

# 二维转置预泊松代数的分类

杨雪婷

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2024年1月22日; 录用日期: 2024年3月14日; 发布日期: 2024年3月21日

## 摘要

随着二维Zinbiel代数, 预李代数分类结果的完成, 在转置泊松代数的研究基础上, 本文研究了二维转置预泊松代数的分类以及转置预泊松代数与转置泊松代数的关系。首先利用二维Zinbiel代数的分类结果, 取定转置预泊松代数上的Zinbiel代数, 计算在这个条件下二维转置预泊松代数上预李代数的左乘运算, 确定预李代数的类型。通过具体计算讨论二维的转置预泊松代数在同构意义下的分类。

## 关键词

转置预泊松代数, 预李代数, Zinbiel代数

# Classification of 2-Dimensional Transposed Pre-Poisson Algebras

Xueting Yang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jan. 22<sup>nd</sup>, 2024; accepted: Mar. 14<sup>th</sup>, 2024; published: Mar. 21<sup>st</sup>, 2024

## Abstract

With the completion of the classification of 2-dimensional Zinbiel algebras and pre-lie algebras, based on the study of transposed Poisson algebras, in this paper, the classification of two-dimensional transposed pre-poisson algebras and the relationship between transposed pre-poisson algebras and transposed Poisson algebras are studied. First, by using the classification results of 2-dimensional Zinbiel algebras, we determine the Zinbiel algebras on transposed pre-poisson algebras, under these conditions, the left multiplication of pre-Lie algebras on two-dimensional transposed pre-poisson algebras is calculated, and the type of pre-Lie algebras is determined. The classification of two-dimensional transposed pre-poisson algebras in isomorphic sense is discussed by concrete calculation.

文章引用: 杨雪婷. 二维转置预泊松代数的分类[J]. 理论数学, 2024, 14(3): 32-41.

DOI: 10.12677/pm.2024.143083

## Keywords

Transposed Pre-Poisson Algebra, Pre-Lie Algebra, Zinbiel Algebra

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

预李代数也称为左对称代数，是一类非结合代数。是由 Gerstenhaber 在研究结合环的上同调结构中提出的[1]，它在几何和代数的理论中有着广泛的应用。Zinbiel 代数是 Loday 在文献[2]中引入的。Aguar 在[3]中通过将 Zinbiel 代数与预李代数结合在一起，满足一些相容条件后，引入了预泊松代数，本文将通过类似方法引入转置预泊松代数的概念。转置预泊松代数与转置泊松代数之间有着一定联系，转置泊松代数是文献[4]中作者通过交换泊松代数的莱布尼茨规则中两个二元运算引入的，它也是当下研究的重要课题。在文献[5]中作者给出了转置泊松代数的分类。本文将研究转置泊松代数和转置预泊松代数的联系，并研究二维转置预泊松代数在同构意义下的分类。

## 2. 预备知识

**定义 2.1** [4] 设  $A$  是复数域上的向量空间， $\cdot, [\cdot, \cdot]$  是  $A$  上的双线性运算，若  $(A, \cdot)$  是交换结合代数， $(A, [\cdot, \cdot])$  是李代数，且满足相容条件

$$2z \cdot [x, y] = [z \cdot x, y] + [x, z \cdot y], \forall x, y, z \in A, \quad (2.1)$$

则称  $(A, \cdot, [\cdot, \cdot])$  为转置泊松代数。

**定义 2.2** [2] 设  $A$  是复数域上的向量空间，且有双线性运算  $*$ :  $A \times A \rightarrow A$ ，若  $*$  满足

$$x * (y * z) = (y * x) * z + (x * y) * z, \forall x, y, z \in A, \quad (2.2)$$

则称  $(A, *)$  为 Zinbiel 代数。

**定义 2.3** [6] 设  $(A, \cdot)$  是交换结合代数， $V$  是线性空间， $\rho$  是  $A$  到  $End(V)$  的线性映射，若满足

$$\rho(x \cdot y) = \rho(x)\rho(y), \forall x, y \in A, \quad (2.3)$$

则称  $(\rho, V)$  是交换结合代数  $(A, \cdot)$  的表示。

**命题 2.1** 设  $(A, *)$  是 Zinbiel 代数， $L_*$  为  $A$  关于  $*$  的左乘运算，在  $A$  上定义

$$x \cdot y = x * y + y * x, \forall x, y \in A, \quad (2.4)$$

则

- (1)  $(A, \cdot)$  为交换结合代数；
- (2)  $(L_*, A)$  是交换结合代数  $(A, \cdot)$  的表示。

证(1). 由(2.4)式知，

$$x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in A$$

则  $(A, \cdot)$  为交换代数。

任取  $x, y, z \in A$ ，下面验证  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$  是否成立，由  $\cdot$  和  $*$  运算满足(2.4)式，直接计算可知

$$\begin{aligned} (x \cdot y) \cdot z &= (x * y + y * x) \cdot z = (x * y) * z + z * (x * y) + (y * x) * z + z * (y * x), \\ x \cdot (y \cdot z) &= x \cdot (y * z + z * y) = x * (y * z) + (y * z) * x + x * (z * y) + (z * y) * x. \end{aligned}$$

由  $(A, *)$  是 Zinbiel 代数，可知  $*$  满足(2.2)式，故  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ ，则  $(A, \cdot)$  为结合代数。

综上所述， $(A, \cdot)$  为交换结合代数。

(2). 由(1)知  $(A, \cdot)$  为交换结合代数，设  $L_*$  为  $A$  关于  $*$  的左乘运算，则对  $\forall x, y, z \in A$ ，有

$$\begin{aligned} L_*(x)L_*(y)z &= L_*(x)(y * z) = x * (y * z), \\ L_*(x \cdot y)z &= L_*(x * y + y * x)z = (x * y + y * x) * z = (x * y) * z + (y * x) * z, \end{aligned}$$

由  $(A, *)$  是 Zinbiel 代数，可知  $*$  满足(2.2)式，故  $L_*$  满足(2.3)式，根据定义 1.3 可知  $(L_*, A)$  是交换结合代数  $(A, \cdot)$  的表示。

**定义 1.4 [1]** 设  $A$  是复数域上的向量空间，且有双线性运算  $\circ: A \times A \rightarrow A$ ，若  $\circ$  满足

$$x \circ (y \circ z) - (x \circ y) \circ z = y \circ (x \circ z) - (y \circ x) \circ z, \forall x, y, z \in A, \tag{2.5}$$

则称  $(A, \circ)$  为预李代数。

**命题 2.2 [7] [8]** 设  $A$  是预李代数， $L_\circ$  为  $A$  关于  $\circ$  的左乘运算，在  $A$  上定义

$$[x, y] = x \circ y - y \circ x, \forall x, y \in A,$$

则

- (1)  $(A, [ , ])$  为李代数;
- (2)  $(L_\circ, A)$  是李代数  $(A, [ , ])$  的表示。

**定理 2.1 [9]** 若为二维 Zinbiel 代数，则存在的一组基  $e_1, e_2$ ，满足  $e_1 * e_1 = e_2$ 。

**定理 2.2 [10]** 设是复数域上的二维左对称代数，则一定同构于下面的(互不同构)左对称代数:

$$\begin{aligned} A^1: A &= \langle e_1, e_2 \mid e_i e_j = \delta_{ij} e_i, i, j = 1, 2 \rangle; \\ A^2: A &= \langle e_1, e_2 \mid e_1 e_1 = e_1, e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2, e_2 e_2 = 0 \rangle; \\ A^3: A &= \langle e_1, e_2 \mid e_1 e_1 = e_1, e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2 e_2 = 0 \rangle; \\ A^4: A &= \langle e_1, e_2 \mid e_1 e_1 = e_1 = e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2 e_2 = 0 \rangle; \\ A^5: A &= \langle e_1, e_2 \mid e_1 e_1 = e_2, e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2 e_2 = 0 \rangle; \\ A^6: A &= \langle e_1, e_2 \mid e_1 e_1 = e_1 e_2 = 0, e_2 e_1 = -e_1, e_2 e_2 = -e_2 \rangle; \\ A^7: A &\in \{ A_k \mid A_k = \langle e_1, e_2 \mid e_1 e_1 = e_1 e_2 = 0, e_2 e_1 = -e_1, e_2 e_2 = k e_2 \rangle, k \neq -1 \}, \\ &A_{-1} = \langle e_1, e_2 \mid e_1 e_1 = e_1 e_2 = 0, e_2 e_1 = -e_1, e_2 e_2 = e_1 - e_2 \rangle; \\ A^8: A &= \langle e_1, e_2 \mid e_1 e_1 = 0, e_1 e_2 = e_1, e_2 e_1 = 0, e_2 e_2 = e_2 \rangle; \\ A^9: A &\in \{ A_l \mid A_l = \langle e_1, e_2 \mid e_1 e_1 = 0, e_1 e_2 = l e_1, e_2 e_1 = (l-1) e_1, e_2 e_2 = e_1 + l e_2 \rangle, l \neq 0 \}; \\ A^{10}: A &= \langle e_1, e_2 \mid e_1 e_1 = 2 e_1, e_1 e_2 = e_2, e_2 e_1 = 0, e_2 e_2 = e_1 \rangle. \end{aligned}$$

**定义 2.5** [11] 设  $(A, \cdot, [\cdot, \cdot])$  是一个转置泊松代数,  $V$  是线性空间,  $s, \rho$  是  $A$  到  $End(V)$  的线性映射, 若有  $(s, V)$  是交换结合代数  $(A, \cdot)$  表示,  $(\rho, V)$  是李代数  $(A, [\cdot, \cdot])$  的表示, 且满足

$$2s([x, y]) = \rho(x)s(y) - \rho(y)s(x), \quad (0.1)$$

$$2s(x)\rho(y) = \rho(x \cdot y)v + \rho(y)s(x), \quad (0.2)$$

其中  $\forall x, y, z \in A$ , 则称  $(s, \rho, V)$  是转置泊松代数  $(A, \cdot, [\cdot, \cdot])$  的表示。

### 3. 转置预泊松代数与转置泊松代数的关系

**定义 3.1** 设  $A$  是向量空间,  $*, \circ$  是  $A$  上的双线性运算, 若  $(A, *)$  是 Zinbiel 代数,  $(A, \circ)$  是预李代数, 且满足

$$2(x \circ y - y \circ x) * z = x \circ (y * z) - y \circ (x * z), \quad (3.1)$$

$$2x * (y \circ z) = (x * y + y * x) \circ z + y \circ (x * z), \quad (3.2)$$

其中  $x, y, z \in A$ , 则称  $(A, *, \circ)$  为转置预泊松代数。

**定理 3.1** 设  $(A, *, \circ)$  为转置预泊松代数。在  $A$  上定义

$$x \cdot y = x * y + y * x, [x, y] = x \circ y - y \circ x, \forall x, y \in A,$$

则  $(A, \cdot, [\cdot, \cdot])$  是转置泊松代数。

**证** 由  $(A, *, \circ)$  为转置预泊松代数, 可知  $(A, *)$  是 Zinbiel 代数,  $(A, \circ)$  是预李代数, 根据命题 1.1 的(1)可知  $(A, \cdot)$  是交换结合代数, 根据命题 2.2 的(1)可知  $(A, [\cdot, \cdot])$  是李代数。

由定义 3.1 知, 对  $\forall x, y, z \in A$ ,  $*, \circ$  满足(3.1)与(3.2)式, 直接计算得

$$\begin{aligned} & 2z \cdot [x, y] - [z \cdot x, y] - [x, z \cdot y] \\ &= 2z \cdot (x \circ y - y \circ x) - [z * x + x * z, y] - [x, z * y + y * z] \\ &= 2z * (x \circ y - y \circ x) + (x \circ y - y \circ x) * 2z - (z * x + x * z) \circ y \\ &\quad + y \circ (z * x + x * z) - x \circ (z * y + y * z) + (z * y + y * z) \circ x \\ &= -(z * x + x * z) \circ y - x \circ (z * y) + 2z * (x \circ y) + (z * y + y * z) \circ x + y \circ (z * x) \\ &\quad - 2z * (y \circ x) + 2(x \circ y - y \circ x) * z - x \circ (y * z) + y \circ (x * z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

可知  $\cdot, [\cdot, \cdot]$  满足(2.1)式, 故  $(A, \cdot, [\cdot, \cdot])$  是转置泊松代数。

设  $(A, *, \circ)$  为转置预泊松代数, 用  $L_*, L_\circ$  分别表示  $A$  关于  $*, \circ$  的左乘运算, 即

$$L_*(x)y = x * y, L_\circ(x)y = x \circ y, \forall x, y \in A.$$

**定理 3.2** 设  $(A, *, \circ)$  是转置预泊松代数, 在  $A$  上定义

$$x \cdot y = x * y + y * x, [x, y] = x \circ y - y \circ x, \forall x, y \in A,$$

则  $(L_*, L_\circ, A)$  是转置泊松代数  $(A, \cdot, [\cdot, \cdot])$  的表示。

**证** 根据定理 2.1 知  $(A, \cdot, [\cdot, \cdot])$  是转置泊松代数。由  $(A, *)$  为 Zinbiel 代数, 则根据命题 2.1 的(2)可知  $(L_*, A)$  是交换结合代数  $(A, \cdot)$  的表示, 由  $(A, \circ)$  为预李代数, 根据命题 2.2 的(2)可知  $(L_\circ, A)$  是李代数  $(A, [\cdot, \cdot])$  的表示。

再由  $(A, *, \circ)$  是转置预泊松代数, 根据定理 3.1 可知在  $A$  上有(3.1)式成立, 对  $\forall x, y, z \in A$ , 则有

$$2L_*([x, y])z - L_\circ(x)L_*(y)z + L_\circ(y)L_*(x)z = 2(x \circ y - y \circ x) * z - x \circ (y * z) + y \circ (x * z) = 0.$$

即  $L_*, L_\circ$  满足等式(2.6)。

同时, 在  $A$  上有(3.2)式成立, 因此

$$2L_*(x)L_\circ(y)z - L_\circ(x * y + y * x)z - L_\circ(y)L_*(x)z = 2x * (y \circ z) - (x * y + y * x)z - y \circ x * z = 0.$$

即  $L_*, L_\circ$  满足等式(2.7)。

综上所述可知  $(L_*, L_\circ, A)$  是转置泊松代数  $(A, \cdot, [\cdot, \cdot])$  的表示。

**定义 3.2** 设  $(A_1, *_1, \circ_1)$  与  $(A_2, *_2, \circ_2)$  是转置预泊松代数,  $\varphi: A_1 \rightarrow A_2$  为线性映射, 若  $\varphi$  满足

$$\varphi(x *_1 y) = \varphi(x) *_2 \varphi(y); \varphi(x \circ_1 y) = \varphi(x) \circ_2 \varphi(y), \forall x, y \in A,$$

则称  $\varphi$  为  $(A_1, *_1, \circ_1)$  到  $(A_2, *_2, \circ_2)$  的同态映射。

特别地, 若  $\varphi$  为双射, 则称  $\varphi$  为  $(A_1, *_1, \circ_1)$  和  $(A_2, *_2, \circ_2)$  的同构映射. 显然, 若两个转置预泊松代数  $(A_1, *_1, \circ_1)$  和  $(A_2, *_2, \circ_2)$  同构, 则作为 Zinbiel 代数,  $(A_1, *_1)$  和  $(A_2, *_2)$  同构, 作为预李代数,  $(A_1, \circ_1)$  和  $(A_2, \circ_2)$  同构。

#### 4. 二维转置预泊松代数上关于预李代数的左乘运算

**定理 4.1** 设  $(A, *, \circ)$  是二维转置预泊松代数, 则存在  $A$  的一组基  $e_1, e_2$ , 使得  $e_1 * e_1 = e_2$ , 且

$$e_1 \circ e_1 = \lambda e_1 + \mu e_2, e_1 \circ e_2 = \alpha e_2, e_2 \circ e_1 = \beta e_2,$$

其中  $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , 且  $(\lambda - \beta)\beta = 0, \alpha = 2\lambda - 2\beta$ 。

**证** 设  $(A, *, \circ)$  是二维转置预泊松代数, 由定理 2.1 知, 存在  $A$  的一组基  $e_1, e_2$ , 满足  $e_1 * e_1 = e_2$ . 从而  $e_1, e_2$  关于  $*$  的左乘运算在  $e_1, e_2$  下对应的矩阵为:

$$L_*(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, L_*(e_2) = 0.$$

设  $L_\circ(e_1), L_\circ(e_2)$  在  $e_1, e_2$  下对应的矩阵为

$$L_\circ(e_1) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, L_\circ(e_2) = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, a_i, b_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, 3, 4,$$

根据转置预泊松代数的定义, 由(3.1), (3.2)式知, 对  $\forall x, y \in A$ , 关于  $\circ$  的左乘运算需满足

$$2L_*(x)L_\circ(y) = L_\circ(x * y + y * x) + L_\circ(y)L_*(x), \tag{4.1}$$

$$2L_*(x \circ y - y \circ x) = L_\circ(x)L_*(y) - L_\circ(y)L_*(x). \tag{4.2}$$

对(4.1)式考虑  $x, y$  分别取  $e_1, e_2$  的情况:

(a) 若  $x = y = e_1$ , 则有

$$2L_*(e_1)L_\circ(e_1) = L_\circ(e_1 * e_1 + e_1 * e_1) + L_\circ(e_1)L_*(e_1),$$

即

$$2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则有

$$b_1 = -\frac{1}{2}a_2, b_2 = 0, b_3 = \frac{1}{2}(2a_1 - a_4), b_4 = a_2.$$

(b) 若  $x = y = e_2$ , 则有

$$2L_*(e_2)L_0(e_2) = L_0(e_2 * e_2 + e_2 * e_2) + L_0(e_2)L_*(e_2),$$

即

$$0 = 2 \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \cdot 0 = 0,$$

故对任意  $b_1, b_2, b_3, b_4$ , 等式恒成立。

(c) 若  $x = e_1, y = e_2$ , 则有

$$2L_*(e_1)L_0(e_2) = L_0(e_1 * e_2 + e_2 * e_1) + L_0(e_2)L_*(e_1),$$

即

$$2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = 0 + \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

计算得  $b_1 = b_4 = a_2 = 0$ 。

(d)  $x = e_2, y = e_1$ , 则有

$$2L_*(e_2)L_0(e_1) = L_0(e_2 * e_1 + e_1 * e_2) + L_0(e_1)L_*(e_2),$$

即  $2 \cdot 0 = 0 + 0$ , 故等式左右两端都为 0, 等式恒成立。

对(4.2)式考虑  $x, y$  分别取  $e_1, e_2$  的情况:

(a) 若  $x = y = e_1$  或  $x = y = e_2$ , 则

$$2L_*(e_i \circ e_i - e_i \circ e_i) = L_0(e_i)L_*(e_i) - L_0(e_i)L_*(e_i), i = 1, 2,$$

显然等式左右两端都为 0, 等式恒成立。

(b) 若  $x = e_1, y = e_2$ , 则

$$2L_*(e_1 \circ e_2 - e_2 \circ e_1) = L_0(e_1)L_*(e_2) - L_0(e_2)L_*(e_1).$$

即

$$0 = 2 \cdot 0 = 0 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

此时, 等式恒成立。

(c) 若  $x = e_2, y = e_1$ , 则

$$2L_*(e_2 \circ e_1 - e_1 \circ e_2) = L_0(e_2)L_*(e_1) - L_0(e_1)L_*(e_2),$$

即

$$0 = 2 \cdot 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 0 = 0,$$

此时, 等式恒成立。

此外, 根据预李代数的定义, 由(1.3)式知, 对  $\forall x, y \in A$ ,  $A$  关于  $\circ$  的运算需要满足条件:

$$L_0(x \circ y - y \circ x) = L_0(x)L_0(y) - L_0(y)L_0(x). \quad (4.3)$$

对(4.3)式考虑  $x, y$  分别取  $e_1, e_2$  的情况:

(a) 若  $x = y = e_1$  或  $x = y = e_2$ , 则有

$$L_\circ(e_i \circ e_i - e_i \circ e_i) = L_\circ(e_i)L_\circ(e_i) - L_\circ(e_i)L_\circ(e_i), i = 1, 2,$$

显然等式左右两端都为 0, 等式恒成立。

(b) 若  $x = e_1, y = e_2$ , 则

$$L_\circ(e_1 \circ e_2 - e_2 \circ e_1) = L_\circ(e_1)L_\circ(e_2) - L_\circ(e_2)L_\circ(e_1),$$

即

$$(a_4 - b_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix},$$

计算得  $(a_1 - b_3)b_3 = 0$ 。

(c) 若  $x = e_2, y = e_1$ , 则

$$L_\circ(e_2 \circ e_1 - e_1 \circ e_2) = L_\circ(e_2)L_\circ(e_1) - L_\circ(e_1)L_\circ(e_2),$$

即

$$(b_3 - a_4) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_3 & 0 \end{pmatrix},$$

计算得  $(a_1 - b_3)b_3 = 0$ 。

综上所述, 得

$$e_1 \circ e_1 = a_1 e_1 + a_3 e_2, e_1 \circ e_2 = a_4 e_2, e_2 \circ e_1 = b_3 e_2,$$

取  $\lambda = a_1, \mu = a_3, \alpha = a_4, \beta = b_3$ , 则有

$$e_1 \circ e_1 = \lambda e_1 + \mu e_2, e_1 \circ e_2 = \alpha e_2, e_2 \circ e_1 = \beta e_2, e_2 \circ e_2 = 0,$$

其中  $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , 且  $(\lambda - \beta)\beta = 0, \alpha = 2\lambda - 2\beta$ 。

## 5. 二维转置预泊松代数的类型

**定理 5.1** 设  $(A, *, \circ)$  是二维转置预泊松代数, 则存在  $A$  的基  $e_1, e_2$ , 使  $e_1 * e_1 = e_2$ , 此时  $(A, *, \circ)$  中的运算  $\circ$  取以下几种类型:

- (1)  $e_1 \circ e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = e_2 \circ e_2 = 0$ ,  $(A, \circ)$  同构于  $A^4$  型的预李代数。
- (2)  $e_1 \circ e_1 = \mu e_2, e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = e_2 \circ e_2 = 0$ ,  $(A, \circ)$  同构于  $A^5$  型的预李代数。
- (3)  $e_1 \circ e_1 = \lambda e_1, e_2 \circ e_1 = \lambda e_2, e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_2 = 0$ ,  $(A, \circ)$  同构于  $A^8$  型的预李代数。
- (4)  $e_1 \circ e_1 = \lambda e_1 + \mu e_2, e_2 \circ e_1 = \lambda e_2, e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_2 = 0$ ,  $(A, \circ)$  同构于  $A^9$  型的预李代数。
- (5)  $e_1 \circ e_1 = \lambda e_1, e_1 \circ e_2 = 2\lambda e_2, e_2 \circ e_1 = e_2 \circ e_2 = 0$ ,  $(A, \circ)$  同构于  $A^7$  型的预李代数。
- (6)  $e_1 \circ e_1 = \lambda e_1 + \mu e_2, e_2 \circ e_1 = 2\lambda e_2, e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_2 = 0$ ,  $(A, \circ)$  同构于  $A^7$  型的预李代数。

证明: 设  $(A, *, \circ)$  是二维转置预泊松代数, 由定理 1.1 知, 存在  $A$  的一组基  $e_1, e_2$  使得  $e_1 * e_1 = e_2$ , 且根据定理 3.1 知,  $(A, *, \circ)$  中关于  $\circ$  的运算为:

$$e_1 \circ e_1 = \lambda e_1 + \mu e_2, e_1 \circ e_2 = \alpha e_2, e_2 \circ e_1 = \beta e_2, e_2 \circ e_2 = 0,$$

其中  $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , 且  $(\lambda - \beta)\beta = 0, \alpha = 2\lambda - 2\beta$ 。下面进行分情况讨论。

<1> 若  $\lambda = \beta$ , 由  $\alpha = 2\lambda - 2\beta$ , 可知  $\alpha = 0$ , 此时

$$e_1 \circ e_1 = \lambda e_1 + \mu e_2, e_2 \circ e_1 = \lambda e_2, e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_2 = 0,$$

下面讨论  $\lambda, \mu$  的取值:

(a) 若  $\lambda = \mu = 0$ , 则

$$e_1 \circ e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = e_2 \circ e_2 = 0,$$

此时  $(A, \circ)$  同构于  $A^4$  型的预李代数。

(b) 若  $\lambda = 0, \mu \neq 0$ , 则

$$e_1 \circ e_1 = \mu e_2, e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = e_2 \circ e_2 = 0,$$

作非退化线性替换  $e_1' = \frac{1}{\mu} e_1, e_2' = \frac{1}{\mu} e_2$ , 则

$$e_1' \circ e_1' = e_2', e_1' \circ e_2' = e_2' \circ e_1' = e_2' \circ e_2' = 0,$$

此时  $(A, \circ)$  同构于  $A^5$  型的预李代数。

(c)  $\lambda \neq 0, \mu = 0$ , 则有

$$e_1 \circ e_1 = \lambda e_1, e_2 \circ e_1 = \lambda e_2, e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_2 = 0,$$

作非退化线性替换  $e_1' = \frac{1}{\lambda} e_1, e_2' = e_2$ , 则

$$e_1' \circ e_1' = e_1', e_2' \circ e_1' = e_2', e_1' \circ e_2' = e_2' \circ e_2' = 0,$$

此时  $(A, \circ)$  同构于  $A^8$  型的预李代数。

(d)  $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$ , 则有

$$e_1 \circ e_1 = \lambda e_1 + \mu e_2, e_2 \circ e_1 = \lambda e_2, e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_2 = 0,$$

作非退化线性替换  $e_1' = \frac{1}{\lambda} e_1 + \frac{\mu}{\lambda^2} e_2, e_2' = \frac{2\mu}{\lambda^2} e_2$ , 则

$$e_1' \circ e_1' = e_1' + e_2', e_2' \circ e_1' = e_2', e_1' \circ e_2' = e_2' \circ e_2' = 0,$$

此时  $(A, \circ)$  同构于  $A^9$  型的预李代数。

<2> 若  $\lambda \neq \beta$ , 由  $(\lambda - \beta)\beta = 0$  可知  $\beta = 0$ , 再由  $\alpha = 2\lambda - 2\beta$  可知  $\alpha = 2\lambda \neq 0$ , 此时

$$e_1 \circ e_1 = \lambda e_1 + \mu e_2, e_1 \circ e_2 = 2\lambda e_2, e_2 \circ e_1 = e_2 \circ e_2 = 0,$$

下面讨论  $\lambda, \mu$  的取值:

(a) 若  $\lambda \neq 0, \mu = 0$ , 则有

$$e_1 \circ e_1 = \lambda e_1, e_1 \circ e_2 = 2\lambda e_2, e_2 \circ e_1 = e_2 \circ e_2 = 0,$$

作非退化线性替换  $e_1' = -e_2, e_2' = -\frac{1}{2\lambda} e_1$ , 则

$$e_1' \circ e_1' = 0, e_2' \circ e_1' = -e_1', e_1' \circ e_2' = 0, e_2' \circ e_2' = -\frac{1}{2} e_2',$$

此时  $(A, \circ)$  同构于  $A^7$  型的预李代数。

(b) 若  $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$ , 则有

$$e_1 \circ e_1 = \lambda e_1 + \mu e_2, e_2 \circ e_1 = 2\lambda e_2, e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_2 = 0,$$

作非退化线性替换  $e_1' = \frac{\mu}{4\lambda^2} e_2, e_2' = -\frac{1}{2\lambda} e_1 + \frac{\mu}{2\lambda^2} e_2$ , 则



$$e_1 \circ e_1 = 0, e_1 \circ e_2 = 0, e_2 \circ e_1 = -e_1', e_2 \circ e_2 = -\frac{1}{2}e_2'$$

此时  $(A, \circ)$  同构于  $A^7$  型的预李代数。

## 6. 二维转置预泊松代数在同构意义下的分类

**定理 6.1** 设  $(A, *, \circ)$  是二维转置预泊松代数,  $e_1, e_2$  为  $A$  的一组基, 则  $(A, *, \circ)$  在同构意义下有以下 6 种:

- (1)  $e_1 * e_1 = e_2, e_1 \circ e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = e_2 \circ e_2 = 0$ ;
- (2)  $e_1 * e_1 = e_2, e_1 \circ e_1 = \mu e_2, e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_1 = e_2 \circ e_2 = 0$ ;
- (3)  $e_1 * e_1 = e_2, e_1 \circ e_1 = \lambda e_1, e_2 \circ e_1 = \lambda e_2, e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_2 = 0$ ;
- (4)  $e_1 * e_1 = e_2, e_1 \circ e_1 = \lambda e_1 + \mu e_2, e_2 \circ e_1 = \lambda e_2, e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_2 = 0$ ;
- (5)  $e_1 * e_1 = e_2, e_1 \circ e_1 = \lambda e_1, e_1 \circ e_2 = 2\lambda e_2, e_2 \circ e_1 = e_2 \circ e_2 = 0$ ;
- (6)  $e_1 * e_1 = e_2, e_1 \circ e_1 = \lambda e_1 + \mu e_2, e_2 \circ e_1 = 2\lambda e_2, e_1 \circ e_2 = e_2 \circ e_2 = 0$ 。

其中,  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , 且  $\lambda, \mu \neq 0$ 。

**证** 设  $(A, *, \circ)$  是二维转置预泊松代数。由定理 5.1 知  $A$  关于  $\circ$  的运算有 6 种情况, 且定理 5.1 中(1), (2), (3), (4)和(5), (6)对应的预李代数互相不同构, 因此其对应的转置预泊松代数也互相不同构, 此时只需考虑定理 5.1 中的(5), (6)两种转置预泊松代数是否同构。

设  $(A_1, *_1, \circ_1)$  为定理 5.1 中第(5)种转置预泊松代数, 取  $e_1, e_2$  为满足定理 5.1 中第(5)种转置预泊松代数  $A_1$  的一组基;  $(A_2, *_2, \circ_2)$  为定理 5.1 中第(6)种转置预泊松代数, 取  $e_1', e_2'$  为满足定理 5.1 中第(6)种转置预泊松代数  $A_2$  的一组基。

用反证法, 若(5), (6)两种转置预泊松代数同构,  $f$  为其同构映射, 则  $f$  为  $A_1$  到  $A_2$  的可逆线性变换, 满足

$$f(e_i *_1 e_j) = f(e_i') *_2 f(e_j'), f(e_i \circ_1 e_j) = f(e_i') \circ_2 f(e_j'), i, j = 1, 2.$$

设线性变换  $f$  在基  $e_1, e_2$  下的矩阵为  $F = (f_{ij})_{2 \times 2}$ , 其中  $f_{ij} \in \mathbb{C}$ , 即

$$f(e_1, e_2) = (e_1', e_2') \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}.$$

一方面,  $f$  是 Zinbiel 代数  $(A_1, *_1)$  到  $(A_2, *_2)$  上的同构映射, 因此  $f$  需满足:

$$\begin{aligned} f(e_1 *_1 e_1) &= f(e_1') *_2 f(e_1') = (f_{11}e_1' + f_{21}e_2') *_2 (f_{11}e_1' + f_{21}e_2') = f(e_2), \\ f(e_1 *_1 e_2) &= f(e_1') *_2 f(e_2') = (f_{11}e_1' + f_{21}e_2') *_2 (f_{12}e_1' + f_{22}e_2') = 0, \\ f(e_2 *_1 e_1) &= f(e_2') *_2 f(e_1') = (f_{12}e_1' + f_{22}e_2') *_2 (f_{11}e_1' + f_{21}e_2') = 0, \\ f(e_2 *_1 e_2) &= f(e_2') *_2 f(e_2') = (f_{12}e_1' + f_{22}e_2') *_2 (f_{12}e_1' + f_{22}e_2') = 0. \end{aligned}$$

计算可得  $f_{12} = 0, f_{22} = f_{11}^2$ 。此时

$$f(e_1, e_2) = (e_1', e_2') \begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ f_{21} & f_{11}^2 \end{pmatrix}.$$

另一方面,  $f$  为预李代数  $(A_1, \circ_1)$  到  $(A_2, \circ_2)$  的同构需要满足以下 4 个方程:

$$f(e_1 \circ_1 e_1) = \lambda f(e_1) = f(e_1') \circ_2 f(e_1') = (f_{11}e_1' + f_{21}e_2') \circ_2 (f_{11}e_1' + f_{21}e_2'),$$

$$f(e_1 \circ_1 e_2) = 2\lambda f(e_2) = f(e_1') \circ_2 f(e_2') = (f_{11}e_1' + f_{21}e_2') \circ_2 (f_{11}^2 e_2'),$$

$$f(e_2 \circ_1 e_1) = f(e_2') \circ_2 f(e_1') = (f_{11}^2 e_2') \circ_2 (f_{11}e_1' + f_{21}e_2') = 0,$$

$$f(e_2 \circ_1 e_2) = f(e_2') \circ_2 f(e_2') = (f_{11}^2 e_2') \circ_2 (f_{11}^2 e_2') = 0.$$

直接计算可知  $f_{11} = 0$ 。此时  $\begin{vmatrix} f_{11} & 0 \\ f_{21} & f_{11}^2 \end{vmatrix} = 0$ ，故  $F$  不可逆，可知  $f$  不是同构映射，即  $(A_1, *, \circ_1)$ ， $(A_2, *, \circ_2)$  不同构。

## 7. 总结与展望

本文通过将 Zinbiel 代数与预李代数结合在一起，满足特定相容条件后，引入了转置预泊松代数概念，讨论转置泊松代数与转置预泊松代数的关系，再根据二维 Zinbiel 代数，预李代数的分类结果，通过具体计算讨论二维转置预泊松代数在同构意义下的分类。

代数分类问题对数学，物理以及其他领域都有重要作用。在本文研究基础上，可继续进行三维转置预泊松代数的分类研究。

## 参考文献

- [1] Gerstenhaber, M. (1963) The Cohomology Structure of an Associative Ring. *Annals of Mathematics*, **78**, 267-288. <https://doi.org/10.2307/1970343>
- [2] Loday, J.-L. (1995) Cup Product for Leibniz Cohomology and Dual Leibniz Algebras. *Mathematica Scandinavica*, **77**, 189-196. <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-12560>
- [3] Aguiar, M. (2000) Pre-Poisson Algebras. *Letters in Mathematical Physics*, **54**, 263-277. <https://doi.org/10.1023/A:1010818119040>
- [4] Bai, C., Bai, R., Guo, L. and Wu, Y. (2023) Transposed Poisson Algebras, Novikov-Poisson Algebras, and 3-Lie Algebras. *Journal of Algebra*, **632**, 535-566. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2023.06.006>
- [5] Beites, D.P., Ouaridi, F.A. and Kaygorodov, I. (2023) The Algebraic and Geometric Classification of Transposed Poisson Algebras. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, **117**, Article Number 55. <https://doi.org/10.1007/s13398-022-01385-4>
- [6] Liu, G. and Bai, C. (2023) New Splittings of Operations of Poisson Algebras and Transposed Poisson Algebras and Related Algebraic Structures. arXiv:2310.08299v1
- [7] Aguiar, M. (2000) Pre-Poisson Algebras. *Letters in Mathematical Physics*, **54**, 263-277. <https://doi.org/10.1023/A:1010818119040>
- [8] Bai, C. (2008) Left-Symmetric Bialgebras and an Analogue of the Classical Yang-Baxter Equation. *Communications in Contemporary Mathematics*, **10**, 221-260. <https://doi.org/10.1142/S0219199708002752>
- [9] Dzhumadil'Daev, A.S. and Tulenbaev, K.M. (2005) Nilpotency of Zinbiel Algebras. *Journal of Dynamical and Control Systems*, **11**, 195-213. <https://doi.org/10.1007/s10883-005-4170-1>
- [10] 白承铭, 孟道骥. 二维左对称代数的分类[J]. 科学通报, 1996(23): 2207.
- [11] Liu, G. and Bai, C. (2023) A Bialgebra Theory for Transposed Poisson Algebras via Anti-pre-Lie Bialgebras and Anti-pre-Lie-Poisson Bialgebras. arXiv:2309.16174v1