Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1207-1218
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135124

非线性适型分数阶微分方程边值问题的可控性和Ulam稳定性

郑雅丹，贾　梅

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2023年4月10日；录用日期：2023年5月12日；发布日期：2023年5月19日

摘　要

研究了一类具有适型分数阶导数的非线性微分方程边值问题的可控性以及Ulam稳定性，通过建立恰当的控制函数，运用Krasnoselskii's不动点定理得到了微分方程边值问题的可控性。同时得到了微分系统具有Ulam稳定性的新判据，最后给出例子说明了结果的可行性。

关键词

分数阶微分方程，适型导数，不动点定理，可控性，Ulam稳定性

Controllability and Ulam Stability of Boundary Value Problems for Nonlinear Conformable Fractional Differential Equations

Yadan Zheng, Mei Jia

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Apr. 10th, 2023; accepted: May 12th, 2023; published: May 19th, 2023

Abstract

In this paper, we study the controllability and Ulam stability of boundary value problems for a class of nonlinear differential equations with conformable fractional derivatives. By establishing appropriate control functions, we obtain the controllability of boundary value problems for diffe-

文章引用: 郑雅丹, 贾梅. 非线性适型分数阶微分方程边值问题的可控性和 Ulam 稳定性[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1207-1218. DOI: 10.12677/pm.2023.135124

rential equations using Krasnoselskii's fixed point theorem. At the same time, a new criterion for Ulam stability of differential systems is obtained. Finally, an example is given to illustrate the feasibility of the results.

Keywords

Fractional Order Differential Equations, Conformable Derivative, Fixed Point Theorem, Controllability, Ulam Stability

1. 引言

近年来，随着科学技术不断发展及广泛应用，许多领域中出现的问题越来越多地涉及分数阶微积分，作为整数阶微积分的延伸与扩展，已提出多种分数阶算子，比如我们所熟知的 Riemann-Liouville 分数阶导数和 Caputo 分数阶导数等。为了克服非局部算子在实际应用中的局限性，Khalil 等人在 2014 年引入了适型分数阶导数的概念[1]，作为局部分数阶导数，其基本满足整数阶导数所具备的所有性质。随后，Abdeljawad 在 Khalil 的基础上，进一步研究与完善了适型分数阶导数的性质，研究了 Taylor 幂级数展开、Gronwall 不等式、Laplace 变换等。这也为后人进一步研究适型分数阶微分方程奠定了基础[2]。

随着分数阶微积分的发展，分数阶微分方程问题得到了广泛的研究，无论是在理论上还是应用上都涌现了很多专著和论文[3]-[8]。其应用领域也不仅仅局限于数学理论，逐渐延展到其他学科，例如自动控制、电磁学、材料科学等。分数阶控制理论是基于分数阶微积分发展起来的，其可控性的研究是控制理论中的一个研究热点。在 R. E. Kalman 研究中定性地描述了输入 $u(t)$ 对状态 $x(t)$ 的控制能力[9]。

有关分数阶微分方程可控性问题的研究，常用的处理方法是不动点分析法。例如，Kumer 在文献[10]利用 Schauder 不动点定理和压缩映射原理得到了一类半线性分数阶时滞控制系统的近似可控性。王小文等利用适型 Gramian 矩阵和秩判据、Krasnoselskii 不动点定理等方法研究了一类非线性适型分数阶微分系统的可控性[11]。

众所周知，国内外学术界对微分方程初值问题可控性的研究取得的发展是迅速的，同时也取得了不少丰硕的成果，参见文献[12] [13] [14] [15] [16]。而微分方程边值问题作为微分方程研究的另一个重要分支，对于其可控性的研究还较少，因此对微分方程边值问题的可控性进行研究就变得非常有意义。然而，对微分方程边值问题可控性的研究主要围绕整数阶系统，文献[17]研究了一类二阶非线性系统三点边值问题的可控性。

对于系统模型而言，其稳定性的研究也非常重要。而在研究初期，大多是围绕李雅普诺夫稳定性进行研究。直至 1940 年，Ulam 提出了关于函数方程的稳定性[18]，其结果被 Rassias 推广[19]，此后也被许多学者用于研究微分方程的稳定性[20] [21] [22]。

Li Mengmeng 等人运用常数变易法在文献[23]研究了常系数适型分数阶微分方程解的存在性和 Ulam 稳定性。Wan Fan 等人在文献[24]中研究了具有反周期边界条件的适型分数阶脉冲微分方程 Ulam-Hyers 稳定性。

本文研究具有适型分数导数的非线性微分方程边值问题

$$\begin{cases} D_0^{\alpha}x(t)+Bu(t)+f(t,x(t))=0, t\in[0,1], \\ x(0)=x(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

可控性及 Ulam 稳定性，其中，$1<\alpha\le 2$，D_0^{α} 表示适型分数阶导数，$f:[0,1]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，$B\in\mathbb{R}^{n\times r}$，控制函数 $u\in L^2([0,1],\mathbb{R}^r)$。

本文的结构如下，第二部分，预备知识，主要给出本文所用的定义和后面定理所需要的引理；第三部分，利用 Krasnoselskii's 不动点定理得到微分系统的可控性；第四部分，讨论该微分系统的 Hyers-Ulam 稳定性；第五部分，给出一个具体的例子来阐述对应的抽象结果的可行性。

2. 准备工作

定义 2.1 [2]给定函数 $\varphi:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$，$0<\beta\le 1$，则 φ 的 β 阶适型分数阶导数为：

$$D_a^{\beta}\varphi(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi\left(t+\varepsilon(t-a)^{1-\beta}\right)-\varphi(t)}{\varepsilon},\quad t>a,$$

若 $D_a^{\beta}f(t)$ 在 (a,b) 上存在，则

$$D_a^{\beta}f(a)=\lim_{t\to a^+}D_a^{\beta}f(t).$$

定义 2.2 [2]设 $\beta\in(n,n+1]$，其中 n 为正整数，令 $\rho=\beta-n$，对给定的函数 $\varphi:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$，若 $\varphi^{(n)}$ 存在，则关于 φ 的适型分数阶导数为：

$$D_a^{\beta}\varphi(t)=D_a^{\rho}\varphi^{(n)}(t).$$

特殊地，当 $1<\beta\le 2$ 时，令 $\rho=\beta-1$，对于给定函数 $\varphi:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$，$\varphi$ 的 β 阶适型分数阶导数为：

$$D_a^{\beta}\varphi(t)=D_a^{\rho}\varphi'(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi'\left(t+\varepsilon(t-a)^{1-\beta}\right)-\varphi'(t)}{\varepsilon},\quad t>a.$$

定义 2.3 [2]设 $\beta\in(n,n+1]$，n 为非负整数，令 $\rho=\beta-n$，则函数 $\varphi:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 的 β 阶适型分数阶积分为：

$$I_a^{\beta}\varphi(t)=I_a^{n+1}\left((t-a)^{\rho-1}\varphi(t)\right)=\frac{1}{n!}\int_a^t(t-s)^n(s-a)^{\rho-1}\varphi(s)\mathrm{d}s.$$

特别地，对于 $\beta\in(1,2]$，令 $\rho=\beta-1$，则关于函数 $\varphi:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ 的 β 阶适型分数阶积分为：

$$I_a^{\beta}\varphi(t)=\int_a^t(t-s)(s-a)^{\rho-1}\varphi(s)\mathrm{d}s.$$

引理 2.4 [2]设 φ 是 $[a,+\infty)$ 上连续的函数，且 $\beta\in(n,n+1]$，则对所有 $t>a$ 有：

$$D_a^{\beta}I_a^{\beta}\varphi(t)=\varphi(t).$$

进一步，若 φ 是 n 次可微的，则有：

$$I_a^{\beta}D_a^{\beta}\varphi(t)=\varphi(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{\varphi^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}.$$

引理 2.5 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$y\in C([0,1],\mathbb{R}^n)$，则线性分数阶微分方程边值问题：

$$\begin{cases} D_0^{\alpha}x(t)+y(t)=0, t\in[0,1], \\ x(0)=x(1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

的唯一解是

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)y(s)\mathrm{d}s,$$

其中

$$G(t,s)=diag\left(G_1(t,s),G_2(t,s),\cdots,G_n(t,s)\right),$$

$$G_i(t,s)=\begin{cases}t(1-s)s^{\alpha-2}, & 0\le t<s\le 1,\\ (1-t)s^{\alpha-1}, & 0\le s\le t\le 1.\end{cases} \tag{3}$$

证明：对于边值问题

$$\begin{cases}D_0^\alpha x_i(t)+y_i(t)=0, t\in[0,1], i=1,2,\cdots,n,\\ x_i(0)=x_i(1)=0\end{cases}$$

进行积分为

$$I_0^\alpha D_0^\alpha x_i(t)=-I_0^\alpha y_i(t)=-\int_0^t (t-s)s^{\alpha-2}y_i(s)\mathrm{d}s,$$

而

$$I_0^\alpha D_0^\alpha x_i(t)=x_i(t)+c_i+d_i t,$$

对于 $c_i,d_i\in\mathbb{R}$，当 $x_i(0)=x_i(1)=0$ 可得到 $c_i=0$，$d_i=-\int_0^1(1-s)s^{\alpha-2}y_i(s)\mathrm{d}s$。因此该线性微分方程边值问题的唯一解是

$$\begin{aligned}x_i(t)&=-\int_0^t(t-s)s^{\alpha-2}y_i(s)\mathrm{d}s+t\int_0^1(1-s)s^{\alpha-2}y_i(s)\mathrm{d}s\\&=\int_0^1 G_i(t,s)y_i(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

所以，$x_i(t)=\int_0^1 G_i(t,s)y_i(s)\mathrm{d}s$。证毕。

由引理 2.5 可得：

引理 2.6 非线性适型分数阶微分方程边值问题(1)与积分方程

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)\left(f(s,x(s))+Bu(s)\right)\mathrm{d}s,$$

等价。

引理 2.7 由(3)式定义的 Green 函数 $G_i(t,s)$，$i=1,2,\cdots,n$，满足以下性质：

1) 对任意的 $t,s\in(0,1)$，都有 $G_i(t,s)>0$，

2) $\max\limits_{0\le t\le 1}G_i(t,s)=G_i(s,s)=(1-s)s^{\alpha-1}$，$s\in(0,1)$。

证明：1) $G_i(t,s)$ 表达式可知，对任意的 $t,s\in(0,1)$，有 $G_i(t,s)>0$。

2) 给定的 $s\in(0,1)$，对 $G_i(t,s)$ 求关于 t 的偏导，

$$\frac{\partial G_i(t,s)}{\partial t}=\begin{cases}s^{\alpha-2}(1-s), & 0\le t<s\le 1,\\ -s^{\alpha-1}, & 0\le s\le t\le 1.\end{cases}$$

由于当 $t<s$ 时，我们有 $\frac{\partial G_i(t,s)}{\partial t}>0$，因此可知 $G_i(t,s)$ 在 $t\le s$ 时是递增的，同理可知 $G_i(t,s)$ 在在 $s\le t$ 是递减的。所以，$\max\limits_{0\le t\le 1}G_i(t,s)=G_i(s,s)=(1-s)s^{\alpha-1}$，证毕。

引理 2.8 [25] (Krasnoselskii's fixed point theorem)令 Z 是 Banach 空间，E 是 Z 上的有界闭凸集，映射 $P_i: E \to Z(i=1,2)$满足

1) 对任意 $x,y\in E$，有 $P_1x+P_2y\in E$。

2) 算子 P_1 是一个压缩的，P_2 在 E 上是全连续的。

则 P_1+P_2 在 E 上至少有一个不动点。

3. 可控性分析

设 $\mathbb{R}^m$ 为 m 维欧式空间，其中 $m=n,r$。对任意给定的向量 $\omega\in\mathbb{R}^m$，引进 ω 的范数为 $\|\omega\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^2}$，对矩阵 $M=\left[a_{ij}\right]\in\mathbb{R}^{n\times m}$，引进矩阵范数 $\|M\|=\max_{\|x\|=1}\|Mx\|$。

定义空间 $E=\left\{x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}} \mid x_i\in C\left([0,1],\mathbb{R}\right)\right\}$，取范数 $\|x\|_E=\max_{0\le t\le 1}\|x(t)\|$，则 E 是一个 Banach 空间。

定义 3.1 如果对给定的 $\tau\in(0,1)$，$b\in\mathbb{R}^n$，若存在一个控制 $u\in L^2\left([0,1],\mathbb{R}^r\right)$，使得系统(1)的解 x 满足 $x(\tau)=b$，则称系统(1)是可控的。

我们列举出本节证明中所需要的假设条件：

(H_1) $K=\int_0^1 G(\tau,s)BB^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}(\tau,s)\mathrm{d}s$ 为正定矩阵。

(H_2)存在非负函数 $l\in C\left([0,1],\mathbb{R}^+\right)$，对 $t\in[0,1]$ 及任意的 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 都有：

$$\left\|f(t,y)-f(t,x)\right\|\le l(t)\|y-x\|,$$

定义一个集合

$$N=\left\{u\in L^2\left([0,1],\mathbb{R}^r\right) \mid \int_0^1 G(\tau,s)Bu(s)\mathrm{d}s=0\right\},$$

则 N 为 $L^2\left([0,1],\mathbb{R}^r\right)$ 非空闭子空间。考虑商空间 $L^2\left([0,1],\mathbb{R}^r\right)/N$，定义其范数 $\|u\|=\inf_{\upsilon\in N}\|u-\upsilon\|_{L^2}$，为 Banach 空间。

定义算子 $W: L^2\left([0,1],\mathbb{R}^r\right)/N\to\mathbb{R}^n$

$$Wu=\int_0^1 G(\tau,s)Bu(s)\mathrm{d}s,$$

则 W 为线性算子。

下证当(H_1)成立时 W^{-1} 存在，即证明 $W: L^2\left([0,1],\mathbb{R}^r\right)/N\to\mathbb{R}^n$ 是双射。

1) 证明算子 $W: L^2\left([0,1],\mathbb{R}^r\right)/N\to\mathbb{R}^n$ 为单射。

设 $u_1,u_2\in L^2\left([0,1],\mathbb{R}^r\right)/N$，且 $u_1\ne u_2$，则有

$$Wu_1-Wu_2=\int_0^1 G(\tau,s)B\left(u_1(s)-u_2(s)\right)\mathrm{d}s,$$

若 $W\left(u_1-u_2\right)=0$，则 $u_1-u_2\in N$，这与题设矛盾，故 $Wu_1\ne Wu_2$，由此 W 是单射得证。

2) 证明算子 $W: L^2\left([0,1],\mathbb{R}^r\right)/N\to\mathbb{R}^n$ 为满射。

记 $X=L^2\left([0,1],\mathbb{R}^r\right)/N$，$Y=\mathbb{R}^n$ 则 $\left(X,(\cdot,\cdot)_X\right)$，$\left(Y,(\cdot,\cdot)_Y\right)$ 为 Hilbert 空间，其中 $(\cdot,\cdot)_X$ 为 X 上内积，$(\cdot,\cdot)_Y$ 为 Y 上的 Euclid 内积，则 $W\in L(X,Y)$。有如下性质：

对于算子 W，存在唯一的伴随算子 $W^*: Y\to X$ 为连续线性算子，对任意 $u\in X$，$\gamma\in Y$，满足 $(Wu,\gamma)_Y=\left(u,W^*\gamma\right)_X$，$\left\|W^*\right\|_{L(Y,X)}=\|W\|_{L(X,Y)}$。

② $\ker W=\left(\operatorname{Im}W^*\right)^{\perp}$，$\ker W^*=\left(\operatorname{Im}W\right)^{\perp}$，

$$X = \ker W \oplus \overline{\operatorname{Im} W^*} = \ker W \oplus (\ker W)^{\perp},$$

$X = \ker W \oplus \overline{\operatorname{Im} W^*} = \ker W \oplus \left(\ker W\right)^{\perp}$。

则对任意的 $\gamma \in Y$ 和 $u \in X$ 有

$$\begin{aligned}(Wu,\gamma) &= \left(\int_0^1 G(\tau,s)Bu(s)\mathrm{d}s,\gamma\right)\\ &= \int_0^1\left(u(s),\left(G(\tau,s)B\right)^{\mathrm{T}}\gamma\right)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

根据伴随算子性质 $(Wu,\gamma)=\left(u,W^*\gamma\right)$，可得

$$W^*\gamma = \left(G(\tau,s)B\right)^{\mathrm{T}}\gamma. \tag{4}$$

而 $Y=\operatorname{Im}W \oplus \left(\operatorname{Im}W\right)^{\perp} = \operatorname{Im}W \oplus \operatorname{Ker}W^*$，因此若要得到算子 W 的满射性，则需满足 $\operatorname{Ker}W^*=\{0\}$。

对任意 $\gamma \in Y\setminus\{0\}$，有

$$\begin{aligned}\int_0^1\left\|W^*\gamma\right\|^2\mathrm{d}s &= \int_0^1\left\|\left(G(\tau,s)B\right)^{\mathrm{T}}\gamma\right\|^2\mathrm{d}s\\ &= \left(\int_0^1 G(\tau,s)BB^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}(\tau,s)\gamma\mathrm{d}s,\gamma\right)\\ &= (K\gamma,\gamma)\\ &= \gamma^{\mathrm{T}}K\gamma.\end{aligned}$$

根据(H_1)，K 为正定的，有 $\int_0^1\left\|\left(G(\tau,s)B\right)^{\mathrm{T}}\gamma\right\|^2\mathrm{d}s>0$。因此，$W$ 是双射，于是存在逆算子，$W^{-1}:\mathbb{R}^n \to L^2\left([0,1],\mathbb{R}^r\right)/N$。

对任意 $u\in X$，有 $u=u_1+u_2$，其中 $u_1\in\operatorname{Ker}W$，$u_2\in\overline{\operatorname{Im}W^*}$，则

$$Wu = Wu_1 + Wu_2 = Wu_2.$$

由(4)式对任意 $\gamma\in Y$，取 $u(s)=\left(G(\tau,s)B\right)^{\mathrm{T}}\gamma$，则有

$$v = Wu = W\left(\left(G(\tau,s)B\right)^{\mathrm{T}}\gamma\right) = \int_0^1 G(\tau,s)BB^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}(\tau,s)\gamma\mathrm{d}s = K\gamma,$$

由于 K 正定，所以 K 可逆。$\gamma=K^{-1}v$，进一步：$u(s)=\left(G(\tau,s)B\right)^{\mathrm{T}}K^{-1}v$。

$$\begin{aligned}\int_0^1\left\|u(s)\right\|^2\mathrm{d}s &= \int_0^1\left\|\left(G(\tau,s)B\right)^{\mathrm{T}}K^{-1}v\right\|^2\mathrm{d}s\\ &= \int_0^1\left(\left(G(\tau,s)B\right)^{\mathrm{T}}K^{-1}v,\left(G(\tau,s)B\right)^{\mathrm{T}}K^{-1}v\right)\mathrm{d}s\\ &= \int_0^1\left(G(\tau,s)B\left(G(\tau,s)B\right)^{\mathrm{T}}K^{-1}v,K^{-1}v\right)\mathrm{d}s\\ &= \left(v,K^{-1}v\right).\end{aligned}$$

而 $\int_0^1\left\|u(s)\right\|^2\mathrm{d}s \ge \left\|W^{-1}v\right\|^2$。因此，

$$\left\|W^{-1}\right\| = \sup_{\|v\|\neq 0}\frac{\left\|W^{-1}v\right\|}{\|v\|} \le \sup_{\|v\|\neq 0}\frac{\sqrt{\left(v,K^{-1}v\right)}}{\|v\|} \le \sup_{\|v\|\neq 0}\frac{\sqrt{\|v\|^2\left\|K^{-1}\right\|}}{\|v\|} = \sqrt{\left\|K^{-1}\right\|}.$$

为方便讨论，记：$L=\sup_{t\in[0,1]}\left|l(t)\right|$，$Q=\sup_{t\in[0,1]}\left\|f(t,0)\right\|$，$M=\|B\|\sqrt{\left\|K^{-1}\right\|}$。

定理 3.2 在假设(H$_1$)，(H$_2$)成立的情况下，如果下列条件成立：

$$L+\sqrt{L^2+4LM}<2\alpha(\alpha+1).$$

则系统(1)是可控的。

证明：如果 x 是非线性微分方程系统(1)的解，且满足 $x(\tau)=b$，由引理 2.6，则有：

$$b=x(\tau)=\int_0^1 G(\tau,s)\big(Bu(s)+f(s,x(s))\big)\mathrm{d}s,$$

因此，控制函数 u 应该满足：

$$Wu=\int_0^1 G(\tau,s)Bu(s)\mathrm{d}s=b-\int_0^1 G(\tau,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s.$$

由于(H$_1$)成立，则 W^{-1} 存在，可得控制函数

$$u(t)=W^{-1}\Big(b-\int_0^1 G(\tau,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\Big)(t).$$

定义算子 $\Phi:E\to E$

$$\begin{aligned}(\Phi x)(t)&=\int_0^1 G(t,s)\big(Bu(s)+f(s,x(s))\big)\mathrm{d}s\\&=\int_0^1 G(t,s)\Big(BW^{-1}\Big(b-\int_0^1 G(\tau,v)f(v,x(v))\mathrm{d}v\Big)(s)+f(s,x(s))\Big)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

如果该算子有一个不动点 x 存在，那么不动点 x 就是系统(1)满足 $x(\tau)=b$ 的解，即系统(1)是可控的。

选取 $\varsigma=\dfrac{\alpha(\alpha+1)M\|b\|+Q(\alpha(\alpha+1)+M)}{\alpha^2(\alpha+1)^2-L(\alpha(\alpha+1)+M)}$，令 $\Omega=\{x\in E:\|x\|_E\le\varsigma\}$ 是 E 中的有界闭子集。

证明 $\Phi:\Omega\to\Omega$。

$$\begin{aligned}\|(\Phi x)(t)\|&\le\Big\|\int_0^1 G(t,s)BW^{-1}\Big(b-\int_0^1 G(\tau,v)f(v,x(v))\mathrm{d}v\Big)(s)\mathrm{d}s\Big\|\\&\quad+\Big\|\int_0^1 G(t,s)\big(f(s,x(s))-f(s,0)\big)\mathrm{d}s\Big\|+\Big\|\int_0^1 G(t,s)f(s,0)\mathrm{d}s\Big\|\\&\le M\Big(\|b\|+\frac{L}{\alpha(\alpha+1)}\|x\|_E+\frac{Q}{\alpha(\alpha+1)}\Big)\int_0^1\|G(t,s)\|\mathrm{d}s\\&\quad+\|x\|_E\int_0^1\|G(s,s)l(s)\|\mathrm{d}s+Q\int_0^1\|G(t,s)\|\mathrm{d}s\\&\le\frac{M}{\alpha(\alpha+1)}\Big(\|b\|+\frac{L}{\alpha(\alpha+1)}\|x\|_E+\frac{Q}{\alpha(\alpha+1)}\Big)+\frac{L}{\alpha(\alpha+1)}\|x\|_E+\frac{Q}{\alpha(\alpha+1)}\\&\le\varsigma.\end{aligned}$$

因此，$\|\Phi x\|_E\le\varsigma$，从而 $\Phi(\Omega)\subseteq\Omega$。

分别定义算子 $\Phi_1:\Omega\to E$ 和 $\Phi_2:\Omega\to E$

$$(\Phi_1 x)(t)=\int_0^1 G(t,s)BW^{-1}\Big(b-\int_0^1 G(\tau,v)f(v,x(v))\mathrm{d}v\Big)(s)\mathrm{d}s,$$

$$(\Phi_2 x)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s.$$

2) 证明 Φ_1 在 Ω 上是压缩映射。

对任意的 $x,y\in\Omega$，则

$$\begin{aligned}
&\left\|\Phi_1 x(t)-\Phi_1 y(t)\right\| \\
&=\left\|\int_0^1 G(t,s) B\left(W^{-1}\left(\eta-\int_0^1 G(\tau,\nu) f(\nu,x(\nu))\mathrm{d}\nu\right)(s)-W^{-1}\left(\eta-\int_0^1 G(\tau,\nu) f(\nu,y(\nu))\mathrm{d}\nu\right)(s)\right)\mathrm{d}s\right\| \\
&\le M\int_0^1 G(t,s)\left\|\int_0^1 G(\tau,\nu)\big(f(\nu,x(\nu))-f(\nu,y(\nu))\big)\mathrm{d}\nu\right\|\mathrm{d}s \\
&\le M\int_0^1 G(t,s)\int_0^1\left\|G(\tau,\nu) l(\nu)\right\|\mathrm{d}\nu\|x-y\|_E\,\mathrm{d}s \\
&\le \frac{LM}{\alpha^2(\alpha+1)^2}\|x-y\|_E,
\end{aligned}$$

因此，$\|\Phi_1 x-\Phi_1 y\|_E \le \dfrac{LM}{\alpha^2(\alpha+1)^2}\|x-y\|_E$，根据定理 3.2，可得出结论 $\dfrac{LM}{\alpha^2(\alpha+1)^2}<1$，即 $\Phi_1:\Omega\to E$ 是压缩映射。

证明 $\Phi_2:\Omega\to E$ 是全连续算子。

先证明算子 $\Phi_2:\Omega\to E$ 是连续的。设集合 Ω 上存在极限为 x 的收敛序列 $\{x_n\}$，即当 $n\to\infty$ 时，$\|x_n-x\|_E\to 0$。

当 $n\to\infty$，我们有 $\|\Phi_2 x_n-\Phi_2 x\|_E\to 0$。因此，$\Phi_2:\Omega\to E$ 是一个连续算子。

$$\left\|(\Phi_2 x)(t)\right\|\le\left(L\|x\|_E+Q\right)\int_0^1\left\|G(t,s)\right\|\mathrm{d}s\le\frac{L\|x\|_E+Q}{\alpha(\alpha+1)}.$$

因此，$\|\Phi_2 x\|_E\le\dfrac{L\varsigma+Q}{\alpha(\alpha+1)}$，由于 Ω 是有界集，故 $\Phi_2(\Omega)$ 有界。

其次证明算子 $\Phi_2(\Omega)$ 是等度连续的，对任意 $x\in\Omega$，$0<t_1\le t_2\le 1$ 时

$$\begin{aligned}
\left\|(\Phi_2 x)(t_2)-(\Phi_2 x)(t_1)\right\| &= \Big\|\int_0^1(1-t_2)s^{\alpha-1}f(s,x(s))\mathrm{d}s+\int_{t_2}^1(t_2-s)s^{\alpha-2}f(s,x(s))\mathrm{d}s \\
&\quad -\int_0^1(1-t_1)s^{\alpha-1}f(s,x(s))\mathrm{d}s-\int_{t_1}^1(t_1-s)s^{\alpha-2}f(s,x(s))\mathrm{d}s\Big\| \\
&\le\left\|\int_0^1(t_1-t_2)s^{\alpha-1}f(s,x(s))\mathrm{d}s\right\|+\left\|\int_{t_1}^{t_2}(s-t_1)s^{\alpha-2}f(s,x(s))\mathrm{d}s\right\| \\
&\quad +\left\|\int_{t_2}^1(t_2-t_1)s^{\alpha-2}f(s,x(s))\mathrm{d}s\right\| \\
&\le\frac{3\alpha-2}{\alpha(\alpha-1)}(Q+L\varsigma)|t_2-t_1|.
\end{aligned}$$

因此，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意 $x\in\Omega$，当 $t_1,t_2\in[0,1]$，$|t_1-t_2|<\delta$ 时，有 $\left\|(\Phi_2 x)(t_2)-(\Phi_2 x)(t_1)\right\|<\varepsilon$，所以算子 $\Phi_2(\Omega)$ 是等度连续的。

因此 $\Phi_2:\Omega\to E$ 是一个全连续算子。

由 Krasnoselskii’s 不动点定理可知，算子 Φ 在 E 上至少存在一个不动点，即该非线性微分系统(1)是可控的。证毕。

4. Ulam 稳定性分析

在这一节中，我们将研究非线性微分系统(1)的 Hyers-Ulam 稳定性。

定义 4.1 如果存在一个实常数 $m>0$，使得对于任何 $\varepsilon>0$，下列系统

$$\begin{cases}\left\|D_0^\alpha z(t)+Bu(t)+f(t,z(t))\right\|\le\varepsilon,\quad t\in[0,1],\\ z(0)=z(1)=0,\end{cases}\tag{5}$$

的每一个解 $z\in E$，且 $D_0^\alpha z\in E$，都有微分控制系统(1)的解 $x\in E$，使得

$$\|z(t)-x(t)\|\le m\varepsilon,\quad t\in[0,1],$$

则称控制系统(1)是 Hyers-Ulam 稳定的。

定理 4.2 假设(H_1)，(H_2)成立，如果 $L+\sqrt{L^2+4M}<2\alpha(\alpha+1)$，则边值问题(1)是 Hyers-Ulam 稳定的。

证明：记：$D_0^\alpha z(t)+Bu(t)+f(t,z(t))=-g(t)$，此时 $g(t)\in E$，且满足 $\|g(t)\|\le\varepsilon$。

考虑边值问题

$$\begin{cases} D_0^\alpha z(t)+Bu(t)+f(t,z(t))+g(t)=0,\quad t\in[0,1],\\ z(0)=z(1)=0, \end{cases} \tag{6}$$

根据引理 2.5 可知

$$z(t)=\int_0^1 G(t,s)\left(Bu_z(s)+f(s,z(s))+g(s)\right)\mathrm{d}s。$$

由于定理 3.2 的条件成立，则边值问题(6)是可控的，且控制函数为

$$u_z(t)=W^{-1}\left(\eta-\int_0^1 G(\tau,s)\left(f(s,z(s))+g(s)\right)\mathrm{d}s\right)(t),$$

而关于边值问题(1)的控制函数为

$$u_x(t)=W^{-1}\left(\eta-\int_0^1 G(\tau,s)f(s,x(s))\mathrm{d}s\right)(t)。$$

$$\begin{aligned}
&\|u_z(s)-u_x(s)\|\\
&=\left\|W^{-1}\left(\eta-\int_0^1 G(\tau,\vartheta)\left(f(\vartheta,z(\vartheta))+g(\vartheta)\right)\mathrm{d}\vartheta\right)(s)-W^{-1}\left(\eta-\int_0^1 G(\tau,\vartheta)\left(f(\vartheta,x(\vartheta))\mathrm{d}\vartheta\right)\right)(s)\right\|\\
&\le M\left\|\int_0^1 G(\tau,\vartheta)\left(f(\vartheta,z(\vartheta))-f(v,x(\vartheta))\right)\mathrm{d}\vartheta\right\|+M\int_0^1\|G(\tau,\vartheta)g(\vartheta)\|\mathrm{d}\vartheta\\
&\le\frac{LM}{\alpha(\alpha+1)}\|z-x\|_E+\frac{M\varepsilon}{\alpha(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

进一步，

$$\begin{aligned}
\|z(t)-x(t)\|\le&\left\|\int_0^1 G(t,s)B\left(W^{-1}\left(\eta-\int_0^1 G(\tau,\vartheta)\left(f(v,z(\vartheta))+g(\vartheta)\right)\mathrm{d}\vartheta\right)(s)\right.\right.\\
&\left.\left.-W^{-1}\left(\eta-\int_0^1 G(\tau,\vartheta)f(\vartheta,x(\vartheta))\mathrm{d}\vartheta\right)(s)\right)\mathrm{d}s\right\|\\
&+\left\|\int_0^1 G(t,s)\left(f(s,z(s))-f(s,x(s))\right)\mathrm{d}s\right\|+\left\|\int_0^1 G(t,s)g(t)\mathrm{d}s\right\|\\
\le&\frac{LM}{\left[\alpha(\alpha+1)\right]^2}\|z-x\|_E+\frac{M\varepsilon}{\left[\alpha(\alpha+1)\right]^2}+\frac{L}{\alpha(\alpha+1)}\|z-x\|_E+\frac{\varepsilon}{\alpha(\alpha+1)}\\
=&\left(\frac{LM}{\left[\alpha(\alpha+1)\right]^2}+\frac{L}{\alpha(\alpha+1)}\right)\|z-x\|_E+\frac{M\varepsilon}{\left[\alpha(\alpha+1)\right]^2}+\frac{\varepsilon}{\alpha(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

因此

$$\|z-x\|_E\le\frac{\alpha(\alpha+1)+M}{\alpha^2(\alpha+1)^2-L\left(\alpha(\alpha+1)+M\right)}\varepsilon,$$

即

$$\left\|z(t)-x(t)\right\|\le m\varepsilon\ ,$$

其中

$$m=\frac{\alpha(\alpha+1)+M}{\alpha^2(\alpha+1)^2-L\left(\alpha(\alpha+1)+M\right)}.$$

证毕。

5. 例子

例 5.1 令 $n=r=2$，考虑如下非线性分数阶微分方程边值问题：

$$\begin{cases}D_0^{\frac{3}{2}}x(t)+Bu(t)+f\left(t,x(t)\right)=0,t\in[0,1],\\ x(0)=x(1)=0,\end{cases}$$

其中，$\alpha=\dfrac{3}{2}$，$B=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$，$f\left(t,x(t)\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}(t+1)x_1(t)+1\\ \frac{1}{4}(t+1)x_2(t)+1\end{pmatrix}$。

因此，满足 $x\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的一个控制函数为 $u(t)=W^{-1}\left((1,2)^{\mathrm{T}}-\int_0^1 G\left(\frac{1}{2},s\right)f\left(s,x(s)\right)\mathrm{d}s\right)(t)$。

显然，$\|B\|=2$，$Q=\sqrt{2}$。对任意 $x,y\in\mathbb{R}^2$ 和 $t\in[0,1]$ 有

$$\left\|f(t,x)-f(t,y)\right\|=\frac{1}{4}(t+1)\sqrt{\left(x_1(t)-y_1(t)\right)^2+\left(x_2(t)-y_2(t)\right)^2}\le\frac{1}{4}(t+1)\|x-y\|.$$

因此，f 满足假设(H_1)。

于是

$$L=\sup_{t\in[0,1]}\left|l(t)\right|=\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}K&=\int_0^1 G\left(\frac{1}{2},s\right)BB^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{2},s\right)\mathrm{d}s\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}s^{\frac{1}{2}}&0\\0&\frac{1}{2}s^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}s^{\frac{1}{2}}&0\\0&\frac{1}{2}s^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\mathrm{d}s\\&\quad+\int_{\frac{1}{2}}^1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1-s)s^{-\frac{1}{2}}&0\\0&\frac{1}{2}(1-s)s^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1-s)s^{-\frac{1}{2}}&0\\0&\frac{1}{2}(1-s)s^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\mathrm{d}s\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}s&0\\0&s\end{pmatrix}\mathrm{d}s+\int_{\frac{1}{2}}^1\begin{pmatrix}(1-s)^2s^{-1}&0\\0&(1-s)^2s^{-1}\end{pmatrix}\mathrm{d}s\\&=\begin{pmatrix}0.193&\\&0.193\end{pmatrix},\end{aligned}$$

因此可计算其逆：$K^{-1}=\begin{pmatrix}5.18 & 0\\ 0 & 5.18\end{pmatrix}$。

进一步，$\sqrt{\left\|K^{-1}\right\|}=\sqrt{5.18}=2.27$，$L+\sqrt{L^2+4LM}=3.55<2\alpha(\alpha+1)$。

由定理 3.2 和定理 4.2 可知，该非线性分数阶微分系统是可控的且为 Hyers-Ulam 稳定的。

参考文献

[1] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., *et al.* (2014) A New Definition of Fractional Derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **264**, 65-70. https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002

[2] Abdeljawad, T. (2015) On Conformable Fractional Calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **279**, 57-66. https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.10.016

[3] Lakshmikantham, V. (2008) Theory of Fractional Functional Differential Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory, Methods & Applications*, **69**, 3337-3343. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.09.025

[4] Yang, Z. and Cao, J. (2013) Initial Value Problems for Arbitrary Order Fractional Differential Equations with Delay. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **18**, 2993-3005. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.03.006

[5] Wang, J.R. and Zhou, Y. (2011) Existence and Controllability Results for Fractional Semilinear Differential Inclusions. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **12**, 3642-3653. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.06.021

[6] Miller, K.S. and Ross, B. (1993) An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley & Sons, Hoboken.

[7] Kai, D. (2010) The Analysis of Fractional Differential Equations. Springer, Berlin.

[8] 白占兵. 分数阶微分方程边值问题理论及应用[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2013.

[9] Kalman, R.E. (1960) Contributions to the Theory of Optimal Control. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, **5**, 102-119.

[10] Kumar, S. and Sukavanam, N. (2012) Approximate Controllability of Fractional Order Semilinear Systems with Bounded Delay. *Journal of Differential Equations*, **252**, 6163-6174. https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.02.014

[11] 王小文. 具适分数阶微分系统的可控性及迭代学习控制[D]: [硕士学位论文]. 贵阳: 贵州大学, 2020.

[12] Sakthivel, R., Ren, Y. and Mahmudov, N.I. (2011) On the Approximate Controllability of Semilinear Fractional Differential Systems. *Computers & Mathematics with Applications*, **62**, 1451-1459. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.04.040

[13] Zhou, Y., Suganya, S., Arjunan, M.M., *et al.* (2019) Approximate Controllability of Impulsive Fractional Integro-Differential Equation with State-Dependent Delay in Hilbert Spaces. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **36**, 603-622. https://doi.org/10.1093/imamci/dnx060

[14] Das, S., Pandey, D.N. and Sukavanam, N. (2016) Approximate Controllability of a Second Order Neutral Differential Equation with State Dependent Delay. *Differential Equations and Dynamical Systems*, **24**, 201-214. https://doi.org/10.1007/s12591-014-0218-6

[15] Nawaz, M., Jiang, W. and Sheng, J.L. (2020) The Controllability of Fractional Differential System with State and Control Delay. *Advances in Difference Equations*, **2020**, Article No. 30. https://doi.org/10.1186/s13662-020-02599-9

[16] Mahmudov, N.I. (2013) Approximate Controllability of Some Nonlinear Systems in Banach Spaces. *Boundary Value Problems*, **2013**, Article No. 50. https://doi.org/10.1186/1687-2770-2013-50

[17] 黄庆道，祝文壮，王国铭. 二阶非线性系统三点边值问题的可控性[J]. 吉林大学学报：理学版，2003, 41(4): 474-476.

[18] Ulam, S.M. (2004) Problems in Modern Mathematics. Courier Corporation, Chelmsford.

[19] Rassias, T.M. (1978) On the Stability of the Linear Mapping in Banach Spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **72**, 297-300. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1978-0507327-1

[20] Wang, J.R., Lv, L. and Zhou, Y. (2011) Ulam Stability and Data Dependence for Fractional Differential Equations with Caputo Derivative. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 63, 1-10. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2011.1.63

[21] Wang, J.R., Zhou, Y. and Feckan, M. (2012) Nonlinear Impulsive Problems for Fractional Differential Equations and Ulam Stability. *Computers & Mathematics with Applications*, **64**, 3389-3405. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2012.02.021

[22] Benchohra, M. and Lazreg, J.E. (2017) Existence and Ulam Stability for Nonlinear Implicit Fractional Differential Equations with Hadamard Derivative. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, **62**, 27-38. https://doi.org/10.24193/subbmath.2017.0003

[23] Li, M.M., Wang, J.R. and O'Regan, D. (2019) Existence and Ulam's Stability for Conformable Fractional Differential Equations with Constant Coefficients. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **42**, 1791-1812. https://doi.org/10.1007/s40840-017-0576-7

[24] Wan, F., Liu, X.P. and Jia, M. (2022) Ulam-Hyers Stability for Conformable Fractional Integro-Differential Impulsive Equations with the Antiperiodic Boundary Conditions. *AIMS Mathematics*, **7**, 6066-6083. https://doi.org/10.3934/math.2022338

[25] Krasnoselskii, M.A. (1964) Positive Solutions of Operator Equations. Wiley, New York.