Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1589-1595
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136161

Hans汉斯

半群$CI(n,r)$的极大(完全)独立子半群

龙如兰，罗永贵，余江慧

贵州师范大学数学科学学院，贵州 贵阳

收稿日期：2023年5月5日；录用日期：2023年6月5日；发布日期：2023年6月13日

摘 要

设I_n和S_n分别是有限集$X_n=\{1,2,\cdots,n\}$上的对称逆半群和对称群。对$0\le r\le n-1$，令$I(n,r)=\{\alpha\in I_n:|\mathrm{im}(\alpha)|\le r\}$，则$I(n,r)$是对称逆半群$I_n$的双边理想。记$C_n=\langle g\rangle$，其中$g=(12\cdots n)$，称$C_n$为$X_n$上的循环群。通过分析半群$CI(n,r)=I(n,r)\cup C_n$的格林关系及生成关系，获得了半群$CI(n,r)$的(完全)独立子半群的完全分类。进一步，证明了半群$CI(n,r)$的极大独立子半群与极大完全独立子半群是一致的。

关键词

对称逆半群，对称群，循环群，独立子半群

Maximal (Completely) Isolated Subsemigroups of Semigroup $CI(n,r)$

Rulan Long, Yonggui Luo, Jianghui Yu

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guizhou Guiyang

Received: May 5th, 2023; accepted: Jun. 5th, 2023; published: Jun. 13th, 2023

Abstract

Let I_n and S_n be symmetric inverse semigroup and symmetric group on the finite set $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$, respectively. For $0\le r\le n-1$, put $I(n,r)=\{\alpha\in I_n:|\mathrm{im}(\alpha)|\le r\}$, then the $I(n,r)$ is a two-sided ideal of symmetric inverse semigroup I_n. Denote $C_n=\langle g\rangle$, where there is $g=(12\cdots n)$, say that C_n is a circle group on X_n. By analyzing the Green's relation and generative

文章引用: 龙如兰, 罗永贵, 余江慧. 半群$CI(n,r)$的极大(完全)独立子半群[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1589-1595.
DOI: 10.12677/pm.2023.136161

relation of the semigroup $CI(n,r)=I(n,r)\cup C_n$, the complete classification of the (completely) isolated subsemigroups of $CI(n,r)$ is obtained. Further, the coincide of maximal isolated subsemigroups and maximal completely isolated subsemigroups of semigroups $CI(n,r)$ be proved.

Keywords

Symmetric Inverse Semigroup, Symmetric Group, Circle Group, Isolated Subsemigrou

1. 预备知识

设自然数$n\geq 3$，$X_n=\{1,2,\cdots,n\}$并赋予自然数的大小序。I_n，S_n和P_n分别表示X_n上的对称逆半群，对称群和部分变换半群。对$0\leq r\leq n-1$，令$I(n,r)=\{\alpha\in I_n:|\mathrm{im}(\alpha)|\leq r\}$，易见$I(n,r)$是对称逆半群$I_n$的逆子半群且对任意的$\alpha\in I(n,r),\beta,\gamma\in I_n$都有$|\mathrm{im}(\beta\alpha\gamma)|\leq r$，即$\beta\alpha\gamma\in I(n,r)$，因而$I(n,r)$是对称逆半群$I_n$的双边理想。记$SI_n=I_n\setminus S_n$，则称$SI_n$是$X_n$上的部分一一奇异变换半群。显然$SI_n=I(n,n-1)$。记$C_n=\langle g\rangle$，其中$g=(12\cdots n)$，称$C_n$为$X_n$上的循环群。令$CI(n,r)=I(n,r)\cup C_n$，易证$CI(n,r)$是对称逆半群$I_n$的子半群。

对于有限半群的独立子半群的研究一直以来都是半群代数理论的研究热点之一[1] [2] [3] [4] [5]。文[1]研究了半群$FP(S_n)$的独立子半群与其它子半群的结构。文[2]分析了半群IS_n在夹心运算下独立子半群的完全分类。文[3]探索了半群T_n在夹心运算下独立子半群的完全分类。文[4]描述了保序和降序变换半群的独立子半群的完全分类。文[5]确定了半群$H_{(n,m)}$的独立子半群的完全分类。

设A是X_n的子集，ε_A表示集合A上的恒等变换，易见恒等变换是幂等元。对任意的$\alpha\in CI(n,r)$，令$\ker(\alpha)=\{(x,y)\in\mathrm{dom}(\alpha)\times\mathrm{dom}(\alpha):x\alpha=y\alpha\}$，则$\ker(\alpha)$是$\mathrm{dom}(\alpha)$上的等价关系，称$\ker(\alpha)$为$\alpha$的核。用$\mathrm{im}(\alpha)$表示集合$\{x\alpha:x\in\mathrm{dom}(\alpha)\}$，称$\mathrm{im}(\alpha)$为$\alpha$的像。

设S是半群，对任意的$a\in S$分别用L_a，R_a，$H_a=L_a\cap R_a$，D_a，J_a表示a所在的L-类，R-类，H-类，D-类，J-类。为叙述方便，引用Green-等价关系[6] [7]。在半群$CI(n,r)$中L，R，J有如下刻划：对任意的$\alpha,\beta\in CI(n,r)$有

$$\alpha L\beta\Leftrightarrow\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{im}(\beta)，\quad \alpha R\beta\Leftrightarrow\ker(\alpha)=\ker(\beta)，\quad \alpha J\beta\Leftrightarrow|\mathrm{im}(\alpha)|=|\mathrm{im}(\beta)|。$$

易见，$L\subseteq J$，$R\subseteq J$。对$0\leq r\leq n-1$，令$J_r=\{\alpha\in I_n:|\mathrm{im}(\alpha)|=r\}$，则$I(n,r)=\{\alpha\in I_n:|\mathrm{im}(\alpha)|\leq r\}$，从而$CI(n,r)=I(n,r)\cup C_n=\left(\bigcup_{s=0}^{r}J_s\right)\cup C_n$。对任意的$\alpha\in J_r$有$J_\alpha=J_r$。不难验证，在半群$CI(n,r)$中有如下包含关系的双边理想链$I(n,0)\subset I(n,1)\subset I(n,2)\subset\cdots\subset I(n,r-1)\subset I(n,r)\subset I(n,r)\cup C_n=CI(n,r)$。

任意取$\varepsilon_A\in E(J_r)$，令

$$\sqrt{\varepsilon_A}=\{\alpha\in CI(n,r):\text{存在}t\in N_+\text{使得}\alpha^t=\varepsilon_A\}。$$

对任意$A,B\subseteq X_n$，做如下定义：

$$R_B=\{\alpha\in J_r:\mathrm{dom}(\alpha)=\mathrm{B}\}；\quad L_A=\{\alpha\in J_r:\mathrm{im}(\alpha)=\mathrm{A}\}；\quad H_B^A=R_B\cap L_A。$$

当 $B=A$ 时，$H_A^A=H_{\varepsilon_A}$，即 $H_{\varepsilon_A}=\{\alpha\in J_r:\ker(\alpha)=\ker(\varepsilon_A)=A$ 且 $\operatorname{im}(\alpha)=\operatorname{im}(\varepsilon_A)=A\}$。

定义 1：设半群 S 是半群 T 的子半群，若对任意的 $\alpha\in T$，存在 $m\in N_+$，使得 $\alpha^m\in S$ 可推出 $\alpha\in S$，则称 S 是 T 的独立子半群。

定义 2：设半群 S 是半群 T 的子半群，若对任意的 $\alpha,\beta\in T$ 使得 $\alpha\beta\in S$ 可推出 $\alpha\in S$ 或 $\beta\in S$，则称 S 是 T 的完全独立子半群。

定义 3：设半群 S 是半群 T 的真子半群，则 S 是 T 的完全独立子半群当且仅当 $\overline{S}=T\setminus S$ 是 T 的子半群。

定义 4：设半群 S 是半群 T 的子半群，若 S 是 T 的真(完全)独立子半群，对 T 的任意(完全)独立子半群 M 有 $S\subseteq M\subseteq T$ 可推出 $M=S$ 或 $M=T$，则称 S 是 T 的极大(完全)独立子半群。

定义 5：每个完全独立子半群都是独立子半群。每个半群都是自身的完全独立子半群。

本文未定义的术语及符号见文献[6] [7]。

2. 主要结果及证明

引理 1 [6] 对任意的 $0\le r\le n-2$，有 $J_r\subseteq J_{r+1}\cdot J_{r+1}$。

由引理 1 可得推论：

推论 1 对任意的 $0\le r\le n-1$，有 $I(n,r)=\bigcup_{s=0}^{r}J_s=\langle J_r\rangle$。

引理 2 [6] 设 S 是一个周期半群，任意的 $a\in S$，存在 $m\in N_+$ 使得 a^m 是一个幂等元。因此每个周期半群至少有一个幂等元。特别地，有限半群为周期半群。

引理 3 对任意 $0\le r\le n-1$，设 S 是半群 $CI(n,r)$ 的独立子半群且 $E(S)\cap I(n,r-1)\ne\varnothing$，则 $J_0\subseteq E(S)$。

证明 由 $CI(n,r)$ 是有限半群且 S 是半群 $CI(n,r)$ 的独立子半群可知 S 是有限半群，再由引理 2 可知 $E(S)\ne\varnothing$。若 $E(S)\cap I(n,r-1)\ne\varnothing$，令 $k=\min\{|\operatorname{im}(\varepsilon)|:\varepsilon\in E(S)\cap I(n,r-1)\}$，则 $0\le k\le r-1$。假设 $1\le k\le r-1$，任取

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_k\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k\end{pmatrix}\in E(S)\cap I(n,r-1),$$

令

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_{k+1}\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_{k+2}\end{pmatrix},$$

$$\beta=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_{k+2}\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_{k+1}\end{pmatrix},$$

$$\xi=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_{k+2}\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_{k+2} & a_k\end{pmatrix},$$

则 $\alpha^2=\beta^2=\varepsilon\in S$ 且 $\xi^2=\beta\alpha\in S$，从而 $\alpha,\beta,\xi\in S$。易见

$$\xi\beta^2=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_{k+2}\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k\end{pmatrix}\in S,$$

$$\left(\varepsilon\beta^2\right)^2=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1}\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1}\end{pmatrix}\in S,$$

显然 $\left(\varepsilon\beta^2\right)^2\in E(S)\cap I(n,r-1)$ 且 $\left|\operatorname{im}\left(\left(\xi\beta^2\right)^2\right)\right|=k-1$ 与 k 的极小性矛盾。故 $k=0$，因此，$J_0\subseteq E(S)$。

引理 4 对任意 $0 \le r \le n-1$，设 S 是半群 $CI(n,r)$ 的独立子半群且 $J_0 \subseteq E(S)$，则 $I(n,r) \subseteq S$。

证明 第一步：证明 $E(I(n,r)) \subseteq S$。

对 $0 \le k \le r$，任取 $\varepsilon \in E(I(n,r))$，不妨设

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k \end{pmatrix} \in E(J_k),$$

当 $k = 0$ 时，则 $\varepsilon = \varnothing$ 且 $\varnothing \in E(S)$。

当 $1 \le k \le r$ 时，任取 $a_{k+1} \in X_n \setminus \operatorname{dom}(\varepsilon)$，令

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_{k+1} \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_{k+1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k \end{pmatrix},$$

则 $\alpha^{k+1} = \beta^{k+1} = \varnothing$ 且 $\alpha\beta = \varepsilon$。由 S 是半群 $CI(n,r)$ 的独立子半群可知 $\alpha, \beta, \varepsilon \in S$。由 ε 的任意性可知 $E(I(n,r)) \subseteq S$。

第二步：证明 $I(n,r) \subseteq S$。

任取 $\alpha \in I(n,r)$，若 $\alpha \in E(I(n,r))$，由第一步可知 $\alpha \in S$。若 $\alpha \in I(n,r) \setminus E(I(n,r))$，由引理 2 可知存在 $t \in N_+$ 使得 $\alpha^t \in E(I(n,r))$，再由第一步可知 $\alpha^t \in S$。注意到 S 是半群 $DI(n,r)$ 的独立子半群，从而 $\alpha \in S$。由 α 的任意性可知 $I(n,r) \subseteq S$。

由引理 3 和引理 4 可得以下推论：

推论 2 对任意的 $0 \le r \le n-1$，设 S 是半群 $CI(n,r)$ 的独立子半群且 $S \cap I(n,r-1) \ne \varnothing$，则 $I(n,r) \subseteq S$。

引理 5 对任意的 $0 \le r \le n-1$，设 S 是半群 $CI(n,r)$ 的独立子半群且 $|E(J_r) \cap S| \ge 2$，则 $I(n,r) \subseteq S$。

证明 由 $|E(J_r) \cap S| \ge 2$ 可知存在 $A, B \in X_n$，$A \ne B$ 且 $|A| = |B| = r$ 使得 $\varepsilon_A, \varepsilon_B \in E(J_r) \cap S$。易见 $\varepsilon_A \varepsilon_B = \varnothing \in I(n,r-1)$ 或 $\varepsilon_A \varepsilon_B = \varepsilon_{A \cap B} \in I(n,r-1)$，由推论 2 可知 $I(n,r) \subseteq S$。

引理 6 对任意的 $0 \le r \le n-1$，设 S 是半群 $CI(n,r)$ 的独立子半群且 $C_n \cap S \ne \varnothing$，则 $C_n \subseteq S$。

证明 由 $C_n \cap S \ne \varnothing$ 可知存在 $\alpha \in C_n \cap S$，易证 $\varepsilon_{X_n} = \alpha^{n!} \in S$。任取 $\beta \in C_n$，易知 $\beta^{n!} = \varepsilon_{X_n} \in S$，由 S 的独立性可知 $\beta \in S$。再由 β 的任意性可知 $C_n \subseteq S$。

引理 7 [7] 对任意的 $0 \le r \le n-1$，设 $\alpha, \beta \in CI(n,r) \subset P_n$，则

1) $|\operatorname{im}(\alpha\beta)| \le \{|\operatorname{im}(\alpha)|, |\operatorname{im}(\beta)|\}$；

2) $\operatorname{im}(\alpha\beta) \subseteq \operatorname{im}(\beta)$。

引理 8 对任意的 $0 \le r \le n-1$，若 $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in J_r$ 使得 $\alpha = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s$，则 $(\alpha, \alpha_1) \in R$，$(\alpha, \alpha_s) \in L$。

证明 第一步：证明 $(\alpha, \alpha_1) \in R$。

对任意的 $(x, y) \in \ker(\alpha_1)$ 有 $x\alpha = y\alpha$，从而 $x\alpha = x\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s = y\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s = y\alpha$，$(x, y) \in \ker(\alpha)$，易见 $\ker(\alpha_1) \subseteq \ker(\alpha)$。不妨设 $a_1\ker(\alpha_1), a_2\ker(\alpha_1), \cdots, a_r\ker(\alpha_1)$ 是 $\ker(\alpha_1)$ 的 r 个不同的同余类。对任意的 $x \in a_i\ker(\alpha_1)(1 \le i \le r)$ 有 $(x, a_i) \in \ker(\alpha_1) \subseteq \ker(\alpha)$，故 $(x, a_i) \in \ker(\alpha)$，即 $x \in a_i\ker(\alpha)$。因此，对于任意的 $1 \le i \le r$ 有 $a_i\ker(\alpha_1) \subseteq a_i\ker(\alpha)$。由 X_n 的有限性可知 $|a_i\ker(\alpha_1)| \le |a_i\ker(\alpha)|$。若存在 $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$ 使得 $|a_i\ker(\alpha_1)| < |a_i\ker(\alpha)|$，则 $|X_n/\ker(\alpha_1)| = \sum_{i=1}^{r}|a_i\ker(\alpha_1)| < \sum_{i=1}^{r}|a_i\ker(\alpha)| = |X_n/\ker(\alpha)|$，$|X_n/\ker(\alpha_1)| = |X_n/\ker(\alpha)| = r$ 矛盾。易见，对任意的 $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$ 可知 $a_i\ker(\alpha_1) \subseteq a_i\ker(\alpha)$ 且 $|a_i\ker(\alpha_1)| = |a_i\ker(\alpha)|$ 必有 $a_i\ker(\alpha_1) = a_i\ker(\alpha)$，即 $\ker(\alpha_1) = \ker(\alpha)$。再由格林 R 关系可知 $(\alpha, \alpha_1) \in R$。

第二步：证明 $(\alpha, \alpha_s) \in L$。

由 $\alpha=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s$ 及引理 7 可知 $\operatorname{im}(\alpha)=\operatorname{im}(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s)\subseteq\operatorname{im}(\alpha_s)$。再由 $\alpha,\alpha_s\in J_r$，可知 $|\operatorname{im}(\alpha)|=|\operatorname{im}(\alpha_s)|=r$，从而 $\operatorname{im}(\alpha)=\operatorname{im}(\alpha_s)$。由格林 L 关系可知 $(\alpha,\alpha_s)\in L$。

引理 9 对任意的 $0\le r\le n-1$，$A\subset X_n$，且 $|A|=r$，在半群 $CI(n,r)$ 中有 $\sqrt{\varepsilon_A}=H_{\varepsilon_A}$。

证明 任取 $\alpha\in H_{\varepsilon_A}\subseteq J_r$，由 H_{ε_A} 是半群 $CI(n,r)$ 的有限子群可知 $\alpha^{r!}=\varepsilon_A$，从而 $\alpha\in\sqrt{\varepsilon_A}$，即 $H_{\varepsilon_A}\subseteq\sqrt{\varepsilon_A}$。任取 $\alpha\in\sqrt{\varepsilon_A}$，则存在 $t\in N_+$，使得 $\alpha^t=\varepsilon_A$。由引理 7 可知 $r=|\operatorname{im}(\varepsilon_A)|=|\operatorname{im}(\alpha^t)|\le|\operatorname{im}(\alpha)|$。若 $|\operatorname{im}(\alpha)|=n$，则 $\alpha\in C_n$，由 C_n 是 $CI(n,r)$ 的子群可知 $\alpha^t\in C_n$ 与 $\alpha^t\in\varepsilon_A\subseteq J_r$ 矛盾。易见 $r=|\operatorname{im}(\varepsilon_A)|=|\operatorname{im}(\alpha)|$，即 $\alpha\in J_r$。由引理 8 可知 $(\alpha,\varepsilon_A)\in R$ 且 $(\alpha,\varepsilon_A)\in L$。因此，$(\alpha,\varepsilon_A)\in H$，即 $\alpha\in H_{\varepsilon_A}$。由 α 的任意性可知 $\sqrt{\varepsilon_A}\subseteq H_{\varepsilon_A}$。因此，$\sqrt{\varepsilon_A}=H_{\varepsilon_A}$。

引理 10 对任意的 $0\le r\le n-1$，$A\subset X_n$ 且 $|A|=r$，则 $S=H_{\varepsilon_A}$ 半群 $CI(n,r)$ 的独立子半群。

证明 显然 $S=H_{\varepsilon_A}$ 半群 $CI(n,r)$ 的子半群。对任意的 $\alpha\in CI(n,r)$，若 $\alpha^t\in S=H_{\varepsilon_A}$，则 $(\alpha^t)^{r!}=\varepsilon_A$，从而 $\alpha\in\sqrt{\varepsilon_A}$。再由引理 9 可知 $\alpha\in\sqrt{\varepsilon_A}=H_{\varepsilon_A}=S$，即 $\alpha\in S=H_{\varepsilon_A}$。因此，$S=H_{\varepsilon_A}$ 是半群 $CI(n,r)$ 的独立子半群。

引理 11 [7] 设 S 是半群 T 的真子半群，则 S 是半群 T 的独立子半群当且仅当 $\bar{S}=T\setminus S$ 是半群 T 的某些子半群的并。

定理 1 对任意的 $0\le r\le n-1$，$A\subset X_n$ 且 $|A|=r$，设 S 是半群 $CI(n,r)$ 的独立子半群，则 S 有且仅有以下 4 类：

1) $CI(n,r)$；
2) C_n；
3) $I(n,r)$；
4) H_{ε_A}。

证明 注意到 C_n，$I(n,r)$ 都是半群 $CI(n,r)$ 的子半群，$C_n\cap I(n,r)=\varnothing$ 且 $C_n\cup I(n,r)=CI(n,r)$。由引理 11 可知 C_n，$I(n,r)$ 和 $CI(n,r)$ 都是半群 $CI(n,r)$ 的独立子半群。再由引理 10 可知 H_{ε_A} 是半群 $CI(n,r)$ 的独立子半群。

反之，设 S 半群 $CI(n,r)$ 的独立子半群，分以下三种情形讨论：

情形 1 若 $S\cap C_n\ne\varnothing$ 且 $S\cap I(n,r)=\varnothing$，则 $S\subseteq C_n$，再由引理 6 可知 $C_n\subseteq S$，即 $S=C_n$。

情形 2 若 $S\cap C_n\ne\varnothing$ 且 $S\cap I(n,r)\ne\varnothing$，则由引理 6 可知 $C_n\subseteq S$，分子情形讨论：

情形 2.1 若 $S\cap J_r=\varnothing$，则 $S\cap I(n,r-1)\ne\varnothing$，由推论 2 可知 $I(n,r)\subseteq S$ 与 $S\cap J_r=\varnothing$ 矛盾。

情形 2.2 若 $S\cap J_r\ne\varnothing$，对任意的 $\alpha\in S\cap J_r$。若 $\alpha\notin H_{\varepsilon_A}$，则存在 $m\in N_+$ 使得 $\alpha^m\in I(n,r-1)$。由 $\alpha^m\in S$ 可知 $S\cap I(n,r-1)\ne\varnothing$，由推论 2 可知 $I(n,r)\subseteq S$，从 $CI(n,r)=C_n\cup I(n,r)\subseteq S$，故 $S=CI(n,r)$。若 $\alpha\in H_{\varepsilon_A}$，则存在 $t\in N_+$ 使得 $\alpha^t=\varepsilon_A$，不妨设

$$\alpha^t=\varepsilon_A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-1} & a_r\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-1} & a_r\end{pmatrix},$$

则存在 $g\in C_n$ 使得

$$g\alpha^t=\begin{pmatrix}a_1-1 & a_2-1 & \cdots & a_{r-1}-1 & a_r-1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-1} & a_r\end{pmatrix},$$

由于 $\operatorname{dom}(g\alpha^t)\ne\operatorname{im}(g\alpha^t)$，从而 $g\alpha^t\notin H_{\varepsilon_A}$。易见 $g\alpha^t\in S\cap J_r$，从而 $S=CI(n,r)$。

情形 3 若 $S\cap C_n=\varnothing$，则 $S\subseteq I(n,r)$，分子情形讨论：

情形 3.1 若 $S\cap I(n,r-1)\ne\varnothing$，则由推论 2 可知 $I(n,r)\subseteq S$，即 $S=I(n,r)$。

情形 3.2 若 $S\cap I(n,r-1)=\varnothing$，则 $S\subseteq J_r$。

如果 $S\bigcap\left(J_r\setminus\bigcup_{\varepsilon_A\in E(J_r)}H_{\varepsilon_A}\right)\neq\varnothing$，对任意的 $\alpha\in S\bigcap\left(J_r\setminus\bigcup_{\varepsilon_A\in E(J_r)}H_{\varepsilon_A}\right)$，存在 $t\in N_+$ 使得 $\alpha^t\in I(n,r-1)$ 与 $S\subseteq J_r$ 矛盾。

如果 $S\subseteq\bigcup_{\varepsilon_A\in E(J_r)}H_{\varepsilon_A}$，假设存在 $A\neq B$ 使得 $S\bigcap H_{\varepsilon_A}\neq\varnothing$ 且 $S\bigcap H_{\varepsilon_B}\neq\varnothing$。若 $\alpha\in H_{\varepsilon_A}$，则存在 $t\in N_+$ 使得 $\alpha^t=\varepsilon_A$，从而 $\varepsilon_A=\alpha^t\in S$。同理可证 $\varepsilon_B\in S$。故有 $\left|E(J_r)\bigcap S\right|\geq 2$，由引理 5 可知 $I(n,r)\subseteq S$ 与 $S\subseteq J_r$ 矛盾。因此，$S\subseteq H_{\varepsilon_A}$。此时 $S\bigcap H_{\varepsilon_A}\neq\varnothing$，即有 $\varepsilon_A\in S$。对任意的 $\alpha\in H_{\varepsilon_A}$，存在 $t\in N_+$ 使得 $\alpha^t=\varepsilon_A\in S$，由 S 的独立性可知 $\alpha\in S$，即 $H_{\varepsilon_A}\subseteq S$。因此 $S=H_{\varepsilon_A}$。

引理 12 [7] 设 S 是半群 T 的真子半群，则 S 是半群 T 的完全独立子半群当且仅当 $\bar{S}=T\setminus S$ 是半群 T 的子半群。特别地，若 S 是半群 T 的完全独立子半群，则 $\bar{S}$ 也是半群 T 的完全独立子半群。

引理 13 [7] 若 S 是半群 T 的完全独立子半群，则 S 一定是半群 T 的独立子半群；若 S 是半群 T 的独立子半群，则 S 不一定是 T 的完全独立子半群。

定理 2 对任意的 $0\leq r\leq n-1$，设 S 是半群 $CI(n,r)$ 的完全独立子半群，则 S 有且仅有以下 3 类：

1) $CI(n,r)$；

2) C_n；

3) $I(n,r)$。

证明 由引理 12 可知 $CI(n,r)$，C_n，$I(n,r)$ 都是半群 $CI(n,r)$ 的完全独立子半群。对于 H_{ε_A}，令

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_r\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_r\end{pmatrix},$$

$$\beta=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_r\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_r\end{pmatrix},$$

其中 $\bigcup_{i=1}^{r}\{a_i\}=A$，$\bigcup_{i=1}^{r}\{b_i\}=B$ 且 $A\neq B$。易见 $\alpha\beta\in H_{\varepsilon_A}$，但 $\alpha,\beta\notin H_{\varepsilon_A}$，故 H_{ε_A} 不是半群 $CI(n,r)$ 的完全独立子半群。

反之，设 S 是半群 $CI(n,r)$ 的完全独立子半群。由引理 13 和定理 1 可知 $S=CI(n,r)$ 或 $S=C_n$ 或 $S=I(n,r)$ 或 $S=H_{\varepsilon_A}$。已证 H_{ε_A} 不是半群 $CI(n,r)$ 的完全独立子半群且 $CI(n,r)$，C_n，$I(n,r)$ 都是半群 $CI(n,r)$ 的完全独立子半群。因此，半群 $CI(n,r)$ 的完全独立子半群有且仅有 $CI(n,r)$，C_n，$I(n,r)$ 三类。

引理 14 对任意的 $0\leq r\leq n-1$，C_n 是半群 $CI(n,r)$ 的极大独立子半群。

证明 由定理 1 可知 C_n 是半群 $CI(n,r)$ 的独立子半群。对半群 $CI(n,r)$ 的任意独立子半群 S 有 $C_n\subseteq S\subseteq CI(n,r)$，若 $S\bigcap I(n,r)=\varnothing$，则 $S\subseteq C_n$，故 $S=C_n$；若 $S\bigcap I(n,r)\neq\varnothing$，则由定理 1 的证明中的情形 2 可知 $S=CI(n,r)$。从而 C_n 是半群 $CI(n,r)$ 的极大独立子半群。

引理 15 对任意的 $0\leq r\leq n-1$，$I(n,r)$ 是半群 $CI(n,r)$ 的极大独立子半群。

证明 由定理 1 可知 $I(n,r)$ 是半群 $CI(n,r)$ 的独立子半群。对半群 $CI(n,r)$ 的任意独立子半群 S 有 $I(n,r)\subseteq S\subseteq CI(n,r)$，若 $S\bigcap C_n=\varnothing$，则 $S\subseteq I(n,r)$，即 $S=I(n,r)$；若 $S\bigcap C_n\neq\varnothing$，则由引理 6 可知 $S=CI(n,r)$，即 $I(n,r)$ 是半群 $DI(n,r)$ 的极大独立子半群。

定理 3 对任意的 $0\leq r\leq n-1$，设 S 是半群 $CI(n,r)$ 的极大独立子半群，则 S 有且仅有以下 2 类：

1) C_n；

2) $I(n,r)$。

证明 由引理 14 和引理 15 可知 C_n 和 $I(n,r)$ 为半群 $CI(n,r)$ 的极大独立子半群。反之，设 S 是半群 $CI(n,r)$ 的极大独立子半群。若 $S\bigcap C_n\neq\varnothing$ 且 $S\bigcap I(n,r)=\varnothing$，则 $S=C_n$；若 $S\bigcap C_n\neq\varnothing$ 且 $S\bigcap I(n,r)\neq\varnothing$，

由定理 1 的证明中的情形 2 可知 $S = CI(n,r)$ 与 S 极大性矛盾。若 $S \cap C_n = \varnothing$，则 $S \subseteq I(n,r)$，由 S 的独立性及定理 1 的证明中的情形 3 可知 $S = I(n,r)$ 或 $S = H_{\varepsilon_A}$。再由 S 的极大性可知 $S = I(n,r)$。因此，半群 $CI(n,r)$ 的极大独立子半群有且仅有 C_n 和 $I(n,r)$。

类似定理 3 的证明可得如下定理：

定理 4 对任意的 $0 \le r \le n-1$，设 S 是半群 $CI(n,r)$ 的极大完全独立子半群，则 S 有且仅有以下 2 类：

1) C_n；

2) $I(n,r)$。

由定理 3 和定理 4 可得如下推论：

推论 3 对任意的 $0 \le r \le n-1$，半群 $CI(n,r)$ 的极大独立子半群与极大完全独立子半群完全一致。

3. 总结及展望

从理想和独立子半群的性质出发研究了半群 $CI(n,r)$ 的独立子半群及其相关子半群，得出半群的独立子半群、完全独立子半群、极大独立子半群、极大完全独立子半群的分类，并总结出对任意的 $0 \le r \le n-1$，半群 $CI(n,r)$ 的极大独立子半群与极大完全独立子半群是完全一致的。

在对半群 $CI(n,r)$ 的独立子半群的研究方面已经相对全面，也做到了理想，但对于 $CI(n,r) \setminus C_n$ 的情况的研究没有完善，对 $C_k I(n,r) = C_k \cup I(n,r) (0 \le k \le n-1)$ 的特殊情况也没有涉及，其中 $C_k = \langle (12 \cdots k) \rangle$，这是文章存在的不足之处。因此，之后的研究将补足以上不足之处，把半群 $CI(n,r)$ 的独立子半群的研究推广到更一般的情况。

基金项目

贵州师范大学学术新苗基金项目(黔师新苗[2021] B08 号)；国家自然科学基金(11861022)。

参考文献

[1] Ganyushkin, A.G. and Mazorchuk, V.S. (1995) Structure of Subsemigroups of Factor-Powers of Finite Symmetric Groups. *Mathematical Notes*, **58**, 910-920. https://doi.org/10.1007/BF02304767

[2] Tsyaputa, G. (2006) Isolated and Nilpotent Subsemigroups in the Variants of IS_n. *Algebra and Discrete Mathematics*, **5**, 89-79.

[3] Mazorchuk, V. and Tsyaputa, G. (2008) Isolated Subsemigroups in the Variants of T_n. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, **77**, 63-84.

[4] Korkmaz, E. and Ayik, H. (2022) Isolated Subsemigroups of Order-Preserving and Decreasing Transformation Semigroups. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **45**, 663-675. https://doi.org/10.1007/s40840-021-01215-7

[5] 袁月，赵平．半群 $H(n,m)$ 的独立子半群[J]．西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(6): 74-81.

[6] Howiejm. Fundamentals of Semigroup Theory. Oxford University Press, Oxford, 1995.

[7] Ganyushkin, O. and Mazorchuk, V. (2009) Classical Finite Transformation Semigroups. Springer-Verlag, London. https://doi.org/10.1007/978-1-84800-281-4