Statistical and Application 统计学与应用, 2015, 4(4), 289-295
Published Online December 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/sa
http://dx.doi.org/10.12677/sa.2015.44032

A New Lifetime Distribution of System

—Mixture Exponential Poisson Distribution

Dongli Cui, Weiyan Mu

School of Science, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing
Email: 18810972586m0@sina.cn, muweiyan@bucea.edu.cn

Received: Dec. 9th, 2015; accepted: Dec. 27th, 2015; published: Dec. 30th, 2015

Abstract

Lifetime distribution is a class of important matters in statistics, the parameter model of the lifetime distribution has the advantages of the mature theory, the simple calculation and the strong operation in practice. Therefore, we define a new lifetime distribution of system—the mixture exponential Poisson distribution based on the condition of the lifetime of the components and the number of the components subject to double parameters mixture exponential distribution and Poisson distribution, respectively. As a statistical model, we studied the various properties of the distribution, and discussed the maximum likelihood estimation of parameters under the condition of censored data of fixed number and time in this paper.

Keywords

Mixture Exponential Poisson Distribution, Maximum Likelihood Estimation, Lifetime Distribution

一种新的系统寿命分布

—混合指数泊松分布

崔栋利，牟唯嫣

北京建筑大学理学院，北京
Email: 18810972586m0@sina.cn, muweiyan@bucea.edu.cn

收稿日期：2015年12月9日；录用日期：2015年12月27日；发布日期：2015年12月30日

文章引用: 崔栋利, 牟唯嫣. 一种新的系统寿命分布[J]. 统计学与应用, 2015, 4(4): 289-295.
http://dx.doi.org/10.12677/sa.2015.44032

摘　要

寿命分布问题是统计学中一类重要问题，寿命分布的参数模型具有理论成熟、计算简单、在实践中操作性强等优点。因此，我们定义了在元件寿命服从双参数混合指数分布、元件个数服从泊松分布的情况下的一种新的系统寿命分布——混合指数泊松分布，作为统计模型，研究了该分布的各种性质，且给出了在定数和定时截尾数据下参数的极大似然估计。

关键词

混合指数泊松分布，极大似然估计，寿命分布

1. 引言

近年来，许多由经典的离散分布和寿命分布混合而成的新型寿命分布受到统计界以及其他领域的广泛关注，1998 年 Adimidis 和 Loukas 将几何分布和指数分布结合，提出了指数几何分布(即 Exponential-Geometric 分布，简写为 EG 分布) [1]，随后在 2007 年 Coskun 提出了指数泊松分布(即 Exponential-Poisson 分布，简写为 EP 分布) [2]，2009 年 Barreto 和 Criba 提出了广义指数泊松分布(即广义 Exponential-Poisson 分布，简写为 GEP 分布) [3]。2013 年 Nadaraja 将几何分布、泊松分布和指数分布结合，获得了几何指数泊松分布(即 Geometric Exponential Poisson 分布，简写为 GEP 分布) [4]，2015 年，陈庆华提出了混合指数几何分布(即 Mixture Exponential-Poisson 分布，简写为 MEP 分布)，并研究了该分布的各种性质，讨论了参数的极大似然估计[5]。

在上述研究成果的基础上，我们将指数分布延伸到双参数混合混合指数分布，并与泊松分布结合，定义了新的寿命分布——混合指数泊松分布，并研究了该分布的各种性质，给出了三种情况下参数的极大似然估计。

混合指数泊松分布可描述为如下模型：考虑一个由 $N(\geq 1)$ 个原件组成的串联系统，其中各个原件独立工作，N 是服从泊松分布的随机变量，元件的寿命服从双参数混合指数分布，则系统寿命服从混合指数几何分布。

2. 混合指数泊松分布的定义

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是服从双参数混合指数分布且相互独立的随机变量，X_i 的密度函数为

$$g(x_i) = p_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 x_i} + p_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 x_i},\ x_i \geq 0,$$

其中，$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 = 1, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$。所以 X_i 的分布函数为

$$F(x_i) = P(X_i \leq x_i) = 1 - p_1 e^{-\lambda_1 x_i} - p_2 e^{-\lambda_2 x_i},\ x \geq 0。$$

假设 N 服从泊松分布，其概率分布列为

$$P(N = n) = \frac{\lambda_3^n}{n!} e^{-\lambda_3}\left(1 - e^{-\lambda_3}\right)^{-1},$$

其中，$\lambda_3 > 0$，且 N 和 X_i 相互独立。令 $X = \min(X_1, X_2, \cdots, X_N)$，则 X 关于 N 的条件分布函数为

$$\begin{aligned}F(x\mid n)&=P(X\le x\mid n)\\&=1-P(X\ge x\mid n)\\&=1-P(X_1\ge x)P(X_2\ge x)\cdots P(X_n\ge x)\\&=1-\left(p_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}+p_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 x}\right)^n,\end{aligned}$$

令 $Z=p_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}+p_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 x}$，所以 X 的边缘分布函数为

$$\begin{aligned}F(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(p_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}+p_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 x}\right)^n\right]\frac{\lambda_3^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda_3}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_3}\right)^{-1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-Z^n\right]\frac{\lambda_3^{\ n}}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda_3}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_3}\right)^{-1}\\&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_3^{\ n}}{n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda_3 Z)^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-\lambda_3}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_3}\right)^{-1}\\&=\left(\mathrm{e}^{\lambda_3}-\mathrm{e}^{\lambda_3 z}\right)\mathrm{e}^{-\lambda_3}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_3}\right)^{-1}.\end{aligned}\tag{1}$$

X 的边缘密度函数为

$$f(x)=\left(\lambda_1\lambda_3 p_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}+\lambda_2\lambda_3 p_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 x}\right)\exp\left(\lambda_3 p_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}+\lambda_3 p_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 x}\right)\mathrm{e}^{-\lambda_3}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_3}\right)^{-1}\tag{2}$$

这样，由混合指数分布和泊松分布结合，得到了一个新的复合分布。

若非负随机变量 X 的分布函数形如(1)式，(或者说密度函数形如(2)式)，则 X 服从混合指数泊松分布，记为 $X\sim MEP(\lambda_1,p_1,\lambda_2,p_2,\lambda_3)$，$\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_3>0,p_1\ge 0,p_2\ge 0,p_1+p_2=1$。

3. 混合指数泊松分布的性质

3.1. 密度函数的单调性

对于任意的参数值，$f(x)$ 是关于 x 的减函数，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最大值为 $(\lambda_1\lambda_3 p_1+\lambda_2\lambda_3 p_2)\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_3}\right)^{-1}$，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 趋近与 0，符合寿命分布，可以当 p_1 或 p_2 等于 0 时，混合指数泊松分布退化为指数泊松分布(EP 分布)[2]。

3.2. 分位数

设随机变量 $X\sim MEP(\lambda_1,p_1,\lambda_2,p_2,\lambda_3)$，当 $F(x)=\alpha$ 时，则有

$$Z=\frac{1}{\lambda_3}\ln\left[\mathrm{e}^{\lambda_3}-\alpha\left(\mathrm{e}^{\lambda_3}-1\right)\right],$$

特别地，当 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ 时，此分布的 α 分位数为 $\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\lambda_3}{\ln\left[\mathrm{e}^{\lambda_3}-\alpha\left(\mathrm{e}^{\lambda_3}-1\right)\right]}$，中位数为 $\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\lambda_3}{\ln\left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\lambda_3}+1\right)\right]}$。

证明：$F(x)=\left(\mathrm{e}^{\lambda_3}-\mathrm{e}^{\lambda_3 z}\right)\mathrm{e}^{-\lambda_3}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_3}\right)^{-1}=\alpha$，可计算得出 $Z=\frac{1}{\lambda_3}\ln\left[\mathrm{e}^{\lambda_3}-\alpha\left(\mathrm{e}^{\lambda_3}-1\right)\right]$，当 $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ 时，$Z=\mathrm{e}^{-\lambda x}$，$\mathrm{e}^{-\lambda x}=\frac{1}{\lambda_3}\ln\left[\mathrm{e}^{\lambda_3}-\alpha\left(\mathrm{e}^{\lambda_3}-1\right)\right]$，有 $x=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\lambda_3}{\ln\left[\mathrm{e}^{\lambda_3}-\alpha\left(\mathrm{e}^{\lambda_3}-1\right)\right]}$，即此分布的 α 分位数为 $\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\lambda_3}{\ln\left[\mathrm{e}^{\lambda_3}-\alpha\left(\mathrm{e}^{\lambda_3}-1\right)\right]}$，中位数为 $\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\lambda_3}{\ln\left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\lambda_3}+1\right)\right]}$。

3.3. 期望与方差

设随机变量 $X\sim MEP(\lambda_1,p_1,\lambda_2,p_2,\lambda_3)$，则 X 的期望和方差分别为

$$E(X)=e^{-\lambda_3}\left(1-e^{-\lambda_3}\right)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_3^k}{k!}\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{k!\,p_1^{k-i}p_2^i}{i!(k-i)!\left[\lambda_1(k-i)+\lambda_2 i\right]}\right)\right],$$

$$\begin{aligned}Var(X)=&e^{-\lambda_3}\left(1-e^{-\lambda_3}\right)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_3^k}{k!}\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{2k!\,p_1^{k-i}p_2^i}{i!(k-i)!\left[\lambda_1(k-i)+\lambda_2 i\right]^2}\right)\right]\\&-\left\{e^{-\lambda_3}\left(1-e^{-\lambda_3}\right)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_3^k}{k!}\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{k!\,p_1^{k-i}p_2^i}{i!(k-i)!\left[\lambda_1(k-i)+\lambda_2 i\right]}\right)\right]\right\}^2,\end{aligned}$$

证明：由 X 的分布函数为 $F(x)=\left(e^{\lambda_3}-e^{\lambda_3 z}\right)e^{-\lambda_3}\left(1-e^{-\lambda_3}\right)^{-1}$，可以得到

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_0^{\infty}x\mathrm{d}F(x)=\int_0^{\infty}x\mathrm{d}\left(e^{\lambda_3}-e^{\lambda_3 z}\right)e^{-\lambda_3}\left(1-e^{-\lambda_3}\right)^{-1}\\&=-e^{-\lambda_3}\left(1-e^{-\lambda_3}\right)^{-1}\int_0^{\infty}x\mathrm{d}\left(e^{\lambda_3 z}\right)\end{aligned}。$$

令 $W=\int_0^{\infty}x\mathrm{d}\left(e^{\lambda_3 z}\right)$，$M=\int_0^{\infty}x\mathrm{d}Z^k$，则 $E(X)=-e^{-\lambda_3}\left(1-e^{-\lambda_3}\right)^{-1}W$，根据泰勒公式，可以得到 $e^{\lambda_3 z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda_3 Z)^k}{k!}$，则 $W=\int_0^{\infty}x\mathrm{d}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda_3 Z)^k}{k!}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_3^k}{k!}\int_0^{\infty}x\mathrm{d}Z^k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_3^k}{k!}M$，所以最终把 $E(X)$ 转化为求 M。而 Z^k 可以写成如下形式

$$\begin{aligned}Z^k&=\left(p_1e^{-\lambda_1 x}+p_2e^{-\lambda_2 x}\right)^k\\&=\sum_{i=0}^{k}\left[\frac{k!}{i!(k-i)!}\left(p_1e^{-\lambda_1 x}\right)^{k-i}\left(p_2e^{-\lambda_2 x}\right)^i\right]\\&=\sum_{i=0}^{k}\left[\frac{k!}{i!(k-i)!}p_1^{k-i}p_2^ie^{-\left[\lambda_1(k-i)+\lambda_2 i\right]x}\right],\end{aligned}$$

所以根据上式，给出 M 的如下形式

$$\begin{aligned}M&=\int_0^{\infty}x\mathrm{d}\sum_{i=0}^{k}\left[\frac{k!}{i!(k-i)!}p_1^{k-i}p_2^ie^{-\left[\lambda_1(k-i)+\lambda_2 i\right]x}\right]\\&=\sum_{i=0}^{k}\left[\frac{k!}{i!(k-i)!}p_1^{k-i}p_2^i\int_0^{\infty}x\mathrm{d}e^{-\left[\lambda_1(k-i)+\lambda_2 i\right]x}\right],\end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty}x\mathrm{d}e^{-\left[\lambda_1(k-i)+\lambda_2 i\right]x}=-\int_0^{\infty}e^{-\left[\lambda_1(k-i)+\lambda_2 i\right]x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\lambda_1(k-i)+\lambda_2 i},$$

所以 X 的期望为

$$E(X)=e^{-\lambda_3}\left(1-e^{-\lambda_3}\right)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_3^k}{k!}\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{k!\,p_1^{k-i}p_2^i}{i!(k-i)!\left[\lambda_1(k-i)+\lambda_2 i\right]}\right)\right]。$$

又因为

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^2 \mathrm{d}e^{-[\lambda_1(k-i)+\lambda_2 i]x} &= -2\int_0^{\infty} x e^{-[\lambda_1(k-i)+\lambda_2 i]x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\lambda_1(k-i)+\lambda_2 i}\int_0^{\infty} x\mathrm{d}e^{-[\lambda_1(k-i)+\lambda_2 i]x} \\ &= -\frac{2}{[\lambda_1(k-i)+\lambda_2 i]^2},\end{aligned}$$

$$E(X^2) = e^{-\lambda_3}\left(1-e^{-\lambda_3}\right)^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_3^k}{k!}\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{2k!\,p_1^{k-i}p_2^i}{i!(k-i)![\lambda_1(k-i)+\lambda_2 i]^2}\right)\right],$$

利用 $Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$，即可得出混合指数泊松分布的方差。

3.4. 生存函数与风险函数

设随机变量 $X \sim MEP(\lambda_1, p_1, \lambda_2, p_2, \lambda_3)$， $F(x)$ 为其分布函数， $f(x)$ 为其密度函数，则

1) 生存函数（或可靠度函数）为[6]

$$S(x)=1-F(x)=\left(e^{\lambda_3 z}-1\right)\left(e^{\lambda_3}-1\right)^{-1},$$

2) 风险函数为[7]

$$H(x)=\frac{f(x)}{S(x)}=\frac{\left(\lambda_1\lambda_3 p_1 e^{-\lambda_1 x}+\lambda_2\lambda_3 p_2 e^{-\lambda_2 x}\right)e^{\lambda_3 z}}{e^{\lambda_3 z}-1}$$

4. 混合指数泊松分布下的参数估计

设总体的概率函数为

$$p(x;\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,p_1,p_2)=\left(\lambda_1\lambda_3 p_1 e^{-\lambda_1 x}+\lambda_2\lambda_3 p_2 e^{-\lambda_2 x}\right)e^{\lambda_3 z}e^{-\lambda_3}\left(1-e^{-\lambda_3}\right)^{-1},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,p_1,p_2$ 是未知参数， $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自该总体的样本，样本的联合概率函数用 $L(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,p_1,p_2)$ 表示，即样本的似然函数为

$$\begin{aligned}&L(x;\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,p_1,p_2)\\ &=\prod_{i=1}^{n}\left[\left(\lambda_1\lambda_3 p_1 e^{-\lambda_1 x}+\lambda_2\lambda_3 p_2 e^{-\lambda_2 x}\right)e^{\lambda_3 z}e^{-\lambda_3}\left(1-e^{-\lambda_3}\right)^{-1}\right]\\ &=\left(e^{\lambda_3}-1\right)^{-n}e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda_3\left(p_1 e^{-\lambda_1 x_i}+p_2 e^{-\lambda_2 x_i}\right)}\prod_{i=1}^{n}\left(\lambda_1\lambda_3 p_1 e^{-\lambda_1 x_i}+\lambda_2\lambda_3 p_2 e^{-\lambda_2 x_i}\right),\end{aligned}$$

所以对数似然函数为

$$\begin{aligned}&\ln L(x;\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,p_1,p_2)\\ &=\sum_{i=1}^{n}\lambda_3\left(p_1 e^{-\lambda_1 x_i}+p_2 e^{-\lambda_2 x_i}\right)-n\ln\left(e^{\lambda_3}-1\right)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\lambda_1\lambda_3 p_1 e^{-\lambda_1 x_i}+\lambda_2\lambda_3 p_2 e^{-\lambda_2 x_i}\right)\end{aligned}$$

对 $\ln L$ 分别求关于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,p_1,p_2$ 的偏导数，并令其为 0，得到似然方程组为如下

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \lambda_1} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(-x_i\lambda_3 p_1 e^{-\lambda_1 x_i}\right) + \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_3 p_1\left(1-\lambda_1 x_i\right)e^{-\lambda_1 x_i}}{\lambda_1\lambda_3 p_1 e^{-\lambda_1 x_i}+\lambda_2\lambda_3 p_2 e^{-\lambda_2 x_i}} = 0, \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \lambda_2} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(-x_i\lambda_3 p_2 e^{-\lambda_2 x_i}\right) + \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_3 p_2\left(1-\lambda_2 x_i\right)e^{-\lambda_2 x_i}}{\lambda_1\lambda_3 p_1 e^{-\lambda_1 x_i}+\lambda_2\lambda_3 p_2 e^{-\lambda_2 x_i}} = 0, \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \lambda_3} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(p_1 e^{-\lambda_1 x_i}+p_2 e^{-\lambda_2 x_i}\right) + \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_1 p_1 e^{-\lambda_1 x_i}+\lambda_2 p_2 e^{-\lambda_2 x_i}}{\lambda_1\lambda_3 p_1 e^{-\lambda_1 x_i}+\lambda_2\lambda_3 p_2 e^{-\lambda_2 x_i}} - \dfrac{ne^{\lambda_3}}{e^{\lambda_3}-1} = 0, \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial p_1} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\lambda_3 e^{-\lambda_1 x_i}\right) + \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_1\lambda_3 e^{-\lambda_1 x_i}}{\lambda_1\lambda_3 p_1 e^{-\lambda_1 x_i}+\lambda_2\lambda_3 p_2 e^{-\lambda_2 x_i}} = 0, \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial p_2} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\lambda_3 e^{-\lambda_2 x_i}\right) + \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\lambda_2\lambda_3 e^{-\lambda_2 x_i}}{\lambda_1\lambda_3 p_1 e^{-\lambda_1 x_i}+\lambda_2\lambda_3 p_2 e^{-\lambda_2 x_i}} = 0 \end{cases}$$

在已知观测数据后，解上述方程组，即可得出参数的极大似然估计 $\widehat{\lambda_1},\widehat{\lambda_2},\widehat{\lambda_3},\widehat{p_1},\widehat{p_2}$ 。

4.1. 定数截尾数据下对参数的估计

设样本容量为 n，截尾个数为 $k\left(k\le n\right)$，记 k 个观察到的寿命的次序统计量为：$X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(k)}$，令他们的观察值依次为 $y_1\le y_2\le\cdots\le y_k$，则此时的似然函数为

$$L\left(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,p_1,p_2\right)=g\left(y_1,y_2,\cdots,y_k\right),$$

前 k 个次序统计量 $X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(k)}$ 的联合密度函数为

$$g\left(y_1,y_2,\cdots,y_k\right)=\frac{n!}{(n-r)!}\left[1-F\left(y_k\right)\right]^{n-k}\times p\left(y_1\right)\times\cdots\times p\left(y_k\right),$$

特别的，当 $k=n$ 时， $X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$ 的联合密度函数为

$$g\left(y_1,y_2,\cdots,y_n\right)=n!\,p\left(y_1\right)\cdots p\left(y_n\right),$$

令 $Z=p_1e^{-\lambda_1 y_k}+p_2e^{-\lambda_2 y_k}$ ，所以似然函数为

$$\begin{aligned} L\left(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,p_1,p_2\right) &= \frac{n!}{(n-r)!}\left[1-F\left(y_k\right)\right]^{n-k}\times p\left(y_1\right)\times\cdots\times p\left(y_k\right) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}\left[\left(e^{\lambda_3 z}-1\right)\left(e^{\lambda_3}-1\right)^{-1}\right]^{n-k} \\ &\quad\times\prod_{i=1}^{k}\left[\left(\lambda_1\lambda_3 p_1 e^{-\lambda_1 y_i}+\lambda_2\lambda_3 p_2 e^{-\lambda_2 y_i}\right)e^{\lambda_3 z}\left(e^{\lambda_3}-1\right)^{-1}\right]. \end{aligned}$$

再次按照极大似然估计的步骤即可求出定数截尾数据下参数的极大似然估计[8]。

4.2. 定时截尾数据下对参数的估计

设样本容量为 n，指定的时间长度设为 c_i，寿命数据设为 t_i，第 i 次观测从 0 时刻起，当观测的寿命 $t_i<c_i$ 时，寿命记为 t_i，如果到 c_i 时刻还未观测到寿命数据，则记 $t_i=c_i$， $i=1,2,\cdots,n$ 。对 n 个观测数据 $t_1,t_2,\cdots,t_n$，其中有些是寿命数据，有些是截尾数据，记寿命数据的集合为 D，截尾数据集合为 C [9]。所以 $t\in D$ 时对应的概率函数为:

$$f\left(t\right)=\lambda_3\left(\lambda_1 p_1 e^{-\lambda_1 t}+\lambda_2 p_2 e^{-\lambda_2 t}\right)e^{\lambda_3\left(p_1e^{-\lambda_1 t}+p_2e^{-\lambda_2 t}\right)}\left(e^{\lambda_3}-1\right)^{-1},$$

$t\in C$ 时对应的概率函数为:

$$f(t)=\left(e^{\lambda_3\left(p_1e^{-\lambda_1t}+p_2e^{-\lambda_2t}\right)}-1\right)\left(e^{\lambda_3}-1\right)^{-1},$$

因此 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 的似然函数为：

$$L(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,p_1,p_2)=\prod_{i\in D}\left[\lambda_3\left(\lambda_1p_1e^{-\lambda_1t}+\lambda_2p_2e^{-\lambda_2t}\right)e^{\lambda_3\left(p_1e^{-\lambda_1t}+p_2e^{-\lambda_2t}\right)}\left(e^{\lambda_3}-1\right)^{-1}\right]$$
$$\times\prod_{i\in C}\left[\left(e^{\lambda_3\left(p_1e^{-\lambda_1t}+p_2e^{-\lambda_2t}\right)}-1\right)\left(e^{\lambda_3}-1\right)^{-1}\right]$$

再次按照极大似然估计的步骤即可求出定时截尾数据下参数的极大似然估计[10]。

参考文献 (References)

[1] Adamidis, K. and Loukas, S. (1998) A Lifetime Distribution with Distribution with Decreasing Failure Rate. *Statistics and Probability Letters*, **39**, 35-42. http://dx.doi.org/10.1016/S0167-7152(98)00012-1

[2] Kus, C. (2007) A New Lifetime Distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**, 4497-4509. http://dx.doi.org/10.1016/j.csda.2006.07.017

[3] Barreto-Souza, W. and Cribari-Neto, F. (2009) A Generalization of the Exponential-Poisson Distribution. *Statistics and Probability Letters*, **79**, 2493-2500. http://dx.doi.org/10.1016/j.spl.2009.09.003

[4] Nadarajah, S., Cancho, V. and Ortega, V. (2013) The Geometric Exponential Poisson Distribution. *Stat Methods*, **22**, 355-380. http://dx.doi.org/10.1007/s10260-013-0230-y

[5] 叶立淼，陈庆华. 混合指数几何分布[J]. 统计研究, 2015, 32(7): 106-108.

[6] 王林书. 几种新寿命分布类[J]. 应用数学学报, 2004, 27(3): 397-399.

[7] 杨元启. 寿命分布的参数估计[J]. 科技风, 2013(21): 31-32.

[8] 程侃. 寿命分布类与可靠性数学引论[M]. 北京：科学出版社, 1999: 1-3.

[9] 茆诗松，王玲玲. 可靠性统计[M]. 上海：华东师大出版社, 1984: 1-2.

[10] 茆诗松，王静龙，濮晓龙. 高等数理统计[M]. 北京：高等教育出版社, 2006: 1-3.