Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1753-1757
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136179

一类投影方程的解的存在性研究

王欣睿

西南石油大学理学院，四川 成都

收稿日期：2023年5月21日；录用日期：2023年6月22日；发布日期：2023年6月30日

摘 要

本文引进和研究了一类投影方程组在希尔伯特空间中解的情况。我们首先利用Schauder不动点定理给出了这个方程组解的几个存在性条件，进一步，我们利用了Banach压缩映像原理给出了这个方程解的唯一存在的条件。

关键词

投影方程组，Schauder不动点定理，Banach压缩映像原理

Study on the Existence of Solutions for a Class of Projection Equations

Xinrui Wang

School of Sciences, Southwest Petroleum University, Chengdu Sichuan

Received: May 21st, 2023; accepted: Jun. 22nd, 2023; published: Jun. 30th, 2023

Abstract

In this paper, we introduce and study the solution of a class of projection equations in Hilbert space. We first use Schauder's fixed point theorem to provide several existence conditions for the solution of this system of equations. Furthermore, we use the Banach contraction mapping principle to provide the condition for the unique existence of the solution of this equation.

Keywords

Projection Equations, Schauder Fixed Point Theorem, Banach Contraction Mapping Principle

文章引用: 王欣睿. 一类投影方程的解的存在性研究[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1753-1757.
DOI: 10.12677/pm.2023.136179

1. 引言

众所周知，投影方法在研究和解决在希尔伯特空间中涉及广义单调性的变分不等式中起到了重要作用，在此空间中闭凸集上的变分不等式问题可以转化为一个等价的投影方程解的存在性问题(例如，可参见[1]-[6])，因此对某些投影方程的研究有利于变分不等式理论研究和发展。

2. 预备知识

本文中，X 为一个具有内积 $\langle -,- \rangle$ 和范数 $\|.\|$ 的希尔伯特空间，并约定乘积空间 $X \times X$ 中的范数为和范数。

定义 1.1 (紧算子) X 和 Y 是两个赋范线性空间，算子 $F: K \subset X \to Y$ 被称为紧算子，如果满足

i) F 是连续的；

ii) F 把 K 中的有界集映成 Y 中的预紧集(闭包为紧集)。

定理 1.1 (Schauder 不动点定理)设 K 是 Banach 空间 X 上的有界凸闭集，如果 $F: K \to K$ 是一个紧算子，则存在 $x \in K$ 使得 $F(x) = x$。

定义 1.2 (投影算子)设 X 是一实希尔伯特空间，K 为 X 上一非空闭凸集，$x \in H$ 是给定的一点，如果存在 $y \in K$ 使得

$$\|y - x\| = \inf_{z \in K} \|z - x\|$$

那么称 y 是 x 在 K 上的投影，记为 $y = P_K x$。

定理 1.2 投影算子是单值的，连续的，并且是非扩张的。

定义 1.3 X 为一实 Hilbert 空间，映射 $T: X \times X \to X$。T 为关于第一变元 L 李普希兹连续的当且仅当 $\|T(x,-) - T(y,-)\| \le L\|x - y\| \quad \forall x, y \in X$ 其中 $L > 0$。

定理 1.3 (Banach 压缩映象原理)设 (X, d) 为非空的完备度量空间。设为 $T: X \to X$ 为一个压缩映射，也就是说，存在一个非负的实数 $q < 1$，使得对于 X 内所有的 x 和 y，都有

$$d(T(x), T(y)) \le q d(x, y)$$

那么映射 T 在 X 内有且只有一个不动点 x。

3. 主要内容

X 为一实 Hilbert 空间，K_1，K_2 为 X 上的非空有界闭凸子集，映射 $g: X \times X \to X$ 和映射 $h: X \times X \to X$ 连续。映射 $T: X \times X \to X$ 以及映射 $S: X \times X \to X$ 也是连续的。$P_{K_i}\ (i = 1, 2)$ 为从 X 到 K_i 的投影映射。考虑如下投影方程组问题

$$\begin{cases} P_{K_1}\left[g(x,y) - \rho_1 T(x,y)\right] = x \\ P_{K_2}\left[h(x,y) - \rho_2 S(x,y)\right] = y \end{cases} \tag{3.1}$$

容易知道如果 (x, y) 是该投影方程的解当且仅当 (x, y) 为映射 $A: X \times X \to K_1 \times K_2$ 的不动点。其中

$$A(x,y) = \left(P_{K_1}\left[g(x,y) - \rho_1 T(x,y)\right], P_{K_2}\left[h(x,y) - \rho_2 S(x,y)\right]\right)$$

容易知道考虑投影方程组解的存在性问题(3.1)我们只用考虑映射 A 在 $K_1\times K_2$ 上的限制映射 $A|K_1\times K_2:K_1\times K_2\to K_1\times K_2$ 的不动点的存在性。

可以看出方程组(3.1)包含了很多已知的非线性投影方程组，变分不等式组的情况。

i) 如果 $K_1=K_2=K$，$T(x,y)=S(y,x)$，并且令 $g(x,y)=x$，$h(x,y)=y$ 则投影方程组(3.1)变为

$$\begin{cases}P_K\left[x-\rho_1 S(y,x)\right]=x\\ P_K\left[y-\rho_2 S(x,y)\right]=y\end{cases}$$

这个问题由 Chang，Joseph Lee 和 Chan [7]进行了研究。该问题等价于如下变分不等式组

$$\begin{cases}\langle S(y,x),z-x\rangle\ge 0\\ \langle S(x,y),z-y\rangle\ge 0\end{cases},\forall z\in K$$

ii) 如果 $K_1=K_2=K$，$T=S$ 为单值映射，并且 $g=h$ 为单值映射则投影方程组(3.1)变为

$$P_K\left[g(x)-\rho_1 Tx\right]=x$$

我们可以看出所研究的方程组(3.1)涵盖了很多特例。因此只要我们能得到一些关于方程组(3.1)的解的存在性和唯一性条件，意味着众多投影方程，变分不等式问题能够得到较好的解决。

定理 2.1 若 K_1,K_2 为紧集，则投影方程组(3.1)有解。

证明：考虑映射 A 在 $K_1\times K_2$ 上的限制映射 $A|K_1\times K_2:K_1\times K_2\to K_1\times K_2$。

$$A_1:K_1\times K_2\to K_1\quad A_1=P_{K_1}\left[g(x,y)-\rho_1 T(x,y)\right]$$

由于 g,T,P_{K_1} 都为连续映射，故而 A_1 为连续映射。同理我们定义

$$A_2:K_1\times K_2\to K_2\quad A_2=P_{K_2}\left[h(x,y)-\rho_2 S(x,y)\right]$$

A_2 也为连续映射。于是我们知道 $A|K_1\times K_2$ 为连续映射。

K_1 和 K_2 为紧集，则有 $K_1\times K_2$ 为紧集，对于 $K_1\times K_2$ 上的任意有界集合 $U\times V$，此时 $\overline{A|K_1\times K_2(U\times V)}$ 为紧集 $K_1\times K_2$ 的闭子集，故而为紧集。故而 $A|K_1\times K_2$ 为紧算子。

由**定理 1.1** 知映射 $A|K_1\times K_2$ 不动点存在。故而该投影方程组有解。

推论 2.1 若 X 为有限维的 Hilbert 空间，则投影方程组(3.1)有解。

证明： K_1,K_2 为有界闭集，故而此时为紧集，由定理 2.1 可知投影方程组(3.1)有解。

定理 2.2 若 $g-\rho_1 T$ 和 $h-\rho_2 S$ 都为紧算子，则投影方程(3.1)有解。

证明： $g-\rho_1 T$ 为紧算子，则对于 $K_1\times K_2$ 上的任意有界集合 $U\times V$，$\overline{(g-\rho_1 T)(U\times V)}$ 为紧集，而

$$\overline{\left(P_{K_1}[g-\rho_1 T]\right)(U\times V)}\subset\overline{P_{K_1}\left[\overline{(g-\rho_1 T)(U\times V)}\right]}$$

因为 P_{K_1} 连续，故而会把闭集映为闭集，所以有

$$\overline{\left(P_{K_1}[g-\rho_1 T]\right)(U\times V)}\subset\overline{P_{K_1}\left[\overline{(g-\rho_1 T)(U\times V)}\right]}=P_{K_1}\left[\overline{(g-\rho_1 T)(U\times V)}\right]$$

而 $P_{K_1}\left[\overline{(g-\rho_1 T)(U\times V)}\right]=\overline{(g-\rho_1 T)(U\times V)}\cap K_1$，其中 $\overline{(g-\rho_1 T)(U\times V)}\cap K_1$ 为紧集 $\overline{(g-\rho_1 T)(U\times V)}$ 的闭子集，故而为紧集。同时 $\overline{\left(P_{K_1}[g-\rho_1 T]\right)(U\times V)}$ 为紧集 $\overline{(g-\rho_1 T)(U\times V)}\cap K_1$ 的闭子集合，故而 $\overline{A_1(U\times V)}$ 为紧集。同理可知 $\overline{A_2(U\times V)}$ 也为紧集。我们容易知道

$$\overline{A|K_1\times K_2(U\times V)}=\overline{\left(A_1(U\times V),A_2(U\times V)\right)}\subset\left(\overline{\overline{A_1(U\times V)},\overline{A_2(U\times V)}}\right)$$

而由 $\overline{A_1(U\times V)}$ 和 $\overline{A_2(U\times V)}$ 都为紧集可以知道 $\left(\overline{\overline{A_1(U\times V)},\overline{A_2(U\times V)}}\right)$ 也为紧集，同样由紧集的闭子集

为紧集可以得到$\overline{A|K_1\times K_2(U\times V)}$为紧集。故而$A|K_1\times K_2$为紧算子。由定理 1.1 可知映射$A|K_1\times K_2$不动点存在。故投影方程组(3.1)有解。

定理 2.3 若g为关于第一变元L_1李普希兹连续且关于第二变元L_2李普希兹连续的。h为关于第一变元L_3李普希兹连续且关于第二变元L_4李普希兹连续的。T为关于第一变元l_1李普希兹连续且关于第二变元l_2李普希兹连续的。S为关于第一变元l_3李普希兹连续且关于第二变元l_4李普希兹连续的。且满足

$$M=\max\left\{L_1+L_3+\rho_1 l_1+\rho_2 l_3, L_4+\rho_2 l_4+L_2+\rho_1 l_2\right\}<1$$

那么投影方程组(3.1)有解，且解唯一。

证明： $\forall x_1,x_2,y_1,y_2\in X$ 都有

$$\begin{aligned}
&\left\|P_{K_1}\left[g(x_1,y_1)-\rho_1 T(x_1,y_1)\right]-P_{K_1}\left[g(x_2,y_2)-\rho_1 T(x_2,y_2)\right]\right\| \\
&\le\left\|g(x_1,y_1)-g(x_2,y_2)+\rho_1 T(x_2,y_2)-\rho_1 T(x_1,y_1)\right\| \\
&\le\left\|g(x_1,y_1)-g(x_2,y_2)\right\|+\left\|\rho_1 T(x_2,y_2)-\rho_1 T(x_1,y_1)\right\| \\
&\le g\left\|(x_1,y_1)-g(x_1,y_2)\right\|+\left\|g(x_1,y_2)-g(x_2,y_2)\right\| \\
&\quad+\left\|\rho_1 T(x_2,y_2)-\rho_1 T(x_1,y_2)\right\|+\left\|\rho_1 T(x_1,y_2)-\rho_1 T(x_1,y_1)\right\| \\
&\le L_2\left\|y_1-y_2\right\|+L_1\left\|x_1-x_2\right\|+\rho_1 l_1\left\|x_1-x_2\right\|+\rho_1 l_2\left\|y_1-y_2\right\| \\
&=(L_1+\rho_1 l_1)\left\|x_1-x_2\right\|+(L_2+\rho_1 l_2)\left\|y_1-y_2\right\|
\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
&\left\|P_{K_2}\left[h(x_1,y_1)-\rho_2 S(x_1,y_1)\right]-P_{K_2}\left[h(x_2,y_2)-\rho_2 S(x_2,y_2)\right]\right\| \\
&\le(L_3+\rho_2 l_3)\left\|x_1-x_2\right\|+(L_4+\rho_2 l_4)\left\|y_1-y_2\right\|
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
&\left\|A(x_1,y_1)-A(x_2,y_2)\right\| \\
&=\left\|P_{K_1}\left[g(x_1,y_1)-\rho_1 T(x_1,y_1)\right]-P_{K_1}\left[g(x_2,y_2)-\rho_1 T(x_2,y_2)\right]\right\| \\
&\quad+\left\|P_{K_2}\left[h(x_1,y_1)-\rho_2 S(x_1,y_1)\right]-P_{K_2}\left[h(x_2,y_2)-\rho_2 S(x_2,y_2)\right]\right\| \\
&\le(L_1+L_3+\rho_1 l_1+\rho_2 l_3)\left\|x_1-x_2\right\|+(L_4+\rho_2 l_4+L_2+\rho_1 l_2)\left\|y_1-y_2\right\| \\
&\le M\left(\left\|x_1-x_2\right\|+\left\|y_1-y_2\right\|\right)=M\left\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\right\|
\end{aligned}$$

由 Banach 压缩映像原理可知，投影方程(3.1)解存在且唯一。

参考文献

[1] Pang, J.S. and Yao, J.C. (1995) On a Generalization of a Normal Map and Equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **33**, 168-184. https://doi.org/10.1137/S0363012992241673

[2] Verma, R.U. (2000) A Class of Projection-Contraction Methods Applied to Monotone Variational Inequalities. *Applied Mathematics Letters*, **13**, 55-62. https://doi.org/10.1016/S0893-9659(00)00096-3

[3] Verma, R.U. (2001) Projection Methods, Algorithms and a New System of Nonlinear Variational Inequality. *Computers & Mathematics with Applications*, **41**, 1025-1031. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(00)00336-9

[4] Verma, R.U. (2004) Generalized System for Relaxed Cocoercive Variational Inequalities and Its Projection Methods. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **121**, 203-210. https://doi.org/10.1023/B:JOTA.0000026271.19947.05

[5] Yao, J.C. (1994) Existence of Generalized Variational Inequalities. *Operations Research Letters*, **15**, 35-40. https://doi.org/10.1016/0167-6377(94)90011-6

[6] Yao, J.C. (1994) Variational Inequality with Generalized Monotone Operator. *Mathematics of Operations Research*, **19**, 513-768. https://doi.org/10.1287/moor.19.3.691

[7] Chang, S.S., Joseph Lee, H.W. and Chan, C.K. (2007) Generalized System for Relaxed Cocoercive Variational Inequalities in Hilbert Spaces. *Applied Mathematics Letters*, **20**, 329-334. https://doi.org/10.1016/j.aml.2006.04.017