Statistical and Application 统计学与应用, 2015, 4(4), 319-334
Published Online December 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/sa
http://dx.doi.org/10.12677/sa.2015.44036

Hans汉斯

Discussion on *t*-Distribution and Its Application

Xiaozheng Shen, Rengkang Wu

School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan
Email: 1528435114@qq.com

Received: Dec. 9th, 2015; accepted: Dec. 27th, 2015; published: Dec. 30th, 2015

Abstract

The *t*-distribution is an important distribution in statistics, it has very important application in the interval estimation and hypothesis test, including *t*-test in the interval estimation of single samples, two samples of independent interval estimation, one sample of the mean test, two sample mean difference. The paper introduces the nature of *t*-distribution and its application in real life, such as product life, fishery, agriculture, and also achieves a single sample and two sample *t*-test in the test of hypothesis with the help of the statistical software SPSS.

Keywords

***t*-Distribution, Interval Estimation, *t*-Text, SPSS Software**

*t*分布及其应用的探讨

申小征，吴仍康

云南财经大学统计与数学学院，云南 昆明
Email: 1528435114@qq.com

收稿日期：2015年12月9日；录用日期：2015年12月27日；发布日期：2015年12月30日

摘　要

*t*分布是统计学中的一类重要分布，它在区间估计和假设检验中有很重要的应用，具体包括单样本的区间

文章引用: 申小征, 吴仍康. *t* 分布及其应用的探讨[J]. 统计学与应用, 2015, 4(4): 319-334.
http://dx.doi.org/10.12677/sa.2015.44036

估计、独立两样本的区间估计、单样本的均值检验、两样本均值差的*t*检验。文中详细介绍了*t*分布定义性质及其在产品寿命、渔业、农业等实际生活中的应用，并借助统计软件SPSS实现单样本*t*检验和两样本*t*检验。

关键词

***t*分布，区间估计，*t*检验，SPSS软件**

1. 引言

t 分布是统计学中的一类重要分布，英国统计学家哥塞特（Gosset）发现了它与标准正态分布的微小差别，在置信区间估计和显著性检验问题的计算中起到了重要作用。从各种有关统计资料中可以发现很多有关 t 分布的应用，例如在渔业中、农业、工业等中的应用，为此可用 t 分布进行区间估计和假设检验来解决一些实际生活问题。

t 检验是假设检验方法最常用方法之一，常用于正态总体均值的假设检验。单边检验和双边检验的拒绝域在许多统计学和概率论的教材中都给出了明确的定义。当样本数据比较多的时候，t 检验方法虽然简单，但其计算量仍然比较大，因此我们可以使用 SPSS 软件来实现 t 检验。本文用 SPSS13.0 分别讨论了单样本与独立两样本两种情形的 t 检验。

2. t 分布

2.1. t 分布的定义[1]

假设随机变量 $X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim \chi^2(n)$，且变量 X_1 与变量 X_2 相互独立，则称 $t = \dfrac{X_1}{\sqrt{X_2/n}}$ 的分布为自由度为 n 的 t 分布，记作 $t \sim t(n)$。

下面导出 t 分布的密度函数。由标准正态密度函数的对称性可知，X_1 与 $-X_1$ 相同分布相同，从而 t 与$-t$ 有相同分布。这说明：对任意实数 y 有

$$P(0<t<y) = P(0<-t<y) = P(-y<t<0),$$

于是 $P(0<t<y) = \dfrac{1}{2}P(t^2<y^2)$.

由 F 变量构造可知，$t^2 = \dfrac{X_1^2}{X_2/n} \sim F(1,n)$，将上式两边关于 y 求导可得 t 分布的密度函数为

$$p_t(y) = yp_F(y^2) = \frac{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(y^2)^{\frac{1}{2}-1}\left(1+\frac{1}{n}y^2\right)^{-\frac{n+1}{2}} y$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty<y<\infty.$$

这就是自由度为 n 的 t 分布的密度函数。

t 分布是一簇曲线，其形态大小变化与自由度的大小相关。如果自由度 v 越小，t 分布的曲线就越低

平；如果 v 自由度越大，t 分布的曲线越与标准正态分布曲线接近，t 分布图像，如图 1。

2.2. t 分布的性质[1]

性质 1：设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的一个样本，$\overline{x}$ 与 s^2 分别是该样本均值与样本方差，则有

$$t=\frac{\sqrt{n}\left(\overline{x}-\mu\right)}{s}\sim t\left(n-1\right) \tag{1.1}$$

证明：由于 $\overline{x}\sim N\left(\mu,\sigma^2/n\right)$ 所以可以推出 $\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma}\sim N\left(0,1\right)$。将(1.1)式左端改写成为

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{x}-\mu\right)}{s}=\frac{\dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{\left(n-1\right)s^2/\sigma^2}{n-1}}}$$

因为分母的根号里是自由度为 $n-1$ 的 χ^2 变量除以它的自由度，分子是标准正态变量，并且分子与分母相互独立，我们由 t 分布定义可知 $t\sim t\left(n-1\right)$，证毕。

性质 2：设 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是来自 $N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$ 的样本， $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是来自 $N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$ 的样本，且此两样本相互独立，记

$$s_x^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i-\overline{x}\right)^2,\quad s_y^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2,$$

其中

$$\overline{x}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_i,\quad \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

则有

$$F=\frac{s_x^2/\sigma_1^2}{s_y^2/\sigma_2^2}\sim F\left(m-1,n-1\right)$$

设 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，并记

$$s_w^2=\frac{\left(m-1\right)s_x^2+\left(n-1\right)s_y^2}{m+n-2}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(x_i-\overline{x}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}{m+n-2}$$

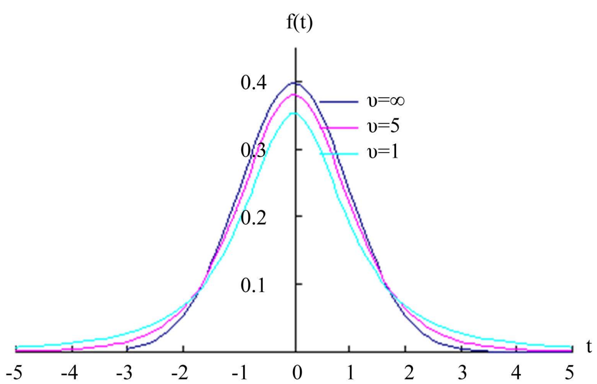

Figure 1. Degree of freedom was 1, 5, ∞ for the t distribution
图 1. 自由度为 1、5、∞的 t 分布

则有

$$\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$$

3. t 分布在区间估计中应用

3.1. 单样本的区间估计[1]

3.1.1. 均值的区间估计

方差未知时，t 统计量 $t=\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu)}{s}\sim t(n-1)$，其中 s 为样本标准差 $s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}$，$n$ 为样本容量.

利用 t 分布，对于任意可能的偏差 $\varepsilon>0$，我们计算概率 $P(|\overline{x}-\mu|<\varepsilon)$，设 $P(|\overline{X}-\mu|<\varepsilon)=P\left(\frac{|\overline{X}-\mu|}{S/\sqrt{n}}<\frac{\varepsilon}{S/\sqrt{n}}\right)=P(|t|<t_{1-\alpha})=1-\alpha$ 其中 $t_{1-\alpha}=\frac{\varepsilon}{S/\sqrt{n}}$，即 $\varepsilon=\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}$，则对于置信度 $1-\alpha$，可以查 t 分布表（自由度为 $n-1$），求出 $t_{1-\alpha}$，进而按上式求出偏差 ε，便可得到 μ 的置信区间为

$$|\overline{x}-\mu|<\varepsilon=\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}，\text{或}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}<\mu-\overline{x}<\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}，$$

即 $\overline{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}<\mu<\overline{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}$。

也常记为 $\overline{x}\pm t_{1-\alpha/2}(n-1)s/\sqrt{n}$，此处 $s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ 是 σ^2 的无偏估计。

3.1.2. 单样本区间估计的应用

1) 在渔业中的应用

例 2.1 某水产研究所池塘养殖室，1979 年在某渔场一块面积 15 亩的池塘，他们将利用城市的污水进行养殖鲢、鳙鱼来进行试验，年初时鲢、鳙鱼种在池塘中各放入 12,000 条(其中鱼的个体长约 8 寸)，经数据统计知年终取样捕捞鳙鱼 22 条，经计算可以得到样本均值为 $\overline{x}=1.34$ 市斤，该样本的标准差为 $S=0.34$ 市斤．试求该样本总体均值 μ 以 90%的置信区间。

解：自由度 $k=n-1=22-1=21$ 和 $\alpha=0.1$ 查 t 分布表可得到 $t_{1-\alpha}=1.721$，由此可得偏差为

$$\varepsilon=\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha}=\frac{0.34}{\sqrt{22}}\times1.721=0.12$$

所以置信区间为

$$1.34-0.12<\mu<1.34+0.12$$

即 $1.22<\mu<1.46$。

也就是说，我们有 90%的把握推断该鱼塘鳙鱼平均体重为 1.22~1.46 市斤．有时候我们需要知道样本量，故可通过单样本区间估计得出样本量。样本量的确定，从 2.1.1 的推导我们可以知道，对于置信区间 α，偏差 $\overline{x}-\mu$ 满足 $P\left(|\overline{x}-\mu|<\frac{s}{\sqrt{n}}t_\alpha\right)=\alpha$。由 $|\overline{x}-\mu|<\frac{s}{\sqrt{n}}t_\alpha$ 可以得到 $n<\frac{s^2t_\alpha^2}{(\overline{x}-\mu)^2}$ 通常我们取 t_α 等于自

由度为∞时的值来确定取样数比较可靠：$n=\frac{s^2 t^2_{(\alpha,\infty)}}{(\overline{x}-\mu)}$，其中$s^2$可以在正式调查前的预备调查中的实际算出。

例 2.2 在上例所述的池塘中，假设已知鲢鱼样本标准差为$s=0.17$市斤，如果我们要求样本均值与总体均值的允许偏差为总体均值的允许偏差为 0.07 市斤，试求 90%置信概率的鲢鱼样本应取样数。

解：$n=\frac{0.17^2\times 1.64^2}{0.07^2}=15.9\approx 16$

即取样数为 16 即可。

2) 单样本区间估计在产品寿命中的应用

例 2.3 [2] 假定某种轮胎的寿命服从正态分布．为了估计这种轮胎的平均使用寿命，我们随机地抽取 12 只轮胎进行试用，测得它们的使用寿命（单位：万千米）如表 1。

试求平均寿命的 0.95 置信区间。

解：这里正态总体的标准差未知，故可使用t分布求均值的置信区间．其中$\overline{x}=4.7092$，$s^2=0.0615$．取$\alpha=0.05$，查t分布表可知$t_{0.975}(11)=2.2010$，故轮胎平均寿命的 0.95 置信区间为

$$4.7092\pm 2.2010\times\sqrt{0.0615}\big/\sqrt{12}=[4.5516,4.8668]$$

实际应用当中，我们总期望轮胎的使用寿命能够越长越好，所以，这里我们可以只求轮胎平均寿命的置信下限，即构造单侧的置信下限，由于

$$P\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu)}{s}<t_{1-\alpha}(n-1)\right)=1-\alpha$$

从上述不等式变形可以得到μ的$1-\alpha$置信下限为$\overline{x}-t_{1-\alpha}(n-1)s\big/\sqrt{n}$。将$t_{0.95}(11)=1.7959$代入计算可得轮胎平均寿命$\mu$的 0.95 置信下限为 4.5806(万千米)。

例 2.4 [2] 假设某种灯泡的寿命服从正态分布，我们先从一批灯泡中随机抽取 16 只灯泡，测得这 16 只灯泡使用寿命（小时）如表 2。

试确定该批灯泡平均使用寿命 95%的置信区间。

解：根据抽样结果计算的：

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{23840}{16}=1490(\text{小时}),\quad s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{9200}{16-1}}=24.77(\text{小时})$$

根据$\alpha=0.05$查t分布表得$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(15)=2.131$，故平均使用寿命的置信区间为：

Table 1. The use life of 12 tires were randomly selected (unit: million)
表 1. 随机抽取 12 只轮胎的使用寿命(单位：万千米)

4.68	4.86	4.32	4.85	4.61	5.02
5.20	4.60	4.58	4.72	4.38	4.70

Table 2. The service life of the 16 light bulbs were randomly selected
表 2. 随机抽取 16 只灯泡的使用寿命

1510	1450	1480	1460	1520	1480	1490	1460
1480	1510	1530	1470	1500	1520	1510	1470

$$\bar{x} \pm t_{1-\alpha/2}(n-1)s/\sqrt{n} = 1490 \pm 2.131 \times \frac{24.77}{\sqrt{16}} = 1490 \pm 13.2$$

故该种灯泡平均使用寿命 95%的置信区间为(1476.8，1503.2)小时。

3.2. 独立两样本的区间估计[3]

设 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是来自 $N(\mu, \sigma_1^2)$ 的样本，$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是来自 $N(\mu, \sigma_2^2)$ 的样本，且此两样本相互独立。$\bar{x}$ 与 $\bar{y}$ 分别是它们的样本均值，记

$$s_x^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2,$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2,$$

分别为样本 x 和样本 y 的样本方差，下面讨论两个均值差。

3.2.1. 两样本均值差的区间估计

1) 两样本方差相等且未知时

枢轴量 $t = \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}} \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(m-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2}} \sim t(m+n-2)$，

记 $s_w^2 = \frac{(m-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2}{m+n-2}$，则 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间为

$$\bar{x} - \bar{y} \pm \sqrt{\frac{m+n}{mn}} s_w t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$$

2) 已知两样本方差比值时

$$\bar{x} - \bar{y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2\left(\frac{1}{m} + \frac{c}{n}\right)\right)。$$

$$\frac{(m-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2/c}{\sigma_1^2} = \frac{(m-1)s_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{(n-1)s_y^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(m+n-2),$$

枢轴量 $t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(m-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2/c}} \sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{mc+n}} \sim t(m+n-2)$，

则 $\mu_1 - \mu_2$ 的 $1-\alpha$ 置信区间为 $\bar{x} - \bar{y} \pm \sqrt{\frac{mc+n}{mn}} s_w t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$。

3.2.2. 独立两样本的区间估计的应用

1) 在军事中的应用[3] [4]

例 2.5 为了比较某两种型号为 a，b 的两种步枪子弹的枪口速度，随机地抽取出 a 型子弹 10 发，得到枪口速度的平均值为 $\overline{x_1} = 500\ \text{m/s}$，标准差 $s_1 = 1.10\ \text{m/s}$，随机地抽取出 b 型子弹 20 发，得到枪口速度的平均值为 $\overline{x_2} = 496\ \text{m/s}$. 标准差 $s_2 = 1.20\ \text{m/s}$. 这里我们都假设两样本都可认为近似的服从正态分布，且两种型号子弹的生产过程可认为方差相等，求两样本均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的一个置信水平为 0.95 的置信区间。

解：我们可以知道两个总体的样本是相互独立的，且假设两样本的方差相等，但方差的数值未知，所以可以利用公式 $\bar{x} - \bar{y} \pm \sqrt{\frac{m+n}{mn}} s_w t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$ 来求均值的置信区间，由于 $1-\alpha = 0.95$，$\alpha/2 = 0.025$，

$m=10$，$n=20$，$m+n-2=28$，$t_{0.025}(28)=2.0484$。$s_w^2=\left(9\times1.10^2+19\times1.20^2\right)/28$，$s_w=\sqrt{s_w^2}=1.1688$，故所求的两总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的一个置信水平 0.95 的置信区间是

$$\left(\overline{x_1}-\overline{x_2}\pm t_{0.025}(28)\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}}\right)=(4\pm0.93)$$

即 $(3.07,4.93)$。

2) 独立两样本的区间估计在工业中的应用

例 2.6 为了提升某一化学生产过程的得率，我们么试图采用一种新的催化剂。为了慎重起见，需要在实验工厂对此新的催化剂进行实验．假设采用原来的催化剂进行了 $n_1=8$ 次试验，我们得到的得率的平均值 $\overline{x_1}=91.73$，其样本方差为 $s_1=3.89$；又采用新的催化剂进行了 $n_2=8$ 次试验，得到得率的平均值 $\overline{x_2}=93.75$，样本方差 $s_2^2=4.02$．这里假设两样本都可认为服从正态分布，两样本相互独立，并且两样本的方差相等。试求两样本总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

解：$s_w^2=\dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=3.96$，$s_w=\sqrt{3.96}$，由公式

$$\overline{x}-\overline{y}\pm\sqrt{\frac{m+n}{mn}}s_w t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$$

求得置信区间为$\left(\overline{x_1}-\overline{x_2}\pm t_{0.025}(14)\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}\right)=(-2.02\pm2.13)$，

即 $(-4.15,0.11)$。

因为得到的置信区间包含零，在实际应用当中我们认为采用这两种催化剂所得的得率的均值是没有显著差别。

4. *t* 分布在假设检验中的应用

4.1. 单样本 *t* 检验

4.1.1. 单样本 *t* 检验定义

t 检验是常用的假设检验方法之一，常用于正态总体均值的假设检验，单样本 *t* 检验中

当

$$H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0 \tag{1}$$

的假设检验问题成为双边假设检验；

当

$$H_0:\mu\geq\mu_0,H_1:\mu<\mu_0 \tag{2}$$

的假设检验问题成为左边检验

当

$$H_0:\mu\leq\mu_0,H_1:\mu>\mu_0 \tag{3}$$

的假设检验问题成为右边检验

在单个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 均值 μ 的检验中，当 σ 未知时，可选用 t 检验中(1)、(2)、(3)。σ 未知时，$\left(\overline{x}-\dfrac{t_\alpha(n-1)s}{\sqrt{n}},+\infty\right)$ 是 μ 的一个置信水平为 $(1-\alpha)$ 的单侧置信区间，其中 $\overline{x}-\dfrac{t_\alpha(n-1)s}{\sqrt{n}}$ 是置信下限，即对于任意的 $\mu\in\Theta$，有

$$P_{\mu}=\left(\bar{x}-\frac{t_{\alpha}(n-1)s}{\sqrt{n}}<\mu<+\infty\right)\geq 1-\alpha\ . \tag{4}$$

考虑右边检验 $H_0:\mu\leq\mu_0, H_1:\mu>\mu_0$，其拒绝为 $t\geq t_{\alpha}(n-1)$，等价于

$$\frac{(\bar{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{s}\geq t_{\alpha}(n-1), \tag{5}$$

恒等变形得 $\mu_0\notin\bar{x}-\frac{t_{\alpha}(n-1)s}{\sqrt{n}}$，即 $\mu_0\notin\left(\bar{x}-\frac{t_{\alpha}(n-1)s}{\sqrt{n}},+\infty\right)$；同理如果 $\mu_0\in\left(\bar{x}-\frac{t_{\alpha}(n-1)s}{\sqrt{n}},+\infty\right)$，则 $\mu_0>\bar{x}-\frac{t_{\alpha}(n-1)s}{\sqrt{n}}$，恒等变形得

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}<t_{\alpha}(n-1) \tag{6}$$

即有 $t<t_{\alpha}(n-1)$，此时应接受 H_0. 所以我们要检验假设(3)，可先求出 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间 $\left(\bar{x}-\frac{t_{\alpha}(n-1)s}{\sqrt{n}},+\infty\right)$，然后考察区间是否包含 μ_0，

若 $\mu_0\in\left(\bar{x}-\frac{t_{\alpha}(n-1)s}{\sqrt{n}},+\infty\right)$，则接受 H_0；若 $\mu_0\notin\left(\bar{x}-\frac{t_{\alpha}(n-1)s}{\sqrt{n}},+\infty\right)$，则拒绝 H_0。

4.1.2. 单样本 *t* 检验的应用

1) 单样本 *t* 检验在产品寿命中的应用

单样本在 SPSS 统计软件中，置信区间类型为 $\left(\bar{x}-\frac{t_{\alpha/2}(n-1)s}{\sqrt{n}},\bar{x}+\frac{t_{\alpha/2}(n-1)s}{\sqrt{n}}\right)$(置信度为 $1-\alpha$)，故我们通过求出 μ 的置信度为 $1-2\alpha$ 的置信区间 $\left(\bar{x}-\frac{t_{\alpha/2}(n-1)s}{\sqrt{n}},\bar{x}+\frac{t_{\alpha/2}(n-1)s}{\sqrt{n}}\right)$，即可求出 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间 $\left(\bar{x}-\frac{t_{\alpha}(n-1)s}{\sqrt{n}},+\infty\right)$，同理按上述方法可以检验假设(3)。

例 3.1 [5] [8]某种产品的使用寿命 *x*(以 h 计)服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ 未知，随机抽取 16 只该产品，测得 16 只该产品的使用寿命如表 3。

问是否可以认为该产品的平均使用寿命大于 225 小时(取显著性水平为 $\alpha=0.05$)?

解：原假设和备择假设为 $H_0:\mu\leq\mu_0=225, H_1:\mu>225$，建立数据文件，然后点击软件 SPSS13.0 中 "Analyze → Descriptive Statistics → Explore" [5]-[10]就能得出图 2 的结果，其中置信度设置为 $1-2\alpha=1-2\times 0.05=90\%$。

由图 2 可知，均值 μ 的置信度为 $1-\alpha=0.95$ 的单侧置信区间为 $(182.6487,+\infty)$。又因为 $225\in(182.6487,+\infty)$，所以在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，故认为该产品的平均使用寿命小于等于 225 小时。

Table 3. The service life of the product is measured in 16 (unit: h)
表 3. 测得 16 只产品的使用寿命(单位：h)

159	280	101	212	224	379	179	264
222	362	168	250	149	260	485	170

Descriptives

			Statistic	Std. Error
VAR00001	Mean		238.9333	26.24254
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	182.6487	
		Upper Bound	295.2180	
	5% Trimmed Mean		232.9259	
	Median		222.0000	
	Variance		10330.067	
	Std. Deviation		101.63694	
	Minimum		101.00	
	Maximum		485.00	
	Range		384.00	
	Interquartile Range		96.00	
	Skewness		1.158	0.580
	Kurtosis		1.185	1.121

Figure 2. A sample of a sample of a product
图 2. 某种产品抽样样本数据表

2) 单样本 t 检验在农业中的应用

例 3.2 有一种新型农药防治柑桔红蜘蛛，进行了 9 个校区的实验，其防治效果为：95%，92%，88%，92%，93%，95%，89%，98%，92%，与原用农药的防治效果 90%比较，分析其效果是否高于原用农药。

解：在这里应用 spss13.0 软件来分析，在数据编辑窗口输入分析数据，在软件 spss13.0 主菜单中选中“Analyze→Compare Means→One-Sample T Test”，打开单一样本 T 检验主对话框，从左边的变量列表中选中“防治效果”变量之后，点击中部的右拉按钮，使得这个变量就进入到检验分析“Test Variable(s):”框里，用户可以从左边变量列表里选择一个或多个变量进行分析。在“Test Variable(s)”输入栏里，输入用于比较检验的均值：在本例中为 90。单击“Options”按钮，打开设置检验的置信度和缺失值对话框。在“Confidence Interval:”框输入置信度水平，系统默认为 95%。在“Missing Values”栏里选择缺失值处理方式：输入完成后，在过程主窗口中单击“OK”按钮，SPSS 输出分析结果如图 3。

从图 3 中读取数值，t 值为 2.596，Sig.(2-tailed)为单边 t 检验的显著性概率 0.032，小于 0.05，由此得出结论：新型农药和原用农药差异显著。

3) 单样本 t 检验在材料中的应用

例 3.3 某种汽车配件的平均长度要求为 12 cm，高于或低于标准均被认为是不合格的。汽车生产企业在购进配件时，通常是经过招标，然后对中标的配件提供的样品进行检验，用来决定是否购进此汽车配件．现在对一个配件提供商提供的 10 个样本进行了检验。结果如表 4。

假设该供货商生产的配件长度服从正态分布，在 0.05 的显著性水平下，检验该供货商提供的配件长度符合标准要求？

解：依题意建立如下原假设与备择假设：

$$H_0: \mu = 12, H_1: \mu \neq 12$$

根据样本数据计算得：$\bar{x} = 11.89, s = 0.49322$

由于 $n < 30$ 为小样本，采用 t 检验：$t = \dfrac{11.89 - 12}{0.4932/\sqrt{10}} = -0.7053$

根据自由度 $(n-1) = 10 - 1 = 9$，查 t 分布表得：$t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(9) = 2.262$，

由于 $|t| = 0.7053 < t_{0.025}(9) = 2.262$，所以不拒绝原假设，样本提供的证据还不足以推翻原假设。

单样本 t 检验在日化产品中的应用

One-Sample Test

	Test Value = 90					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
防治结果	2.596	8	0.032	2.66667	0.2975	5.0359

Figure 3. The results of the test results of the old and new pesticides
图 3. 新旧农药防治效果的 t 检验结果

Table 4. 10 length of accessories (unit: cm)
表 4. 10 个配件的长度(单位：cm)

12.2	10.8	12.0	11.8	11.9	12.4	11.3	12.2	12.0	12.3

例 3.4，某日化生产厂家生产一批次牙膏，要求牙膏总重为 151.70 g，管长 15.65 cm。随机抽取该批次 30 支牙膏，分别称重(g)为(表 5)。

灌装后管长(mm)为(表 6)。

判断这批牙膏是否符合标准要求？

解：应用 spss13.0 软件来分析，在数据编辑窗口输入分析数据，在软件 spss13.0 主菜单中选中“Analyze → Compare Means → One-Sample T Test”，打开单一样本 T 检验主对话框，从左边的变量列表中选中“重量”变量之后，点击中部的右拉按钮，使得这个变量就进入到检验分析“Test Variable(s):”框里。在“Test Variable(s)”输入栏里，输入用于比较检验值：在本例中重量检验值为为 151.70，灌装后管长检验值为 156.5。单击“Options”按钮，打开设置检验的置信度和缺失值对话框。在“Confidence Interval:”框输入置信度水平，系统默认为 95%。在“Missing Values”栏里选择缺失值处理方式：输入完成后，在过程主窗口中单击“OK”按钮，SPSS 输出分析结果如图 4。

从图 4 中可知经单样本双侧 t 检验得到的显著性水平 $P = 0.367 > 0.05$，故与检验值 151.70 没有显著性差异，这批牙膏的重量是符合质量要求。

从图 5 中可知经单样本双侧 t 检验得到的显著性水平 $P = 0.651 > 0.05$，故与检验值 156.50 没有显著性差异，这批牙膏灌装后的管长符合质量要求。

对于牙膏来说重量明显大于或小于标准值，通常需要进行设备调整，重量太大，会增加相对的损耗，也容易在灌装过程中造成牙膏软管破损；重量太轻，就会损害消费者的权益。故 t 检验在牙膏质量检测中起着非常重要的作用。

4.2. 独立两样本 t 检验

4.2.1. 独立两样本 t 检验定义[1]

独立两样本 t 检验可用于两正态总体均值差的建设检验，设 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是来自正态总体 $N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ 的样本，$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是来自正态总体 $N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ 的样本，$\mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2$ 均未知．两样本相互独立，即他们的样本均值分别为 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$，样本方差为 s_1^2 和 s_2^2，考虑检验问题：

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \le \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta, \left(\delta\text{为已知常数}\right), \tag{7}$$

1.当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 时，选用检验统计量

$$t = \frac{\left(\bar{x} - \bar{y}\right) - \delta}{s_{\varpi}\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t\left(m + n - 2\right), \quad \left(\text{其中} s_w^2 = \frac{\left(m-1\right)s_1^2 + \left(n-1\right)s_2^2}{m + n - 2}\right);$$

Table 5. Weighing 30 toothpaste (unit: g)
表 5. 30 支牙膏的称重(单位：g)

152.50	150.80	152.68	149.96	150.52	151.45
151.50	152.03	151.57	150.78	151.75	151.71
150.87	149.68	152.75	151.87	148.86	153.01
152.27	151.95	151.58	151.78	151.89	152.11
151.45	150.78	151.79	151.65	151.68	153.02

Table 6. 30 toothpaste filling tube (unit: mm)
表 6. 30 支牙膏灌装后管长(单位：mm)

156.35	155.89	157.12	156.01	156.45	156.21
156.30	157.04	155.99	157.67	156.67	156.45
156.43	156.36	156.46	156.29	156.47	156.15
155.98	156.98	156.54	156.50	155.57	157.02
157.95	156.00	156.15	156.42	155.67	156.59

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
重量	30	151.5413	0.94886	0.17324

One-Sample Test

	Test Value = 151.70					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
重量	-0.916	29	0.367	-0.15867	-0.5130	0.1956

Figure 4. Toothpaste filling weight t test results
图 4. 牙膏灌装重量 t 检验结果

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
管长	30	156.4560	0.52684	0.09619

One-Sample Test

	Test Value = 156.5					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
管长	-0.457	29	0.651	-0.04400	-0.2407	0.1527

Figure 5. Toothpaste filling tube of t test results
图 5. 牙膏灌装管长 t 检验结果

2.当 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$，用校正的 t 检验，此时

$$t = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - \delta}{\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}} \sim t(n), \tag{8}$$

其自由度 n 计算如下

$$n=\left(\frac{k^2}{m-1}+\frac{(1-k)^2}{n-1}\right),\ k=\frac{s_1^2/m}{s_1^2/m+s_2^2/n}.$$

与单边单样本 t 检验类似，在单边独立两样本 t 检验(7)中，也可先求出量总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-2\alpha$ 置信区间，从而可以求出 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 单侧置信区间，再根据 δ 是否属于单侧置信区间，则接受 H_0;否则拒绝 H_0。

4.2.2. 独立两样本 *t* 检验的应用

1) 独立两样本 t 检验在啤酒业中的应用

例 3.5 [1] 在 20 世纪 70 年代后期，在酿造啤酒的时候人们发现麦芽的干燥过程中容易形成对人体有伤害的致癌物质亚硝酸二甲胺(NDMA)。到了 20 世纪 80 年代初期为了避免酿造啤酒时麦芽干燥过程产生致癌物质亚硝酸二甲胺，研发了一种新型的麦芽干燥过程．下面给出了新老两种麦芽在干燥过程中形成的亚硝酸二甲胺含量(以下数据以 20 亿份中的份数统计得到)：

假设该两样本分服从自正态总体分布，单参数均未知，且该两样本相互独立，分别以 μ_1,μ_2 记对应于老、新过程两样本的总体均值、试检验假设 $(\alpha=0.05)$

$$H_0:\mu_1-\mu_2\le 2, H_1:\mu_1-\mu_2>2$$

首先将新老两种麦芽在干燥过程中形成的亚硝酸二甲胺含量(表 7)数据输入到 SPSS13.0 中，点击"Analyze→Compare Means→Independent-Samples T test [6] [7] [9]"，设置好其中的检验变量和分组变量，在选项中设置其置信度为 $1-2\alpha=1-2\times0.05=95\%$，再点击"Continue→OK"，得到图 6，图 7 的分析结果。

从图 6 中可知，$P=0.839>0.05$，故可以认为新、老干燥过程的资料的方差齐，其中两样本均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的 90%的置信区间为 $(3.061,4.439)$，因此 $(3.061,+\infty)$，是两样本均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的 95%的单侧置信区间，由于 $\delta=2\in(3.061,+\infty)$，故在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，即可认为老、新干燥过程的均值差大于 2。

2) 独立两样本 t 检验在农业中的应用

例 3.6 [2] 在某个有小麦丛矮病的麦田里，调查了 13 株病株和 11 株健株的植株高度，分析健株高度是否比病株高。其调查数据如表 8。

解：应用 SPSS 分析，在 SPSS 中输入数据，在数据编辑窗口输入首先将上述数据输入到 SPSS 中，点击"Analyze"中的 Compare Means 并点击 Independent-Samples T test，设置好检验变量和分组变量，在

Table 7. Nitrite content in the formation of new and old two methylamine two malt drying process [2]
表 7. 新老两种麦芽干燥过程中形成的亚硝酸二甲胺含量[2]

老过程	6	4	5	5	6	5	5	6	4	6	7	4
新过程	2	1	2	2	1	0	3	2	1	0	1	3

Group Statistics

	新老	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
NDMA含量	1.00	12	5.2500	0.96531	0.27866
	2.00	12	1.5000	1.00000	0.28868

Figure 6. Statistic result of the Nitrite content in the formation of new and old two methylamine in the drying process
图 6. 新老干燥过程中形成的亚硝酸二甲胺含量的统计量结果

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Varianc		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
NDMA含量	Equal variances assumed	0.042	0.839	9.346	22	0.000	3.75000	0.40123	2.91790	4.58210
	Equal variances not assumed			9.346	21.973	0.000	3.75000	0.40123	2.91784	4.58216

Figure 7. The results of *t* test of nitrite content of two methylamine forming new old two kinds of malt in the drying process
图 7. 新老两种麦芽干燥过程中形成的亚硝酸二甲胺含量的 *t* 检验结果

Table 8. The plant height of 11 strains and 13 strains of plant health
表 8. 11 株健株和 13 株病株的植株高度

健株	26.0	32.4	37.3	37.3	43.2	47.3	51.8	55.8	57.8	64.0	65.3		
病株	16.7	19.8	19.8	23.3	23.4	25.0	36.0	37.3	41.4	41.7	45.7	48.2	57.8

选项中设置置信度水平，设置为95%的置信度水平，输入完成，在过程主窗口中单击“OK”按钮，SPSS 输出分析结果如下图 8，图 9。

分析：从图 9 可知 t 的值是 2.539，sig.(2-tailed)是双边 t 检验的显著性概率为 0.019，小于 0.05，可以得出结论：健株与病株的株高差异显著。

3) 独立两样本 t 检验在工业的应用

例 3.7 [4] 某工厂铸造车间为了提高铸件的耐磨性，制造了一种镍合金铸件用来代铜合金铸件，从两种铸件中分别抽取一个容量分别为 8 和 9 的样本，分别测得其硬度（一种耐磨性指标）为(表 9)。

根据专业经验，硬度服从正态分布，且方差保持不变，试在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下判断镍合金的硬度是否有明显提高。

解：用 X 表示镍合金的硬度，Y 表示铜合金的硬度，则有假设定，$X \sim N\left(\mu_1,\sigma^2\right), Y \sim N\left(\mu_2,\sigma^2\right)$，要检验的假设是 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1: \mu_1 > \mu_2$. 由于两者方差未知但相等，所以采用两样本 t 检验，经计算，$\bar{x} = 73.39, \bar{y} = 68.2756$，

$$\sum_{i=1}^{8}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 205.7958$$

$$\sum_{i=1}^{9}\left(y_i - \bar{y}\right)^2 = 91.1552$$

从而 $s_w = \sqrt{\dfrac{1}{8+9-2}\left(205.7958 + 91.1552\right)} = 4.4494$，

$$t = \frac{73.39 - 68.2756}{4.4494 \times \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{9}}} = 2.3656，$$

查表知 $t_{0.95}(15) = 1.7531$，由于 $t > t_{0.95}(15)$，故拒绝原假设，可判断镍合金硬度有显著提高。

应用 SPSS 分析，得出图 10 和图 11：

由图 11 可知 t 的值是 2.423，sig.(2-tailed)是双边 t 检验的显著性概率为 0.028，小于 0.05，故也可判断镍合金硬度有显著提高。

Group Statistics

	状态	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
株高	1.00	11	47.1091	13.02977	3.92862
	2.00	13	33.5462	13.04368	3.61767

Figure 8. Statistic results of highly healthy and strain plants
图 8. 健株病株高度的统计量结果

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
株高	Equal variances assumed	0.038	0.847	2.539	22	0.019	13.56294	5.34106	2.48626	24.63961
	Equal variances not assumed			2.540	21.354	0.019	13.56294	5.34056	2.46784	24.65804

Figure 9. t test results of highly healthy and strain plants
图 9. 健株病株高度的 t 检验结果

Table 9. Hardness of 8 nickel alloy and 9 copper alloy castings
表 9. 8 个镍合金和 9 个铜合金铸件的硬度

镍合金	76.43	76.21	73.58	69.69	65.29	70.83	82.75	72.34	
铜合金	73.66	64.27	69.34	71.37	69.77	68.12	67.27	68.07	62.61

Group Statistics

	材料	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
硬度	1.00	8	73.3900	5.23444	1.85066
	2.00	9	68.2756	3.37555	1.12518

Figure 10. Statistical results of the hardness of nickel alloy
图 10. 镍合金硬度的统计量结果

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
硬度	Equal variances assumed	1.131	0.304	2.423	15	0.028	5.11444	2.11042	0.61620	9.61269
	Equal variances not assumed			2.361	11.729	0.036	5.11444	2.16586	0.38333	9.84556

Figure 11. t test results of the hardness of nickel alloy
图 11. 镍合金硬度的 t 检验结果

例 3.8 [10]甲、乙两台机床同时加工某种同类型的零件，已知两台机床加工的零件直径（单位：cm）分别服从正态分布 $N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$，并且有 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，为比较两台机床的加工精度有无显著差异，分别独立抽取了甲机床加工的 8 个零件和乙机床加工的 7 个零件，通过测量得到两台机床加工零件的样本直径数据如表 10：

在 $\alpha=0.05$ 的显著性水平下，样本数据是否提供证据支持“两台机床加工的零件直径不一致”的看法？

解：提出的原假设和备择假设为：

$$H_0:\mu_1-\mu_2=0, H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$$

两个独立样本的容量都小于 30，两个总体方差未知但相等，根据样本数据计算得：

$$\overline{x_1}=19.925, \overline{x_2}=20.143, s_1^2=0.2164, s_2^2=0.2729$$

总体方差的合并估计量为：

$$s_p^2=\frac{(m-1)s_1^2+(n-1)s_2^2}{m+n-2}=\frac{(8-1)\times 0.2164+(7-1)\times 0.2729}{8+7-2}=0.2425$$

计算的检验的统计量为：

$$t=\frac{\left(\overline{x_1}-\overline{x_2}\right)}{s_p\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}=\frac{(19.925-20.143)}{\sqrt{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{7}\right)\times 0.2425}}=-0.855$$

根据自由度 $(m+n-2)=8+9-2=13, \alpha=0.05$ 对应的 t 分布临界值分别是 2.160，−2.160 检验统计量的值没有落入拒绝域．一次不拒绝原假设．故在 0.05 的显著性水平下，没有理由认为甲，乙两台机床加工的零件直径不一致。

应用 SPSS 分析，得出图 12 和图 13。

由图 13 可知 t 的值是−0.855，sig.(2-tailed)是双边 t 检验的显著性概率为 0.408，大于 0.05，故没有理由认为甲，乙两台机床加工的零件直径不一致。

5. 结论及建议

文中用 t 分布分析了单样本区间估计中渔获物的样本、轮胎平均寿命的 0.95 置信区间以及某批灯泡

Table 10. Sample diameter data of two machine tool machining parts (unit: cm)
表 10. 两台机床加工零件的样本直径数据(单位：cm)

甲机床	20.5	19.8	19.7	20.4	20.1	20.0	19.0	19.9
乙机床	20.7	19.8	19.5	20.8	20.4	19.6	20.2	

Group Statistics

	种类	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
直径	1.00	8	19.9250	0.46522	0.16448
	2.00	7	20.1429	0.52236	0.19743

Figure 12. Statistic result of A, B two machine tool for the machining of parts diameter
图 12. 甲、乙两台机床加工的零件直径的统计量结果

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
直径	Equal variances assumed	0.623	0.444	-0.855	13	0.408	-0.21786	0.25485	-0.76842	0.33271
	Equal variances not assumed			-0.848	12.187	0.413	-0.21786	0.25697	-0.77679	0.34108

Figure 13. t test results of A, B two machine tool for the machining of parts diameter
图 13. 甲、乙两台机床加工的零件直径的 t 检验结果

平均使用寿命 95%的置信区间，也详细分析了两种型号步枪子弹的枪口速度均值差的一个置信水平位 95%的置信区间，通过 t 分布进行区间估计在实际中的重要应用，体现了 t 分布的重要作用。

在假设检验中，通过在单样本 t 检验，判断了元件的平均寿命时常是否大于某一定值，新旧农药在效果上的差异是否显著以及判断了铝材的长度是否满足设定要求．也通过两样本 t 检验在农业、工业和啤酒业中都得到了应用．在应用分析中，对一些应用借用了 SPSS 软件进行了分析，得出同样的结论。

t 检验的 SPSS 实现不仅能提高对 t 检验方法的使用技巧，而且能加深了对统计软件的使用和掌握，从而提高实践技能。

参考文献 (References)

[1] 茆师松，程依明，濮晓龙．概率论与数理统计教程[M]．北京：高等教育出版社, 2011.
[2] 袁卫．统计学[M]．第 2 版．北京：高等教育出版社, 2005.
[3] 盛骤，谢式千，潘承毅．概率论与数理统计[M]．第 4 版．北京：高等教育出版社, 2008.
[4] 王向飞，王玉柱，沈宇军．军品质量管理中的统计技术与 SPSS 软件的应用[J]．火力与指挥控制, 2006.
[5] 宇传华. SPSS 与统计分析[M]．北京：电子工业出版社, 2007.
[6] 张红兵，贾来喜，李潞. SPSS 宝典[M]．北京：电子工业出版社, 2007.
[7] 张文彤，闫洁. SPSS 统计分析基础教程[M]．北京：高等教育出版社, 2006.
[8] 丁国盛，李涛. SPSS 统计教程——从研究设计到数据分析[M]．北京：机械公业出版社, 2007.
[9] 罗应婷. SPSS 统计软件分析——从基础到实践[M]．第 2 版．北京：电子工业出版社, 2010.
[10] 程莹，陈希镇．巧用 SPSS 进行均值的假设检验[J]．统计与决策, 2008.