Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(1), 17-22
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.141003

Hans汉斯

向量组线性相关性评判方法分析

李婷婷，王　军

云南民族大学数学与计算机科学学院，云南　昆明

收稿日期：2023年12月2日；录用日期：2024年1月3日；发布日期：2024年1月11日

摘　要

线性代数研究的是线性映射关系，线性映射在有限维向量空间上体现为基的变换，基是可以唯一线性表示向量空间中任意向量的一组向量，而向量与向量组之间线性组合的相关性体现了基在不同方面的属性。本文对向量组线性相关性的评判方法进行了分析和比较，从不同的角度对向量组之间的相关性与无关性进行了总结，然后给出了向量组线性相关性的评判方法，并对它们进行了详细的阐述和比较。最后给出了各种方法的优缺点和适用范围，为读者在实践中选择合适的方法提供了参考。

关键词

向量组，线性相关，线性无关，评判方法

Analysis of Linear Correlation Evaluation Methods for Vector Groups

Tingting Li, Jun Wang

School of Mathematics & Computer Science, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: Dec. 2nd, 2023; accepted: Jan. 3rd, 2024; published: Jan. 11th, 2024

Abstract

Linear algebra studies linear mapping relationships, which are manifested as transformations of bases on a finite dimensional vector space. Bases are a set of vectors that can uniquely represent any vector in the vector space linearly. The correlation between linear combinations of vectors reflects the properties of bases in different aspects. This article analyzes and compares the evaluation methods for the linear correlation of vector groups, summarizes the correlation and irrelevance between vector groups from different perspectives, and then provides the evaluation methods for the linear correlation of vector groups, and elaborates and compares them in detail. Finally, the advantages, disadvantages, and applicability of various methods are presented, provid-

文章引用: 李婷婷, 王军. 向量组线性相关性评判方法分析[J]. 理论数学, 2024, 14(1): 17-22.
DOI: 10.12677/pm.2024.141003

ing readers with reference for selecting appropriate methods in practice.

Keywords

Vector Group, Linear Correlation, Linear Independence, Evaluation Method

1. 引言

向量组线性相关性是数学和工程领域的一个重要概念，它在许多实际问题中都有广泛应用，如统计、机器学习、信号处理等[1]。在这些应用场景中，线性相关性评判方法被用来分析向量之间的关系，进而进行决策和预测[2]。例如，在电路分析中，可以利用线性无关性来分析电路的稳定性和性能，也可以利用线性无关性来进行信号的分离和重构，以及进行信号的预测和滤波；更可以利用线性无关性来选择特征，以及进行分类和回归等任务[3]。因此，研究线性相关性评判方法具有重要的理论和实践意义。然而，现有的线性相关性评判方法存在一些问题。首先，一些方法假设数据服从某种分布，这在实际应用中往往不成立[4]。其次，一些方法只考虑了单个向量或一对向量之间的关系，而忽略了更广泛的关系。最后，一些方法计算复杂度高，难以在大数据集上应用[5]。

因此，需要对向量组之间的相关性进行评判分析。针对这些问题，本文旨在提出几种线性相关性评判方法，利用该方法能够更准确地衡量向量之间的关系，并具有更广泛的应用范围。通过以上研究，我们期望能够为线性相关性评判方法的发展和应用提供新的思路和方法支持。

2. 向量组线性相关概念

向量线性相关是线性代数中的一个基本概念，与向量空间、基和线性组合等密切相关。以下是一些向量线性相关的基本知识：

2.1. 向量和向量组

有大小又有方向的量就叫做向量，也就是说，看向量应着重关注两个点：一是大小，二是方向用带有箭头的线段来表示向量[6]。向量的重要意义在于它有双重属性一是几何属性，一是代数属性。几何属性是从空间几何的角度来理解向量既有长度又有方向的量的表示，代数数学是可以进行数学加减乘除等运算。因此判断向量线性相关，从几何角度就是是否某个向量在其他向量生产的向量空间里面，从代数角度就是是否某一个向量可以用其他向量加上不同的系数表达出来。如果是两个向量，空间看这两个是否平行，从代数看，是否一个向量与另外一个向量乘上某系数相等。

线性空间中的元素称为向量，就相当于描述一个长方体的长、宽、高，向量组当然就是一组向量了，而 n 维线性空间中 n 个线性无关的向量可以构成该线性空间的一组基，向量可以用该基下的坐标表示，比如在三维坐标系下把长方体表示为向量(2,3,1)，(4,6,2)和(6,9,3)等等，这样一组就构成了向量组。

2.2. 线性相关及线性无关概念

线性相关性和线性无关性是数学中的重要概念，它们在各个领域中都有广泛的应用，可以帮助我们

更好地理解和分析各种实际问题。如在物理和工程领域中，线性相关性和线性无关性被用来描述物理量之间的关系，以及解决各种实际问题；在经济和金融领域中，线性相关性和线性无关性被用来分析数据之间的关系，以及进行预测和决策；在机器学习和数据科学领域中，线性相关性和线性无关性被用来理解和描述数据之间的关系，以及进行各种机器学习任务；在图像处理和计算机视觉领域中，线性相关性和线性无关性被用来处理图像和视频数据；在信号处理领域中，线性相关性和线性无关性被用来分析和处理信号数据[7]。

因此，根据向量组的定义易知向量组的线性关系有如下的特征：

1) 含有零向量的向量组线性相关；

2) 若单个向量 $a \neq 0$，则向量组是线性无关的；相反，则向量组线性相关；

3) 含有 $n+1$ 个向量的 n 维向量组必定线性相关；

4) 如果向量组中的某个向量线性相关，则其余所有向量组线性相关；如果向量组线性无关，则其余的任何一种向量组线性无关。

所以，如果一个向量组没有线性相关就是线性无关，为了更清楚的认识线性相关与线性无关，以下给出了它们之间最大的差异。

1) 概念不同：在线性相关的向量组中，有不全是零且无关的向量组 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使地 $k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n = 0$ 成立而线性无关的向量组，只有当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$，才能使得向量组 $k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n = 0$ 成立。

2) 线性关系问题：线性相关向量组中至少有一个向量能由其余 $n-1$ 个向量线性表示；而线性无关的向量中任何一个向量都不能由其余 $n-1$ 个向量线性表示[8]。

3) 与线性方程组的关系：若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性相关，则存在不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，使 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$，即用矩阵式(1)可以表示：

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0 \tag{1}$$

当与线性无关，也就是有零解。从中，我们能够发现在研究向量的线性相关和方程组之间存在着直接的关联，也就是 $ax = 0$。

2.3. 向量的基

在向量空间中，基是描述、刻画向量空间的基本工具。向量空间的基是它的一个特殊的子集，基的元素称为基向量。向量空间中任意一个元素，都可以唯一地表示成基向量的线性组合[8]。在一个平面直角坐标系中，可以取 x 轴和 y 轴上的两个单位向量(1,0)和(0,1)作为基底，这时平面内的点可以通过两个坐标值唯一地表示出来。类似地，在三维空间中，可以取三个互相垂直的单位向量(1,0,0)，(0,1,0)和(0,0,1)作为基底，这时空间中的点可以通过三个坐标值唯一地表示出来。

基的选择决定了线性映射的具体形式。在给定一组基的情况下，任何一个向量都可以由这组基进行线性组合得到[9]。因此，不同的基选择会导致不同的线性映射形式。基的选择会影响向量空间的结构。如果选择的基是线性无关的，那么该向量空间是一个线性空间；如果选择的基是线性相关的，那么该向量空间不是一个线性空间。例如，在三维空间中，如果选择三个线性无关的向量作为基，那么任何向量都可以由这三个基进行线性组合得到。因此，该三维空间是一个线性空间。但是如果选择三个线性相关

的向量作为基，那么该三维空间不是一个线性空间。

此外，不同的基选择还会导致向量空间中的坐标表示不同。在选定一组基之后，任何一个向量都可以由这组基的线性组合表示，而这个组合的系数就是这个向量的坐标。因此，不同的基选择会导致不同的坐标表示。

3. 向量组线性相关性的评判方法

向量线性相关与线性无关是反应向量组之间重要的概念，如果其中一个向量可以表示为其他向量的线性组合，则称这两个或多个向量线性相关。相反，如果没有向量能表示为其他向量的线性组合，则称这些向量为线性无关。下面总结了相关方法来更好的评判向量组之间的线性相关性。

3.1. 利用定义法评定

线性映射是向量空间中的一种重要概念，它指的是将一个向量空间中的向量映射到另一个向量空间中的向量，并且这种映射要满足一定的线性性质[10]。具体来说，设有两个向量空间 V 和 W，并且 V 和 W 的维度相同(即 dim V = dim W)，现在要找一个从 V 到 W 的映射 f，使得对于 V 中的任意向量 v 和标量 a，都有 $f(av)=a*f(v)$，这就是线性映射的定义。向量组线性相关与无关的性质可以根据线性映射进行解释。例如矩阵的秩本质上是对应线性映射值域的维数，而注意到矩阵的列就是原空间的基在线性映射下变换得到的向量组，因此值域就是由矩阵的列生成的。因而矩阵的列向量组线性无关等价于其值域的维数等于列数，也即矩阵对应的线性映射是一个单射。

根据定义可以得出，向量组线性无关是指向量组的线性组合如果为零向量，必有每一个系数为 0，换言之向量组只有唯一的方式表示 0，而这就是向量组表示任意可以表示的向量的方式都唯一的充要条件。(因为如果存在不全为零的一组系数表示 0，那么在表示任意向量的时候加上这组系数依然表示该向量，反之亦然)

总之，利用定义法评定向量线性相关性适用于任何维度的向量，简单直观，易于理解和掌握。但由于定义法只需要计算向量之间的线性组合系数，因此适用于小样本数据的情况。

3.2. 利用相关定理来评判

定理 1：关于向量组 $I=a_1,a_2,\cdots,a_n\ (n\ge 2)$ 与线性相关的充分条件就是在向量组 I 中，必须有一个方向能够被其他的向量线性地表出。

定理 2：如果与向量组 $I=a_1,a_2,\cdots,a_n\ (n\ge 2)$ 的所有部分线性相关，那么与整个向量组 I 都线性相关。设一个数组 $I=a_1,a_2,\cdots,a_n\ (n\ge 2)$ 若线性无关，即其与任何的部分组成都线性无关。总的来说可以理解为若局部有关，则与总体有关；如果总体无关，则与其他部分组成也无关[11]。

定理 3：假设与向量组 $I=a_1,a_2,\cdots,a_n\ (n\ge 2)$ 线性无关，且与矢量组 $I=a_1,a_2,\cdots,a_n,\beta$ 线性相关，那么 β 就可以被向量组 I 线性的表示，并且表示方式为唯一。

定理 4：在有关向量组之间相关的理论上，假设在该向量组之间的任何关系中出现的非全部为零的线性组合均等于零，则该组合的所有向量线性地相关。假定不具有一个系数为零的线性组合使其为零，则向量组与无关。

定理 5：先将向量中的每个元素作为列向量，并集合在一起记为矩阵 A，然后考察齐次线性方程中 Ax = 0，假设这个方程式有零解，那么这些向量组必定与和无关。假设 Ax = 零且是非零值，所以这个向量组必定线性相关于[12]。

因此，利用相关定理评定向量组线性相关性具有准确度高、应用广泛和适用性强的优点，但也存在

对数据要求较高、计算复杂度高和对异常值敏感等缺点。在实际应用中，需要根据具体问题和数据特点选择合适的方法来评估向量组的线性相关性。

3.3. 利用矩阵的秩判定

设有两个向量组 A、B，如果要考察 A、B 两个向量组中的所有向量之间是否线性相关，可考察矩阵(A, B)的秩。A 向量组与 B 向量组之间的关系是这样定义的：

1) 向量组 A 可由向量组 B 线性表示(也称 A 是 B 的线性组合)，这时秩(B) = 秩(A, B)；向量组 B 可由向量组 A 线性表示，此时秩(A) = 秩(A, B)；

2) 向量组 A 与向量组 B 可互相线性表示，秩(A) = 秩(B) = 秩(A, B)。

概括而言，利用矩阵的秩判定向量组线性相关性具有数值稳定性好、可适用于不同维数和计算简单等优点，但也存在对矩阵的行数敏感、对零元素敏感和不适用于非线性关系等缺点。在实际应用中，需要根据具体问题和数据特点选择合适的方法来评估向量组的线性相关性。

3.4. 利用行列式的值来判定

1) 若向量组 $I=\left(a_1,a_2,\cdots,a_m\right)$ 是由 m 个 m 维列向量所组成的向量组，且向量组 I 所构成的矩阵 $I=\left(a_1,a_2,\cdots,a_m\right)$，即 I 为 m 阶方阵，则有：

① 当 $|I|=0$ 时，则证明向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是线性相关的；

② 当 $|I|\neq 0$ 时，则证明向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是线性无关的。

2) 若向量组 $I=\left(a_1,a_2,\cdots,a_m\right)$ 的个数 m 与维数 n 不同时，则有：

① 当 $m>n$ 时，则向量组 $I=\left(a_1,a_2,\cdots,a_m\right)$ 是线性相关的；

② 当 $m<n$ 时，转化为上述来进行判定，即选取 m 个向量组成的 n 维向量组，若此 m 维向量组是线性相关的，则添加分量后，得到的向量组也是线性相关的[13]。

总之，利用行列式的值来判定向量组线性相关性具有直观易懂和计算简便等优点，但如果矩阵中存在零元素，那么这些零元素可能会对行列式的值产生影响，导致误判。

3.5. 利用向量组的相关性质判定

线性无关向量组具有独立性，即不能通过相加或向量乘法将其中一个向量表示为另一个向量。如果向量组内的向量线性相关，那么该向量组内至少有一个向量可以被其他向量线性表示，在“向量的线性表示”中，可以把向量 b 加入到由向量组 I 中，构成新的向量组 I，那么向量组 $I\left(I=a_1,a_2,\cdots,a_n,b\right)$ 必定线性相关，因为其中的向量 b 可以被其他的向量，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 线性表示，也就是说这个向量蛮多余的，可以化去。而线性无关则表示所有向量组内的向量全部都有用，是不能化去的。下面总结了向量组线性相关的性质：

1) 一组向量里面，如果其中有几个向量是线性无关的，则这几个线性无关的向量就形成这个向量组里的一个线性无关组。但这个无关组未必是“极大”的，若要能成为“极大”，就必须是往这个向量组里再添加进一个向量后，这个扩大的组就不再是无关的了。在这样的情况下，这组线性无关的向量既是无关的，又保持了一个在无关和相关的边界上数量最大的状态，所以被称为极大线性无关组[14]。

2) 从极大无关组的定义出发，满足线性无关且其余向量(如果有其余向量纯在的话)都可由其线性表示的那些向量即为极大无关组。若一个向量组已线性无关，则其极大无关组就是它本身，因为若取这个向量组的一部分是不能构成极大无关的。

3) 如果这个向量组里的向量都是线性无关的，那么，这些向量当然就是一个线性无关组。

综上所述，利用向量组的相关性质判定向量组线性相关性具有考虑全面和适用范围广等优点，但求解齐次线性方程组需要一定的计算量和时间，特别是对于大规模的数据集，计算复杂度可能会很高。

3.6. 利用齐次线性方程组的解判定

齐次线性方程组的解分为唯一零解和多解两种，换句话说，它的解是可以构成一个解空间的，而这个解空间是一个线性子空间，它同样满足数乘和向量加法封闭运算[15]。将一组向量或齐次线性方程组，转为系数矩阵，求解线性方程组，若存在非零解，则线性相关，若只存在零解则线性无关；将一组向量或齐次线性方程组，转为系数矩阵，求解线性方程组，若只有零解，则线性无关，若只存在非零解则线性相关，则说明齐次线性方程组不会存在无解，因为至少存在一组解为零解使得等式成立。

总而言之，利用齐次线性方程组的解判定向量组线性相关性具有准确度高和适用范围广等优点，但也存在对数据的要求较高和计算复杂度高等缺点。

4. 结论

本次研究从向量组线性关系的基础上出发，总结了目前相关学者对向量组线性相关性的研究现状，最后给出了关于向量组的一些评判方法。通过相关证明表示，向量组之间的线性关系线性不能简单通过向量组中的一些向量进行线性运算得到相关的判断，也需要考虑向量组的自身定义和相关性质。

参考文献

[1] 尹修伟，宋贤梅. 一类向量组线性相关性的判定方法探究[J]. 黑龙江科学, 2022, 13(3): 96-97.

[2] 李德琼，谢小良，王仲梅. 判断向量组线性相关性的若干方法[J]. 湖南理工学院学报(自然科学版), 2021, 34(1): 14-16.

[3] 王晓欣. 向量组线性相关性判定方法的探讨[J]. 邯郸职业技术学院学报, 2019, 32(4): 89-91.

[4] 张艳. 一个向量组线性相关的判定方法[J]. 数字通信世界, 2019(5): 262-263.

[5] 张芳芳，李敏，冷森，等. 复向量空间的线性相关性及其在复参数辨识中的应用[J]. 齐鲁工业大学学报, 2019, 33(1): 70-73.

[6] 侯雯昕. 向量组线性相关与线性无关的判定方法[J]. 赤峰学院学报(自然科学版), 2016, 32(9): 4-5.

[7] 全梅花，张雪梅. 判定向量组线性相关性的几种常用方法[J]. 廊坊师范学院学报(自然科学版), 2015, 15(3): 36-38.

[8] 张沛华. 判定向量组线性相关性的若干方法[J]. 教育教学论坛, 2013(19): 167-168.

[9] 白颉. 判定向量线性相关性的几种方法[J]. 太原大学教育学院学报, 2013, 31(1): 96-99.

[10] 康浩，付超，孙永彪. 向量组线性相关性的本质分析及类比教学[J]. 教育现代化, 2018, 5(36): 307-308.

[11] 刘美玲. 向量的线性相关性在线性方程组求解中的应用[J]. 数学大世界(下旬), 2018(7): 69-72.

[12] 何守元. 向量组线性相关性的三种典型判法[J]. 数学学习与研究, 2017, 24(8): 144-147.

[13] 樊彩虹. 例谈判定向量组线性关系的若干方法[J]. 中学数学教学参考, 2015(18): 70-72.

[14] 罗文强. 向量组线性关系及极大无关组求解的直观验证与计算[J]. 教育教学论坛, 2016(52): 101-102.

[15] 缪应铁. 关于向量组线性相关性的教学[J]. 科教导刊(上旬刊), 2018(19): 121-122.