Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1758-1768
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136180

群的Gorenstein同调维数

罗玉祥

重庆师范大学，数学科学学院，重庆

收稿日期：2023年5月21日；录用日期：2023年6月22日；发布日期：2023年6月30日

摘 要

设G是群，R是交换环。定义群G在系数环R上的**Gorenstein**同调维数$\mathrm{Ghd}_R G$为平凡RG-模R 的**Gorenstein**平坦维数。证明了对交换环的**Frobenius**扩张$R \to S$，有$\mathrm{Ghd}_S G = \mathrm{Ghd}_R G$。此外，还研究群的**Gorenstein**同调维数与其子群的**Gorenstein**同调维数之间的关系。证明了对群G的一个升序过滤$(G_\lambda)_{\lambda<\mu}$，有$\mathrm{Ghd}_R G \leq \sup_{\lambda<\mu} \mathrm{Ghd}_R G_\lambda$。进而，如果$[G : G_\lambda]_{\lambda<\mu}$ 是有限的，那么$\mathrm{Ghd}_R G = \sup_{\lambda<\mu} \mathrm{Ghd}_R G_\lambda$。

关键词

Gorenstein同调维数，群环，Gorenstein平坦，Frobenius扩张

On Gorenstein Homological Dimension of Groups

Yuxiang Luo

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: May 21st, 2023; accepted: Jun. 22nd, 2023; published: Jun. 30th, 2023

Abstract

Let G be group and R commutative ring. The Gorenstein homological dimension $\mathrm{Ghd}_R G$ of the group G over the coefficient ring R is defined as the Gorenstein flat

文章引用: 罗玉祥. 群的Gorenstein同调维数[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1758-1768.
DOI: 10.12677/pm.2023.136180

dimension of trivial RG-module R. It is proved that $\mathrm{Ghd}_S G = \mathrm{Ghd}_R G$ for any Frobenius extension of commutative rings $R \to S$. In addition, the relationship between the Gorenstein homological dimension of a group and the Gorenstein homological dimension of its subgroups is studied. It is proved that $\mathrm{Ghd}_R G \leq \sup_{\lambda<\mu} \mathrm{Ghd}_R G_\lambda$ for an ascending filltering $(G_\lambda)_{\lambda<\mu}$ of group G; furthermore, if $[G : G_\lambda]_{\lambda<\mu}$ is finite, then $\mathrm{Ghd}_R G = \sup_{\lambda<\mu} \mathrm{Ghd}_R G_\lambda$.

Keywords

Gorenstein Homological Dimension, Group Ring, Gorenstein Flat, Frobenius Extension

1. 引言

1969年, Auslander和Bridger在交换诺特环上的有限生成模范畴中, 引入了一个重要的不变量, 称为G-维数[1]. 在二十世纪九十年代, Enochs, Jenda, Torrecillas在任意环上引入了Gorenstein内射模, Gorenstein投射模和Gorenstein平坦模的概念, 它们分别推广了内射模, 投射模和平坦模[2, 3].

在群论中, 通过群的(上)同调性质来研究群是一个历史悠久的问题, 群的(上)同调性质来源于代数和拓扑. 对任意群G, 其上同调维数被定义为平凡$\mathbb{Z}G$-模$\mathbb{Z}$的投射维数, 而同调维数被定义为平凡$\mathbb{Z}G$-模$\mathbb{Z}$的平坦维数[4]. 从文献[5]和[6]中可以看出这些不变量的重要性: 非平凡群是自由群当且仅当其上同调维数等于1. 随后, 群的Gorenstein(上)同调维数作为群的(上)同调维数的推广被引入. 文献[4, 6–11]中在系数环是整数环$\mathbb{Z}$或有限(弱)整体维数的交换环的情况下, 对群的Gorenstein上同调维数进行了广泛研究. 特别地, 在文[10]中作者发现群的Gorenstein上同调维数依赖于系数环, 证明了对任意的交换环k, 有$\mathrm{Gcd}_k G \leq \mathrm{Gcd}_{\mathbb{Z}} G$. 2011年Asadollahi等人在文献[12]中将群的同调维数推广到了群的Gorenstein同调维数, 引入了系数环为整数环$\mathbb{Z}$上的群的Gorenstein 同调维数, 定义为平凡$\mathbb{Z}G$-模$\mathbb{Z}$ 的Gorenstein平坦维数; 记作$\mathrm{Ghd}_{\mathbb{Z}} G$. 他们证明了群$G$是有限群当且仅当$\mathrm{Ghd}_{\mathbb{Z}} G = 0$; 在$H$是$G$的一个指数有限的子群且$\mathrm{sfli}(\mathbb{Z}G)$有限的条件下证明了$\mathrm{Ghd}_{\mathbb{Z}} G = \mathrm{Ghd}_{\mathbb{Z}} H$. 在文献[13]中罗玉祥和任伟定义了群$G$在系数环$R$上的Gorenstein 同调维数$\mathrm{Ghd}_R G$, 并证明了对交换环的平坦扩张$R \to S$, 有不等式$\mathrm{Ghd}_S G \leq \mathrm{Ghd}_R G$.

有限群的整群环扩张, 交换代数上的Azumaya代数, Markov扩张等都是Frobenius扩张(例2.6). 环的Frobenius扩张的概念是Frobenius代数的自然推广[14], 在2-维拓扑量子场论, Cherednik代数的Calabi-Yau性质, 平坦控制维数等诸多研究领域起到了重要作用[15–17]. 模的Gorenstein同调性质在Frobenius扩张下的不变性也在近期受到了广泛关注, 如周芮和赵志兵在文献[18]中证明了模

的无挠性和自反性在Frobenius 扩张下是保持的; 胡江胜, 李欢欢和任伟等在文献[19, 20]中证明了Gorenstein投射模和Gorenstein平坦模在Frobenius扩张下是保持的. 因此一个自然的问题是群的Gorenstein同调维数在环的Frobenius 扩张下是否保持, 这也是本文研究内容之一.

基于Asadollahi等人在文献[12]中引入的系数环为整数环$\mathbb{Z}$上的群的Gorenstein 同调维数$\mathrm{Ghd}_{\mathbb{Z}}G$. 类似地, 在文献[13]中定义了群$G$在系数环$R$上的Gorenstein同调维数的概念. 本文主要研究群的Gorenstein 同调维数对系数环的依赖性, 及其与子群的Gorenstein同调维数的联系. 本文结构安排主要分为引言、预备知识、主要结果以及结论与展望四个部分. 在第一部分引言中, 我们主要介绍了群的Gorenstein同调理论的研究背景及现状; 第二部分是预备知识, 我们简单介绍了环扩张, 群环上的模及Gorenstein 平坦模的基本知识; 第三部分我们给出并证明我们的主要结果, 首先研究了群的Gorenstein同调维数对系数环的依赖性. 证明了如果$R \to S$ 是交换环的Frobenius扩张, 那么有$\mathrm{Ghd}_S G = \mathrm{Ghd}_R G$. 其次研究了群的Gorenstein同调维数与其子群的Gorenstein同调维数之间的关系. 证明了对群G的一个升序过滤$(G_\lambda)_{\lambda<\mu}$, 有$\mathrm{Ghd}_R G \le \sup_{\lambda<\mu}\mathrm{Ghd}_R G_\lambda$. 进而, 如果$[G : G_\lambda]_{\lambda<\mu}$是有限的, 那么$\mathrm{Ghd}_R G = \sup_{\lambda<\mu}\mathrm{Ghd}_R G_\lambda$; 第四部分是我们的结论与展望.

2. 预备知识

Gorenstein平坦模及维数

本文中, 环指有单位元的结合环. 设A是一个环. 用A^{op}表示环A的反环, 用$\mathrm{Mod}(A)$ 表示(左)A-模范畴.

定义2.1. [21] *称(左)A-模M是Gorenstein平坦模, 如果存在平坦(左)A-模的正合复形*

$$\cdots \longrightarrow F_{-2} \longrightarrow F_{-1} \longrightarrow F_0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow \cdots$$

使得对任意内射(右)A-模I, 用函子$I \otimes_A -$作用该复形后仍得到正合复形, 且$M \cong \mathrm{Im}(F_0 \to F_1)$. 记$\mathcal{GF}(A)$为所有Gorenstein平坦(左)$A$-模构成的类.

定义2.2. [21] *设M是一个(左)A-模, M的Gorenstein平坦维数, 记为$\mathrm{Gfd}_A M$, 定义为*

$$\mathrm{Gfd}_A M = \inf\{n | \ \exists\ 0 \to Q_n \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to M \to 0; Q_i \in \mathcal{GF}(A), i = 0, 1, \cdots, n.\}$$

如果M没有有限长度的Gorenstein平坦分解, 则设$\mathrm{Gfd}_A M = \infty$.

在文[21]中假设环是凝聚的, 以保证Gorenstein平坦模类$\mathcal{GF}(A)$关于扩张封闭这一基本性质是成立的. 该性质对Gorenstein 平坦模的研究至关重要, 但不易证明. 由文([22]推论3.12)我们现在可知该性质对任意环都是成立的, 故文[21, 23, 24]的结论中凝聚环和GF-闭环的条件都可以去掉. 由此可知下述结论.

引理2.3. [24] *设A是任意环. Gorenstein平坦(左)A-模类$\mathcal{GF}(A)$有以下结论:*

(1) $\mathcal{GF}(A)$关于扩张封闭. 即对任意(左)A-模的短正合序列$0 \to M'' \to M' \to M \to 0$, 如果$M'', M \in \mathcal{GF}(A)$, 那么$M' \in \mathcal{GF}(A)$.

(2) $\mathcal{GF}(A)$关于直和项封闭. 即对任意(左)A-模M的直和项N, 如果M是Gorenstein平坦模, 那么N也是Gorenstein平坦模.

(3) $\mathcal{GF}(A)$关于正向极限封闭. 即对任意Gorenstein平坦(左)A-模的序列$M_0 \to M_1 \to M_2 \to \cdots$, 有$\varinjlim M_n \in \mathcal{GF}(A)$.

引理2.4. [23] 设A是任意环, M为Gorenstein平坦维数有限的(左)A-模, $n \geq 0$是一个整数. 下列条件等价:

(1) $\mathrm{Gfd}_A M \leq n$.

(2) 对所有内射维数有限的(右)A-模L和所有$i > n$, 有$\mathrm{Tor}_i^A(L, M) = 0$.

(3) 对所有内射(右)A-模I和所有$i > n$, 有$\mathrm{Tor}_i^A(I, M) = 0$.

(4) 对任意正合序列

$$0 \to K_n \to Q_{n-1} \to \cdots \to Q_0 \to M \to 0,$$

如果$Q_0, \cdots, Q_{n-1}$是Gorenstein平坦模, 那么K_n也是Gorenstein平坦模.

环扩张

如果R是环S的子环, 那么称$R \to S$是一个环扩张; 如果S作为R-模是平坦的, 那么称环扩张$R \to S$ 是平坦扩张. 在环扩张理论中, 一个非常重要的环扩张被称为环的Frobenius扩张, 它是Frobenius代数的自然推广. 现已广泛应用于许多领域, 比如2-维拓扑量子场论, Cherednik代数的Calabi-Yau性质, 平坦控制维数等. 下面回顾可分Frobenius扩张的概念[25]; 也可见([20]定义2.8).

定义2.5. [25] 称环扩张$R \to S$是Frobenius扩张, 如果S作为右R- 模是有限生成投射的并且${}_RS_S \cong ({}_SS_R)^* = \mathrm{Hom}_{R^{op}}({}_SS_R, R)$. 该条件也等价于$S \otimes_R -$和$\mathrm{Hom}_R(S, -)$是自然等价函子.

例2.6. (1) 对任意有限群G, 整群环扩张$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}G$是Frobenius扩张; 见([20]例2.10 (1)).

(2) 设R是一个交换代数, S是R上的Azumaya代数. 则$R \to S$是Frobenius扩张; 见([26]例2.4 (3)).

(3) 设R是一个环, $n > 0$. 用$M_n(R)$和$S_n(R)$分别表示n-阶全矩阵环和中心对称矩阵环. 则$S_n(R) \to M_n(R)$ 是Frobenius扩张. 见([27]定理3.1).

群环上的模

设R是一个交换环和G是一个群. 设RG是G的元素生成的自由R-模, 因此RG的元素可以唯一地表示为$\sum_{g \in G} r(g)g$, 其中$r(g) \in R$, 且对几乎所有的g有$r(g) = 0$. 这使得RG构成一个环, 称为G的群环.

群环RG上的一个模M是一个R-模M加上群G对M的作用. 对任意RG-模M, G平凡作用在M上的最大子模为

$$M^G := \{m \in M | gm = m, \forall g \in G\}.$$

类似地, G平凡作用在M上的最大商模由M与形如$\{gm - m | \forall g \in G, m \in M\}$的元素生成的子模的商模, 即

$$M_G := M/\langle gm - m \rangle.$$

由于R是交换环, 群G有自反同构$g \to g^{-1}$, 故可将任何左RG-模M视为右RG-模, 其中对任意$g \in G$和$m \in M$有$mg = g^{-1}m$. 这样, 对于任意两个左RG-模M和N, 张量积$M \otimes_{RG} N$通过关系

$$g^{-1}m \otimes n = mg \otimes n = m \otimes gn$$

DOI: 10.12677/pm.2023.136180

引入而变得有意义. 用gm替换m, 从而有

$$m \otimes n = g^{-1}(gm) \otimes n = (gm)g \otimes n = gm \otimes gn$$

因此

$$M \otimes_{RG} N = (M \otimes_R N)_G,$$

其中G“对角”作用在$M \otimes_R N$上, 即$g(m \otimes n) = gm \otimes gn$, 其中$m \in M, n \in N$, $g \in G$. 此外, G对$\mathrm{Hom}_R(M, N)$的群作用, 由“对角”作用

$$(gu)(m) = g \cdot u(g^{-1}m)$$

给出, 其中$g \in G, u \in \mathrm{Hom}_R(M, N), m \in M$. 由此可得

$$\mathrm{Hom}_{RG}(M, N) = \mathrm{Hom}_R(M, N)^G.$$

更多细节参考文献[4].

引理2.7. *设R, S是交换环, G是群. 如果$R \to S$是环扩张, 那么有函子的自然等价:*

(1) $S \otimes_R - \simeq SG \otimes_{RG} -$.

(2) $\mathrm{Hom}_R(S, -) \simeq \mathrm{Hom}_{RG}(SG, -)$.

证明 (1)设函子$\mathbf{S} := S \otimes_R -$, 函子$\mathbf{T} := SG \otimes_{RG} -$. 则$\mathbf{S}, \mathbf{T}$是从$RG$-模范畴$\mathrm{Mod}(RG)$到$SG$-模范畴$\mathrm{Mod}(SG)$的共变函子. 令$\tau : \mathbf{S} \to \mathbf{T}$为一个变换, $\tau = (\tau_M : \mathbf{S}M \to \mathbf{T}M)_{M \in \mathrm{Mod}(RG)}$. 对任意的$f : M \to M^{'}$, 其中$M, M^{'} \in \mathrm{Mod}(RG)$. 有下列交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}M & \xrightarrow{\tau_M} & \mathbf{T}M \\ {\scriptstyle \mathbf{S}f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{T}f} \\ \mathbf{S}M^{'} & \xrightarrow{\tau_{M^{'}}} & \mathbf{T}M^{'} \end{array}$$

因此τ是一个自然变换. 此外对任意的$M \in \mathrm{Mod}(RG)$, 有

$$S \otimes_R M \cong SG \otimes_{SG} (S \otimes_R M) = (SG \otimes_S S \otimes_R M)_G \cong (SG \otimes_R M)_G = SG \otimes_{RG} M,$$

这就意味着τ是一个自然同构. 因此$S \otimes_R - \simeq SG \otimes_{RG} -$.

(2)设函子$\mathbf{S}^{'} := \mathrm{Hom}_R(S, -)$, 函子$\mathbf{T}^{'} := \mathrm{Hom}_{RG}(SG, -)$. 则$\mathbf{S}^{'}, \mathbf{T}^{'}$ 是从RG-模范畴$\mathrm{Mod}(RG)$到SG-模范畴$\mathrm{Mod}(SG)$的共变函子. 令$\eta : \mathbf{S}^{'} \to \mathbf{T}^{'}$为一个变换, $\eta = (\eta_N : \mathbf{S}^{'}N \to \mathbf{T}^{'}N)_{N \in \mathrm{Mod}(RG)}$. 对任意的$f : N \to N^{'}$, 其中$N, N^{'} \in \mathrm{Mod}(RG)$. 有下列交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}^{'}N & \xrightarrow{\eta_N} & \mathbf{T}^{'}N \\ {\scriptstyle \mathbf{S}^{'}f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{T}^{'}f} \\ \mathbf{S}^{'}N^{'} & \xrightarrow{\eta_{N^{'}}} & \mathbf{T}^{'}N^{'} \end{array}$$

因此η是一个自然变换. 此外对任意的$N \in \mathrm{Mod}(RG)$, 有

$$\mathrm{Hom}_{RG}(SG, N) \cong \mathrm{Hom}_{RG}(RG \otimes_{RG} SG, N) \cong \mathrm{Hom}_{RG}(RG \otimes_R S, N) \cong (\mathrm{Hom}_R(RG \otimes_R S, N))^G$$

$$\cong (\mathrm{Hom}_R(RG, \mathrm{Hom}_R(S, N)))^G \cong \mathrm{Hom}_{RG}(RG, \mathrm{Hom}_R(S, N)) \cong \mathrm{Hom}_R(S, N),$$

这就意味着η是一个自然同构. 因此$\mathrm{Hom}_R(S, -) \simeq \mathrm{Hom}_{RG}(SG, -)$. 证毕.

3. 群的Gorenstein同调维数对系数环的依赖性

本节先给出群G在系数环R上的Gorenstein同调维数的定义, 然后讨论其在Frobenius扩张下的性质.

对任意群G, 群的Gorenstein同调维数被定义为平凡$\mathbb{Z}G$模$\mathbb{Z}$的Gorenstein平坦维数([12]定义4.5). 类似地, 在文献[13]中有下列定义

定义3.1. *[13] 设R是交换环和G是任意群. 群G在系数环R上的Gorenstein同调维数定义为平凡RG-模R的Gorenstein平坦维数, 记作$\mathrm{Ghd}_R G$.*

注3.2. *由于任意平坦模是Gorenstein平坦模, 对任意的交换环R和群G有$\mathrm{Ghd}_R G \leq \mathrm{hd}_R G$, 其中$\mathrm{hd}_R G$表示群$G$在系数环$R$上的同调维数, 即平凡的$RG$-模$R$的平坦维数. 特别地, 当$\mathrm{hd}_R G$有限时, $\mathrm{Ghd}_R G = \mathrm{hd}_R G$.*

引理3.3. *[13] 设$R \to S$是交换环的平坦扩张. 对任意的群G, 有*

$$\mathrm{Ghd}_S G \leq \mathrm{Ghd}_R G.$$

引理3.4. *设R, S是交换环, G是群. 如果$R \to S$是Frobenius扩张, 那么$RG \to SG$也是Frobenius扩张.*

证明 由于$R \to S$是交换环的Frobenius扩张, 通过定义2.5可知, 存在函子的自然等价$S \otimes_R - \simeq \mathrm{Hom}_R(S, -)$. 又由引理2.7可知$S \otimes_R - \simeq SG \otimes_{RG} -$ 和$\mathrm{Hom}_R(S, -) \simeq \mathrm{Hom}_{RG}(SG, -)$. 因此有函子的自然等价$SG \otimes_{RG} - \simeq \mathrm{Hom}_{RG}(SG, -)$, 即$RG \to SG$是一个Frobenius扩张. 证毕.

下面定理表明群的Gorenstein同调维数$\mathrm{Ghd}_R G$沿着环的Frobenius扩张具有不变性.

定理3.5. *设$R \to S$是交换环的Frobenius扩张. 对任意群G, 有*

$$\mathrm{Ghd}_S G = \mathrm{Ghd}_R G.$$

证明 由于$R \to S$是交换环的Frobenius扩张, 自然也是环的平坦扩张, 因此根据定理3.3立即有$\mathrm{Ghd}_S G \leq \mathrm{Ghd}_R G$.

下证$\mathrm{Ghd}_R G \leq \mathrm{Ghd}_S G$. 考虑$R$和$S$作为$RG$-模, 其中$G$平凡作用在$R$和$S$上, 那么$R$是$S$的直和项. 从而根据引理2.3可知$\mathrm{Ghd}_R G = \mathrm{Gfd}_{RG} R \leq \mathrm{Gfd}_{RG} S$. 因此只需证明不等式$\mathrm{Gfd}_{RG} S \leq \mathrm{Ghd}_S G = \mathrm{Gfd}_{SG} S$成立即可.

如果$\mathrm{Ghd}_S G = \infty$, 那么$\mathrm{Gfd}_{RG} S \leq \mathrm{Ghd}_S G$是显然的. 现假设$\mathrm{Ghd}_S G = n$是有限的. 根据定义存

在SG-模的正合序列

$$\mathbf{Q} = 0 \to Q_n \to Q_{n-1} \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to S \to 0$$

其中$Q_i \in \mathcal{GF}(SG)(0 \le i \le n)$. 设$M$是任意Gorenstein平坦$SG$-模. 那么根据定义, 存在$SG$-模的完全平坦分解

$$\mathbf{F} = \cdots \to F_{-1} \to F_0 \to F_1 \to \cdots$$

使得$M \cong \mathrm{Im}(F_0 \to F_1)$. 由于$R \to S$是交换环的Frobenius扩张, 根据引理3.4可知$RG \to SG$也是Frobenius扩张. 因此对任意内射右RG-模I, 有同构$I \otimes_{RG} SG \cong \mathrm{Hom}_{RG}(SG, I)$和$I \otimes_{RG} \mathbf{F} \cong (I \otimes_{RG} SG) \otimes_{SG} \mathbf{F}$. 注意诱导模$I \otimes_{RG} SG$是内射$SG$-模且复形$I \otimes_{RG} \mathbf{F}$ 是正合的. 因此SG-模的完全平坦分解$\mathbf{F}$限制为RG-模序列仍为完全平坦分解, 从而M被限制为Gorenstein平坦RG-模. 因此$\mathbf{Q}$限制为RG-模的序列仍为正合的且每个Q_i是Gorenstein平坦RG-模, 即$\mathrm{Gfd}_{RG} S \le n$. 证毕.

4. 群变化下的群的Gorenstein同调维数

本节将研究群的Gorenstein同调维数与其子群的Gorenstein同调维数之间的联系.

设R是交换环, H是群G的子群. 显然RG作为RH-模是自由的. 因此$RH \to RG$自然地构成一个平坦扩张, 进而从RG-模到RH-模的限制函子Res_H^G是正合的且保持内射模和平坦模. 记从RH-模范畴$\mathrm{Mod}(RH)$到RG-模范畴$\mathrm{Mod}(RG)$ 的诱导函子为

$$\mathrm{Ind}_H^G - = RG \otimes_{RH} -$$

和余诱导函子为

$$\mathrm{Coind}_H^G - = \mathrm{Hom}_{RH}(RG, -).$$

称群G的一个子群序列$(G_\lambda)_{\lambda<\mu}$为升序过滤, 如果存在一个极限指标$\mu$和序列

$$\{1\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_\lambda \subseteq \cdots \subseteq G,$$

使得$G = G_\mu = \varinjlim_{\lambda<\mu} G_\lambda$.

引理4.1. *设R是交换环, H是群G的指数有限的子群. 对任意RH-模M, 诱导模$\mathrm{Ind}_H^G M$是Gorenstein平坦RG-模.*

证明 由于M是Gorenstein平坦RH-模, 因此存在一个RH-模的完全平坦分解

$$\mathbf{F} = \cdots \to F_{-1} \to F_0 \to F_1 \to \cdots$$

注意RG作为RH-模是平坦的, 因此有平坦RG-模的正合复形

$$\mathrm{Ind}_H^G \mathbf{F} = \cdots \to \mathrm{Ind}_H^G F_{-1} \to \mathrm{Ind}_H^G F_0 \to \mathrm{Ind}_H^G F_1 \to \cdots.$$

对任意内射右RG-模E, E是内射RH-模且有同构$E \otimes_{RG} \mathrm{Ind}_H^G \mathbf{F} \cong E \otimes_{RH} \mathbf{F}$. 因此$\mathrm{Ind}_H^G M$是Gorenstein平坦$RG$-模.

命题4.2. *设R是交换环，G是群. 考虑群G的一个升序过滤$(G_\lambda)_{\lambda<\mu}$. 对任意$RG$-模$M$和$\lambda<\mu$，如果$M$作为$RG_\lambda$-模是Gorenstein平坦模，那么$M$是Gorenstein平坦$RG$-模.*

证明 对任意$\lambda<\mu$，可视M为一个RG_λ-模. 现考虑诱导模

$$M_\lambda=\mathrm{Ind}_{G_\lambda}^{G}M=RG\otimes_{RG_\lambda}M.$$

由于$G_\mu=G$，因此$M_\mu=RG\otimes_{RG_\mu}M=M$. 又由引理4.1可知诱导模$M_\lambda$也是Gorenstein 平坦$RG$-模. 对任意的$k\leq\lambda<\mu$，由嵌入$G_k\to G_\lambda$诱导了$RG$-模满同态$M_k\to M_\lambda$. 从而，我们有$RG$-模的序列

$$M_0\to M_1\to\cdots\to M_\lambda\to\cdots\to M_\mu=M$$

注意根据([21]定理3.7)和([28]命题2.3)可知$\mathcal{GF}(RG)$对任意正向极限封闭. 因此$M=M_\mu=\varinjlim_{\lambda<\mu}M_\lambda$是Gorenstein平坦$RG$-模. 证毕.

命题4.3. *设R是交换环，G是群. 考虑群G的一个升序过滤$(G_\lambda)_{\lambda<\mu}$. 对任意$RG$-模$M$，有*

$$\mathrm{Gfd}_{RG}M\leq\sup_{\lambda<\mu}\mathrm{Gfd}_{RG_\lambda}M.$$

证明 如果$\sup_{\lambda<\mu}\mathrm{Gfd}_{RG_\lambda}M=\infty$，那么结论显然成立. 现假设$\sup_{\lambda<\mu}\mathrm{Gfd}_{RG_\lambda}M=n<\infty$. 考虑$M$的一个$RG$-模平坦分解

$$\cdots\to F_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_0\to M\to 0$$

和合冲$N=\mathrm{Im}(F_n\to F_{n-1})$. 由于任意平坦$RG$-模视为$RG_\lambda$-模仍是平坦的，故由$\sup_{\lambda<\mu}\mathrm{Gfd}_{RG_\lambda}M\leq n$ 可知N是Gorenstein平坦RG_λ-模. 因此，根据命题4.3可知N也是Gorenstein平坦RG-模. 故有RG-模M的Gorenstein平坦分解

$$0\to N\to F_{n-1}\to\cdots\to F_0\to M\to 0$$

即$\mathrm{Gfd}_{RG}M\leq n$. 证毕.

推论4.4. *设R是交换环，G是群. 考虑群G的一个升序过滤$(G_\lambda)_{\lambda<\mu}$，则有*

$$\mathrm{Ghd}_RG\leq\sup_{\lambda<\mu}\mathrm{Ghd}_RG_\lambda.$$

证明 这是命题4.3的一个特例，令$M=R$即可. 证毕.

对上述命题4.3和推论4.4中的不等式，一个自然的问题是什么情况下相等. 对此有下列结论.

命题4.5. *设R是交换环，G是群. 考虑群G的一个升序过滤$(G_\lambda)_{\lambda<\mu}$. 对任意$RG$-模$M$，如果$[G:G_\lambda]_{\lambda<\mu}$是有限的，那么*

$$\mathrm{Gfd}_{RG}M=\sup_{\lambda<\mu}\mathrm{Gfd}_{RG_\lambda}M.$$

证明 从推论4.4立即有$\mathrm{Gfd}_{RG}M\leq\sup_{\lambda<\mu}\mathrm{Gfd}_{RG_\lambda}M$. 下证$\sup_{\lambda<\mu}\mathrm{Gfd}_{RG_\lambda}M\leq\mathrm{Gfd}_{RG}M$. 现假设$Q$是Gorenstein平坦$RG$-模，$\mathbf{F}$是一个关于$RG$-模的完全平坦分解使得$Q\cong\mathrm{Im}(F_0\to F_1)$，通过限制$\mathbf{F}$为平坦$RG_\lambda$-模的正合复形. 对任意内射$RG_\lambda$-模$I$，由于$[G:G_\lambda]_{\lambda<\mu}$是有限的，因此$\mathrm{Ind}_{G_\lambda}^{G}I\simeq\mathrm{Coind}_{G_\lambda}^{G}I$是内射$RG$-模. 根据同构$\mathbf{F}\otimes_{RG_\lambda}I\cong\mathbf{F}\otimes_{RG}\mathrm{Ind}_{G_\lambda}^{G}I$可知，$\mathbf{F}$也是关于$RG_\lambda$-模的完全平坦

分解并且Q被限制成Gorenstein平坦RG_λ-模. 因此

$$\sup_{\lambda<\mu}\mathrm{Gfd}_{RG_\lambda}M \leq \mathrm{Gfd}_{RG}M.$$

证毕.

推论4.6. 设R是交换环, G是群. 考虑群G的一个升序过滤$(G_\lambda)_{\lambda<\mu}$. 如果对任意$\lambda<\mu$, $[G:G_\lambda]$是有限的, 那么

$$\mathrm{Ghd}_R G = \sup_{\lambda<\mu}\mathrm{Ghd}_R G_\lambda.$$

证明 这是命题4.5的一个特例, 令$M=R$即可. 证毕.

5. 结论与展望

本文主要研究了群的Gorenstein同调维数, 它是群的同调维数的推广. 本文主要讨论了群的Gorenstein 同调维数对系数环的依赖性, 及其与子群的Gorenstein同调维数的联系. 证明了群的Gorenstein同调维数在环的Frobenius扩张下具有不变性, 以及对$[G:G_\lambda]_{\lambda<\mu}$ 有限的群G的一个升序过滤$(G_\lambda)_{\lambda<\mu}$, 有$\mathrm{Ghd}_R G=\sup_{\lambda<\mu}\mathrm{Ghd}_R G_\lambda$. 关于群的Gorenstein 同调维数的性质和应用还有待研究, 我也期待自己后续在这方面能有新的进展.

参考文献

[1] Auslander, M. and Bridge, M. (1969) Stable Module Theory. American Mathematical Society, Providence.

[2] Enochs, E.E., Jenda, O.M.G. and Torrecillas, B. (1993) Gorenstein Flat Modules. *Journal of Nanjing University (Mathematical Biquarterly)*, **10**, 1-9.

[3] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (2011) Relative Homological Algebra: Volume 1. Walter de Gruyter, Berlin.

[4] Brown, K.S. (1982) Cohomology of Groups (Graduate Texts in Mathematics, No. 87). Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

[5] Stallings, J. (1968) On Torsion-Free Groups with Infinitely Many Ends. *Annals of Mathematics*, **88**, 312-334. https://doi.org/10.2307/1970577

[6] Swan, R.G. (1969) Groups of Cohomological Dimension One. *Journal of Algebra*, **12**, 585-601. https://doi.org/10.1016/0021-8693(69)90030-1

[7] Asadollahi, J., Bahlekeh, A. and Salarian, S. (2009) On the Hierarchy of Cohomological Dimensions of Groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **213**, 1795-1803. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2009.01.011

[8] Bahlekeh, A., Dembegioti, F. and Talelli, O. (2009) Gorenstein Dimension and Proper Actions. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **41**, 859-871. https://doi.org/10.1112/blms/bdp063

[9] Emmanouil, I. and Talelli, O. (2014) Finiteness Criteria in Gorenstein Homological Algebra. *Transactions of the American Mathematical Society*, **366**, 6329-6351. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2014-06007-8

[10] Emmanouil, I. and Talell, O. (2018) Gorenstein Dimension and Group Cohomology with Group Ring Coefficients. *Journal of the London Mathematical Society*, **97**, 306-324. https://doi.org/10.1112/jlms.12103

[11] Talelli, O. (2014) On the Gorenstein and Cohomological Dimension of Groups. *Proceeding of the American Mathematical Society*, **142**, 1175-1180. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2014-11883-1

[12] Asadollahi, J., Bahlekeh, A., Hajizamani, A. and Salarian, S. (2011) On Certain Homological Invariants of Groups. *Journal of Algebra*, **335**, 18-35. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2011.03.018

[13] Luo, Y.X. and Ren, W. (2022) On Gorenstein Homological Dimension of Groups. arXiv.2205.15542

[14] Kasch, F. (1954) Grundlagen einer Theorie der Frobeniuserweiterungen. *Mathematische Annalen*, **127**, 453-474. https://doi.org/10.1007/BF01361137

[15] Browna, K.A., Gordon, I.G. and Stroppel, C.H. (2008) Cherednik, Hecke and Quantum Algebras as Free Frobenius and Calabi-Yau Extensions. *Journal of Algebra*, **319**, 1007-1034. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2007.10.026

[16] Kock, J. (2004) Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511615443

[17] Xi, C. (2021) Frobenius Bimodules and Flat-Dominant Dimensions. *Science China Mathematics*, **64**, 33-44. https://doi.org/10.1007/s11425-018-9519-2

[18] 周芮, 赵志兵. Frobenius扩张下模的无挠性和自反性[J]. 山东大学学报(理学版), 2022, 57(10): 52-58.

[19] Hu, J.S., Li, H.H., Geng, Y.X. and Zhang, D.D. (2020) Frobenius Functors and Gorenstein Flat Dimensions. *Communications in Algebra*, **48**, 1257-1265. https://doi.org/10.1080/00927872.2019.1677699

[20] Ren, W. (2018) Gorenstein Projective Modules and Frobenius Extensions. *Science China Mathematics*, **61**, 1175-1186. https://doi.org/10.1007/s11425-017-9138-y

[21] Holm, H. (2004) Gorenstein Homological Dimensions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **189**, 167-193. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2003.11.007

[22] Šaroch, J. and Šťovíček, J. (2020) Singular Compactness and Definability for Σ-Cotorsion and Gorenstein Modules. *Selecta Mathematica*, **26**, Article No. 23. https://doi.org/10.1007/s00029-020-0543-2

[23] Bennis, D. (2009) Rings over Which the Class of Gorenstein Flat Modules Is Closed under Extensions. *Communications in Algebra*, **37**, 855-868.
https://doi.org/10.1080/00927870802271862

[24] Yang, G. and Liu, Z. (2012) Gorenstein Flat Covers over GF-Closed Rings. *Communications in Algebra*, **40**, 1632-1640. https://doi.org/10.1080/00927872.2011.553644

[25] Kadison, L. (1999) New Examples of Frobenius Extensions. American Mathematical Society, Providence. https://doi.org/10.1090/ulect/014

[26] Zhao, Z. (2019) Gorenstein Homological Invariant Properties under Frobenius Extensions. *Science China Mathematics*, **62**, 2487-2496. https://doi.org/10.1007/s11425-018-9432-2

[27] Xi, C. and Yin, S. (2020) Cellularity of Centrosymmetric Matrix Algebras and Frobenius Extensions. *Linear Algebra and Its Applications*, **590**, 317-329.
https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.01.002

[28] Enochs, E.E. and Lòpez-Ramos, J.A. (2002) Kaplansky Classes. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, **107**, 67-79.