形式是调和的。

性质 4.2.2 [10] Laplace 算子 Δ 的特征值的性质：

1) Δ 的特征值是非负的；
2) Δ 的特征空间 $E_\lambda^p(M)$ 是有限维的；
3) 相应于不同特征值的特征函数是正交的；
4) 特征值无有限聚点。

证明 1) 假设 λ 为 Δ 的一个特征值，$\exists \alpha \neq 0 \in E^p(M)$，使得 $\Delta\alpha = \lambda\alpha$，所以

$$(\Delta\alpha, \alpha) = (\lambda\alpha, \alpha) = \lambda(\alpha, \alpha) = \lambda\|\alpha\|^2, \tag{4.2.1}$$

又 $\Delta = d \circ d^* + d^* \circ d$，则

$$\begin{aligned}(\Delta\alpha, \alpha) &= (dd^*\alpha, \alpha) + (d^*d\alpha, \alpha) \\ &= (d^*\alpha, d^*\alpha) + (d\alpha, d\alpha) \\ &= \|d^*\alpha\|^2 + \|d\alpha\|^2 \geq 0.\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

即有 $(\Delta\alpha, \alpha) = \lambda(\alpha, \alpha) = \lambda\|\alpha\|^2 \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$，因而 Δ 的特征值是非负的。

2) 反证法。假设 Δ 的特征空间不是有限维的。设 $\lambda \neq 0$ 是 Δ 的特征值，存在一个无限正交的序列 $\{e_n\}$，使得 $\Delta e_n = \lambda e_n$，并且 $\|e_n\| = 1$，$\|\Delta e_n\| \leq 1$。利用定理 3.5 得在 $E^p(M)$ 中，$\{e_n\}$ 存在一个 Cauchy 子列。不妨设这个 Cauchy 子列为 $\{e_n\}$，则给定 $\varepsilon < 1$，存在一个正数 $N(\varepsilon)$，使得当 $n, m > N(\varepsilon)$ 时，$\|e_n - e_m\| < \varepsilon$，但这是不可能存在的，由 $\{\alpha_n\}$ 是单位正交序列得

$$\|e_n - e_m\|^2 = (e_n - e_m, e_n - e_m) = 2.$$

而距离 $\rho(e_n, e_m) = \|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$，因此，$\{e_n\}$ 不是一个 Cauchy 子列，矛盾。故 Δ 的特征空间是有限维的。

3) 设 $\lambda \neq \mu$ 是 Δ 的两个不同特征值，对任意 $\alpha, \beta \in E^p(M)$，使得 $\Delta\alpha = \lambda\alpha, \Delta\beta = \mu\beta$。因而有 $(\Delta\alpha, \beta) = (\lambda\alpha, \beta) = \lambda(\alpha, \beta)$。因为 Δ 是一个自伴随算子，故

$$(\alpha, \Delta\beta) = (\Delta\alpha, \beta) = (\lambda\alpha, \beta) = \lambda(\alpha, \beta), \tag{4.2.3}$$

但是

$$(\alpha, \Delta\beta) = (\alpha, \mu\beta) = \mu(\alpha, \beta),$$

所以有

$$\lambda(\alpha,\beta)=\mu(\alpha,\beta).$$

整理得

$$(\lambda-\mu)(\alpha,\beta)=0.$$

因为$\lambda\neq\mu$，所以只能是$(\alpha,\beta)=0$，由此得到$\alpha\perp\beta$。故α和β是正交的。

4) 反证法。设Δ在$E^p(M)$上的特征值为λ_n，则$\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n=\lambda\in[0,+\infty)$，即$0\le\lambda_n\le\lambda+1$。

设$\{e_n\}$是与特征值$\{\lambda_n\}$相关的Δ的特征值正交化的特征函数集，$\lambda_i\neq\lambda_j$是Δ的两个特征值，取e_n使得

$$\Delta e_n=\lambda_n e_n.$$

且

$$\|e_n\|=1.$$

于是

$$\|e_n\|=1\le\lambda+1，\ \|\Delta e_n\|=\|\lambda_n e_n\|=\lambda_n\le\lambda+1. \tag{4.2.4}$$

所以对于任意$j>0$有$\lim\limits_{j\to+\infty}\lambda_j=\lambda$。

由定理3.3和定理3.7知$\{e_n\}$有子列$\{e_{n_j}\}$为$E^p(M)$的Cauchy序列。但是对于不同特征值的特征形式是正交的，得

$$\rho\left(e_{n_j},e_{n_{j+1}}\right)=\left\|e_{n_j}-e_{n_{j+1}}\right\|=\sqrt{2}.$$

显然，此时$\{e_{n_j}\}$不可能是一个Cauchy序列，矛盾。因此，特征值没有有限聚点。

推论4.2.3 Laplace算子Δ有一个正的特征值，并且它是一个能发散到$+\infty$的整个特征值序列。

证明下面的论证过程可以应用于得到最小的特征值λ_1的存在性结论，迭代此过程，生成一个特征值序列$0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$，每个特征值对应的特征函数为$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$，它们可以被规范标准化，特征函数集$\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$张成了$\left(\mathcal{H}^p(M)\right)^\perp$的一个线性子空间，称为$V_n$，这时有映射

$$G:\left(\mathcal{H}^p(M)\oplus V_n\right)^\perp\to\left(\mathcal{H}^p(M)\oplus V_n\right)^\perp,$$

$$\Delta:\left(\mathcal{H}^p(M)\oplus V_n\right)^\perp\to\left(\mathcal{H}^p(M)\oplus V_n\right)^\perp.$$

定义

$$\mu_{n+1}=\sup_{\substack{\|\beta\|=1\\ \beta\in\left(\mathcal{H}^p(M)\oplus V_n\right)^\perp}}\|G\beta\|. \tag{4.2.5}$$

结果表明$\lambda_{n+1}=\mu_{n+1}^{-1}$是$\Delta$的一个特征值。此外，因为

$$\left(\mathcal{H}^p(M)\oplus V_n\right)^\perp\subset\left(\mathcal{H}^p(M)\oplus V_{n-1}\right)^\perp.$$

所以有

$$\mu_{n+1}=\sup_{\substack{\|\beta\|=1\\ \beta\in\left(\mathcal{H}^p(M)\oplus V_n\right)^\perp}}\|G\beta\|\le\sup_{\substack{\|\beta\|=1\\ \beta\in\left(\mathcal{H}^p(M)\oplus V_{n-1}\right)^\perp}}\|G\beta\|=\mu_n. \tag{4.2. 6}$$

利用等式(4.2.6)得$\lambda_{n+1}\ge\lambda_n$。

设$\{\beta_j\}\in\left(\mathcal{H}^p(M)\oplus V_n\right)^\perp$是$\mu_{n+1}$上的极大化序列，即当$j\to\infty$时$\|\beta_j\|=1$和$\|G\beta_j\|\to\mu_{n+1}$。因为$G$是自伴随算子，所以对于$j\to\infty$有

$$
\begin{aligned}
\left\|G^2\beta_j-\mu_{n+1}^2\beta_j\right\|^2&=\left\|G^2\beta_j\right\|^2-2\mu_{n+1}^2\left(G^2\beta_j,\beta_j\right)+\mu_{n+1}^4\\
&\le\mu_{n+1}^2\left\|G\beta_j\right\|^2-2\mu_{n+1}^2\left\|G\beta_j\right\|^2+\mu_{n+1}^4\\
&=\mu_{n+1}^4-\mu_{n+1}^2\left\|G\beta_j\right\|^2\to 0.
\end{aligned}
\tag{4.2.7}
$$

所以$\left\|G^2\beta_j-\mu_{n+1}^2\beta_j\right\|\to 0$。令$\psi_j=G\beta_j-\mu_{n+1}\beta_j$，则有

$$
\begin{aligned}
\left(\psi_j,G^2\beta_j-\mu_{n+1}^2\beta_j\right)&=\left(\psi_j,G\left(\psi_j+\mu_{n+1}\beta_j\right)-\mu_{n+1}^2\beta_j\right)\\
&=\left(\psi_j,G\psi_j+\mu_{n+1}\left(G\beta_j-\mu_{n+1}\beta_j\right)\right)\\
&=\left(\psi_j,G\psi_j+\mu_{n+1}\psi_j\right)\\
&=\left(\psi_j,G\psi_j\right)+\mu_{n+1}\left\|\psi_j\right\|^2\\
&\ge\mu_{n+1}\left\|\psi_j\right\|^2>0.
\end{aligned}
\tag{4.2.8}
$$

最后一个不等式源于 G 是一个正算子。由于(4.2.7)的左边在$j\to\infty$时接近于 0，所以当$j\to\infty$时$\left\|\psi_j\right\|^2\to 0$，有

$$\left\|G\beta_j-\mu_{n+1}\beta_j\right\|=\left\|\psi_j\right\|\to 0.$$

又因为$\left\|G\beta_j\right\|$和$\left\|\Delta G\beta_j\right\|=\left\|\beta_j\right\|$都是有界的，所以通过定理 3.3，$\beta_j$一定存在一个子序列，把它记为$\left\{\beta_j\right\}$使得$\left\{G\beta_j\right\}$是一个 Cauchy 序列。显然，可以通过极限在$E^p\left(M\right)$上定义一个线性泛函$L$使得

$$L\left(\sigma\right)=\lim_{j\to\infty}\mu_{n+1}\left(G\beta_j,\sigma\right),\sigma\in E^p\left(M\right).\tag{4.2.9}$$

然后对于$v\in\left(\mathcal{H}^p\left(M\right)\oplus V_n\right)^{\perp}$，用$\left(\Delta-\dfrac{1}{\mu_{n+1}}\right)v$代替(4.2.9)中的$\sigma$。由于$\Delta$是一个自伴随算子，即有

$$
\begin{aligned}
L\left(\left(\Delta-\frac{1}{\mu_{n+1}}\right)v\right)&=\lim_{j\to\infty}\mu_{n+1}\left(G\beta_j,\Delta v-\frac{1}{\mu_{n+1}}v\right)\\
&=\lim_{j\to\infty}\mu_{n+1}\left(\Delta G\beta_j,v\right)-\mu_{n+1}\left(\frac{1}{\mu_{n+1}}G\beta_j,v\right)\\
&=\lim_{j\to\infty}\mu_{n+1}\left(\frac{1}{\mu_{n+1}}\left(\mu_{n+1}\beta_j-G\beta_j\right),v\right)\\
&=\lim_{j\to\infty}\left(\left(\mu_{n+1}\beta_j-G\beta_j\right),v\right)=0.
\end{aligned}
\tag{4.2.10}
$$

因此L为方程

$$\left(\Delta-\frac{1}{\mu_{n+1}}\right)v=0.$$

的一个非平凡弱解。设$\lambda_{n+1}=\mu_{n+1}^{-1}$，利用定理 3.5，对于$\forall v\in E^p\left(M\right)$和$L$为方程$\Delta v-\lambda_{n+1}v=0$的一个弱解，则存在一个$\omega_{n+1}\in E^p\left(M\right)$使得对$\forall\beta\in E^p\left(M\right)$有

$$L\left(\beta\right)=\left(\omega_{n+1},\beta\right).$$

因为ω_{n+1}满足方程

$$\Delta\omega_{n+1}=\lambda_{n+1}\omega_{n+1}.$$

即定义的λ_{n+1}是Δ的一个特征值。

性质 4.2.4 设Δ在$E^{p}(M)$上的特征值为

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n \le \cdots, \lambda_n \to +\infty .$$

而每个Δ的特征值λ都包含在序列$\{\lambda_n\}$中，并且相应于λ的特征值空间的维数$\dim E_{\lambda}^{p}(M)$为$\lambda_n = \lambda$的个数。设e_n为$E^{p}(M)$中对应于特征值λ_n的规范正交的特征形式，更进一步，关于内积$(,)$，空间$E^{p}(M)$是完全的，即对于$\forall \alpha \in E^{p}(M)$有

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\alpha - \sum_{i=1}^{n}(\alpha, e_i)e_i\right\| = 0 .$$

证明 因为特征值无有限聚点，所以Δ在$E^{p}(M)$上的特征值的集合为至多可数集，并且可以按从小到大排序为$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n \le \cdots$，$\lambda_n \to +\infty$，由于$E^{p}(M)$是无限维的，故$\left(\mathcal{H}^{p}(M) \oplus V_n\right)^{\perp} = \{0\} \ne \varnothing$，从而有可数个$\eta_i$和$\lambda_i$。设$\beta \in \left(\mathcal{H}^{p}(M)\right)^{\perp}$使得

$$G\beta = G\Delta\left(\alpha - \sum_{i=1}^{n}(\alpha, e_i)e_i\right) = \alpha - \sum_{i=1}^{n}(G\alpha, e_i)e_i - \sum_{i=1}^{n}(\alpha, e_i)Ge_i = \alpha - \sum_{i=1}^{n}(\alpha, e_i)e_i . \tag{4.2.11}$$

由引理 3.2 和定理 3.7 可以知道$\{e_i\}$可以被标准化，也就是说当$i \ne j$时$(e_i, e_j) = 0$，即有

$$\begin{aligned}\left\|\alpha - \sum_{i=1}^{n}(\alpha, e_i)e_i\right\| &= \left\|\alpha - \sum_{i=1}^{n}(\alpha, e_i)e_i - \sum_{i=n+1}^{n}(\alpha, e_i)e_i\right\| \\ &= \left\|G\beta - \sum_{i=n+1}^{n}\left(G\beta + \sum_{j=1}^{n}(\alpha, e_j)e_j, e_i\right)e_i\right\| \\ &= \left\|G\beta - \sum_{i=n+1}^{n}(G\beta, e_i)e_i\right\| = \left\|G\left(\beta - \sum_{i=n+1}^{n}(\beta, e_i)e_i\right)\right\|.\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

然而对于任意的$v \in \left(\mathcal{H}^{p}(M) \oplus V_{n-1}\right)^{\perp}$，根据推论 4.2.4 可以知道$\|Gv\| \le \mu_{n+1}\|v\|$，所以

$$\left\|\alpha - \sum_{i=1}^{n}(\alpha, e_i)e_i\right\| = \left\|G\left(\beta - \sum_{i=1}^{n}(\beta, e_i)e_i\right)\right\| \le \frac{1}{\lambda_{n+1}}\left\|\beta - \sum_{i=n+1}^{n}(\beta, e_i)e_i\right\| \le \frac{1}{\lambda_{n+1}}\|\beta\| . \tag{4.2.13}$$

因为$\|\beta\|$是一个固定的数，所以当$n \to \infty$时

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\alpha - \sum_{i=1}^{n}(\alpha, e_i)e_i\right\| = 0 .$$

命题 4.2.5 若λ是Δ的特征值并且$c > -\lambda$，那么对于$\forall \beta \in E^{p}(M)$，方程$(\Delta + cI)\alpha = \beta$有解。

证明 设λ_1, λ_2为Δ的特征值且$\lambda_1 \ne \lambda_2$，则对于$\forall \beta, \alpha \in E^{p}(M)$有

$$\Delta\beta = \lambda_1\beta, \Delta\alpha = \lambda_2\alpha . \tag{4.2.14}$$

即可得到$\Delta^2\alpha = \lambda_2\Delta\alpha$，对于方程$(\Delta + cI)\alpha = \beta$有

$$\Delta^2\alpha + \Delta cI\alpha = \Delta\beta .$$

由(4.2.14)和 Laplace 算子特征值的定义得

$$\lambda_2\Delta\alpha + \Delta cI\alpha = \lambda_1\beta .$$

把方程化为

$$\Delta\alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + c}\beta .$$

根据弱解存在和 Hodge 分解定理易知，存在一个线性泛函 $\iota : E^p(M) \to \mathbb{R}$ 是方程 $\Delta\alpha = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2 + c}\beta$ 的弱解。反过来由定理 3.5 得，对于任意的 $\beta \in E^p(M)$，存在一个 $\alpha \in E^p(M)$ 是方程 $\Delta\alpha = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2 + c}\beta$ 的常解。

因此对于 $\forall\beta \in E^p(M)$ 存在一个 $\alpha \in E^p(M)$ 使得 $(\Delta + cI)\alpha = \beta$ 有解。

5. 拉普拉斯方程

5.1. 拉普拉斯方程的迭代解

本节主要应用格林算子和 Laplace 算子 Δ 的特征值以及 Hodge 分解定理求解拉普拉斯方程，讨论拉普拉斯方程解的存在性问题。

性质 5.1.1 设 M 是紧黎曼流形，λ_n 是 Δ 的特征值，对 $\forall v_n \in E^p(M)$ 有 $\Delta v_n = \lambda_n v_n$。

因为 Δ 在 $E^p(M)$ 上的特征值满足 $0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n \le \cdots$，$\lambda_n \to +\infty$，所以根据定理 3.4 和定理 3.5，设 Δ 的特征值为

$$\lambda_n = \inf_{v_n \in E^p(M)} \frac{(dv_n, dv_n)}{(v_n, v_n)} = \frac{(dv_n, dv_n)}{(v_n, v_n)}, \tag{5.1.1}$$

由 Sobolve 不等式，对 $\forall\varphi \in E^p(M)$，$t \in \mathbb{R}$ 有

$$\frac{(d(v_n + t\varphi), d(v_n + t\varphi))}{(v_n + t\varphi, v_n + t\varphi)} \ge \lambda_n .$$

这个表达式关于 t 是可微的，在 $t = 0$ 时有极小值，所以对于 $\forall\varphi \in E^p(M)$ 有

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{(d(v_n + t\varphi), d(v_n + t\varphi))}{(v_n + t\varphi, v_n + t\varphi)}\bigg|_{t=0} \\
&= 2\left(\frac{(dv_n, d\varphi)}{(v_n, v_n)} - \frac{(dv_n, dv_n)}{(v_n, v_n)} - \frac{(v_n, \varphi)}{(v_n, v_n)}\right) \\
&= 2\left((dv_n, d\varphi) - \lambda_n (v_n, \varphi)\right) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{5.1.2}$$

又 $(v_i, v_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, \cdots, n-1$，即有 $(v_n, v_i) = 0$，且

$$(dv_n, dv_i) = (dv_i, dv_n) = \lambda_i (v_i, v_n) = 0 .$$

因此，对于任意的 $\varphi \in E^p(M)$

$$(dv_n, d\varphi) - \lambda (v_n, \varphi) = 0 .$$

这意味着 v_n 是方程

$$\int_M dv_n(x) d\varphi(x) \sqrt{G} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \lambda_n \int_M v_n \varphi(x) \sqrt{G} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

的解。因此 $v_n \in \mathbb{C}^\infty(M)$ 且 $\Delta v_n = \lambda_n v_n$。

命题 5.1.2 如果在 n 维光滑紧定向黎曼流形 M 上有 $\Delta^2\alpha = \Delta(\Delta\alpha)$，那么对于任意的 $\beta \in E^p(M)$，双拉普拉斯方程 $\Delta^2\alpha = \beta$ 有解。

证明 设 $\exists\beta = \Delta\gamma \in E^p(M)$，则对于 $\Delta^2\alpha = \Delta(\Delta\alpha) = \beta$ 有

$$\Delta\gamma = \beta .$$

由弱解存在性和定理 3.7 知存在一个线性泛函 $\iota: E^p(M)\to\mathbb{R}$ 是 $\Delta\gamma=\beta$ 的弱解，并且根据定理 3.5 可以知道 $\exists\gamma\in E^p(M)$ 是 $\Delta\gamma=\beta$ 的常解。

同样地，对于给定的 $\gamma\in E^p(M)$，方程 $\Delta\alpha=\gamma$ 存在 $\alpha\in E^p(M)$ 是方程 $\Delta\alpha=\gamma$ 的解。因此，根据定理 3.5 和弱解存在性知，对 $\forall\beta\in E^p(M)$，总存在一个 $\alpha\in E^p(M)$ 使得 $\Delta^2\alpha=\beta$ 成立。所以方程 $\Delta^2\alpha=\beta$ 有解。

性质 5.1.3 设 λ 为 Δ 的特征值，对于任意的 $\omega\in E^p(M)$，对方程 $\Delta\omega=\lambda\omega$ 依次进行迭代有

$$\Delta^2\omega=\lambda^2\omega,\Delta^3\omega=\lambda^3\omega,\cdots,\Delta^t\omega=\lambda^t\omega.$$

对于任意的 $\omega\in E^p(M)$，从特征值为 λ 的特征方程出发，$\Delta^2\omega=\lambda\Delta\omega=\lambda^2\omega$，不断进行迭代，迭代足够的次数后，得到稳定的数值，总有 $\Delta^t\omega=\lambda\Delta^{t-1}\omega=\lambda^t\omega(1\le t\le n)$。

由定理 3.7 得

$$\Delta(E^p(M))=\Delta^2(E^p(M))\oplus\Delta(\mathcal{H}^p(M))=\Delta^2(E^p(M)). \tag{5.1.3}$$

因此 $\Delta(E^p(M))$ 的像与 $\Delta^2(E^p(M))$ 是一样的，即 $\operatorname{Im}\Delta=\operatorname{Im}\Delta^2$。对(5.1.3)依次递推迭代下去有

$$\operatorname{Im}\Delta=\operatorname{Im}\Delta^2=\cdots=\operatorname{Im}\Delta^t.$$

其中 $0<t\le n$。根据它们在向量空间的维数关系也可以得到

$$0<\dim\ker\Delta\le\cdots\le\dim\ker\Delta^{n+1}\le n. \tag{5.1.4}$$

又因为 $\Delta(E^p(M))=\Delta^2(E^p(M))=\cdots=\Delta^t(E^p(M))$，有 $\ker\Delta=\cdots=\ker\Delta^t$。

根据 Hodge 分解定理，对于方程 $\Delta^t\omega=\lambda^t\omega$，利用(5.1.3)和(5.1.4)进行迭代，发现当 $k=2$ 时出现迭代解。

推论 5.1.4 在外微分形式上对任意的 $\omega\in E^p(M)$ 方程 $\Delta^k\alpha=\omega,k\ge1$ 有周期解。

证明 1°首先 $k=1$ 时 $\Delta\alpha=\omega$ 成立，根据正则性定理和弱解存在性知道此方程有解。

对于 $k\ge2$ 的情形，把 k 分为奇偶数进行讨论，对不同的 k 值进行研究。

2°当 $k\ge2$ 的偶数时，考虑整体内积 $(\Delta^k\omega,\omega)$。由 $\Delta^k\alpha=\omega$ 有

$$(\Delta^k\alpha,\omega)=(\omega,\omega)=\|\omega\|^2.$$

结合 Δ 为自伴随算子和 $\Delta^k\alpha=\Delta(\Delta^{k-1}\alpha)$ 得

$$\begin{aligned}\|\omega\|^2&=(\Delta^k\alpha,\omega)=(\Delta(\Delta^{k-1}\alpha),\omega)=(\Delta^{k-1}\alpha,\Delta\omega)\\&=(\Delta^{k-2}\alpha,\Delta^2\omega)=(\Delta^{k-3}\alpha,\Delta^3\omega)\\&=\cdots=\left(\Delta^{\frac{k}{2}}\alpha,\Delta^{\frac{k}{2}}\omega\right)\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

此时 $\Delta^{\frac{k}{2}}\alpha=\Delta^{\frac{k}{2}}\omega=\omega$。

如若考虑 $k=2^p$，逐步实施上述对半方法，有

$$\omega=\Delta^{2^p}\alpha=\Delta^{2^{p-1}}\alpha=\cdots=\Delta^{2^2}\alpha=\Delta^2\alpha=\Delta\alpha. \tag{5.1.6}$$

仔细观察发现周期为 1。

若 k 为偶数但不是 2^p 次形式，经过若干次折半过程，有

$$\omega=\Delta^k\alpha=\Delta^{\frac{k}{2}}\alpha=\cdots=\Delta^{\tilde{k}}\alpha.$$

这里 $\tilde{k}$ 为最小偶数。

所以在 k 为 $k>2$ 的偶数时，得到 $k/2$ 拉普拉斯算子的模为 ω，且若要出现周期解，除非 $k=2$。

3° k 为奇数的情形。首先 $k=3$ 时有 $\Delta^3\alpha=\omega$，利用 Δ 为自伴随算子得

$$\|\omega\|^2=(\omega,\omega)=\left(\omega,\Delta^3\alpha\right)=\left(\Delta\omega,\Delta^2\alpha\right)=\left(\Delta(\Delta\omega),\Delta\alpha\right). \tag{5.1.7}$$

于是 $\Delta\alpha=\omega$ 和 $\Delta^2\omega=\omega$。

同理，对于 $\Delta^5\alpha=\omega$ 有

$$\|\omega\|^2=(\omega,\omega)=\left(\omega,\Delta^5\alpha\right)=\left(\Delta\omega,\Delta^4\alpha\right)=\cdots=\left(\Delta\left(\Delta^2\omega\right),\Delta^2\alpha\right). \tag{5.1.8}$$

此时有 $\Delta^2\alpha=\omega$ 和 $\Delta^3\omega=\omega$。不断地对 k 为奇数时进行上述方法计算，发现总有 $\Delta^{\frac{k-1}{2}}\alpha=\omega$，且 $\Delta^{\frac{k+1}{2}}\omega=\omega$。并且方程 $\Delta^{\frac{k+1}{2}}\omega=\omega$ 在 $k=3$ 时方程出现不动解 ω。

如果不考虑把 k 分为奇偶数进行讨论，对它进行迭代求解，则有下面的结果。

当 $k=1$ 时，方程 $\Delta\alpha=\omega$ 有解。

对于 $k\ge 2$ 的情况，利用迭代 $\Delta^k\alpha=\Delta\left(\Delta^{k-1}\alpha\right)$，不断的进行迭代发现，总有

$$\Delta\alpha=\Delta^2\alpha=\cdots=\Delta^{k-1}\alpha=\Delta^k\alpha=\omega.$$

此时，方程的特征值是为 1 的 p 次形式 $\omega\in E^p(M)$，利用定理 3.5 和定理 3.7 知道，该方程总是有解，并且在 $k=2$ 时出现周期解，且周期为 1。

因此，对于方程 $\Delta^k\alpha=\omega,k\ge 1$，我们总能找到一个 $\alpha\in E^p(M)$ 使得方程有周期解。

5.2. 待解决的问题

在这一部分中我们提出一些值得进一步研究的问题。

1) 设 Ω 是有边界的分段光滑有限区域，λ_k 是第 k 个 Laplace 算子狄利克雷特征值，则有下列估计式成立

$$\lambda_k\ge\frac{4\pi^2}{\left(\omega_n Vol\Omega\right)^{\frac{2}{n}}}k^{\frac{2}{n}}.$$

其中 ω_n 是 $\mathbb{R}^n$ 上单位球的体积，这就是 Pólya 猜想。Pólya 本人证明了当 $k=2$ 时有

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\le 3,\Omega\subset\mathbb{R}^2.$$

但是关于 Pólya 猜想是否与格林算子和 Laplace 算子 Δ 存在着直接的关系，即能否利用 Pólya 猜想计算高阶拉普拉斯方程的解。

2) 在复流形上 M，要使方程 $\Delta\omega=\beta$ 有解，是否要求 ω,β 全纯？即 $\bar\partial\omega=0$，$\bar\partial\beta=0$。

3) 如何以 $\Delta\omega=\beta,\Delta^2\omega=\alpha,\cdots,\Delta^k\omega=\gamma$ 为主线，揭示 Hodge 分解定理、格林算子的妙用？或者可附加什么条件以使得利用谱分析得到形式幂级数解。

4) 设 Ω_1 和 Ω_2 是 $\mathbb{R}^n$ 上的两个光滑区域，并且 Laplace 算子作用于 Ω_1 和 Ω_2 的具有零边界条件的函数且相同的特征值(计算重数)，那么 Ω_1 和 Ω_2 是否等度同胚。

基金项目

课题部分受到项目 12061014、2019GXNSFAA245043 和 gxun-chxs2022082 的资助。

参考文献

[1] Warner, F.W. (1983) Foundations of Differentiable Manifold and Lie Groups. Springer-Verlag, New York.

[2] 伍鸿熙, 陈维桓. 黎曼几何选讲[M]. 北京: 北京大学出版社, 1993.

[3] 余扬政, 冯承天. 物理学中的几何方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.

[4] 李晓静, 周友明, 陈绚青, 等. 一类带 p-Laplace 算子的高阶 Rayleigh 型泛函微分方程周期解存在性问题[J]. 系统科学与数学, 2013, 33(3): 362-372.

[5] 张立新, 崔海英, 玄祖兴. 具 p-Laplacian 算子的四阶三点边值问题的迭代解[J]. 北京联合大学学报(自然科学版), 2009, 23(4): 64-67.

[6] Schwarz, G. (1995) Hodge Decomposition—A Method for Solving Boundary Value Problems. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1607, Springer-Verlag, Berlin.

[7] 张申贵. 一类分数阶 p(x)-拉普拉斯方程的多重解[J]. 浙江大学学报(理学版), 2020, 47(5): 535-540.

[8] 杨飒, 魏公明. 更高分数阶 p-Laplacian 方程的特征值问题[J]. 理论数学, 2023, 13(3): 526-532.

[9] 徐森林, 薛春华. 微分几何[M]. 北京: 中国科学技术大学出版社, 1997.

[10] F.W.瓦内尔. 微分流形与李群基础[M]. 谢孔彬, 谢云鹏, 译. 北京: 科学出版社, 2008.