

Cobb-Douglas Production Function with a Latent Variable and Its Empirical Study

Feng Gao*, Xuqing Liu

Faculty of Mathematics and Physics, Huaiyin Institute of Technology, Huai'an Jiangsu
Email: *hagaofeng000000@163.com

Received: Sep. 8th, 2016; accepted: Sep. 23rd, 2016; published: Sep. 29th, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

Cobb-Douglas production function represents the input-output relationship among the labor force, the invested fund, and the GDP in economics. Considering that the regional soft power (RSP) measures the realistic or underlying competitiveness of a region, it may be theoretically appropriate to integrate RSP as a production factor into the production function. However, RSP is a *latent variable*, and thus needs a reasonable method of assigning its values. In this paper, we construct a new production function by introducing RSP to the Cobb-Douglas production function. The method of assigning values to RSP is discussed by virtue of factor analysis method L. The empirical study is made by applying the theoretical result to the thirteen cities of Jiangsu province.

Keywords

Cobb-Douglas Production Function, Regional Soft Power, Factor Analysis Method L

含有潜变量的Cobb-Douglas生产函数模型 及其实证分析

高峰*, 刘绪庆

淮阴工学院数理学院, 江苏 淮安
Email: *hagaofeng000000@163.com

*通讯作者。

收稿日期: 2016年9月8日; 录用日期: 2016年9月23日; 发布日期: 2016年9月29日

摘要

Cobb-Douglas生产函数描述了劳动力投入、资金投入与生产总值之间的投入产出关系。区域软实力衡量了一个地区具有的现实的和潜在的竞争优势, 因此区域软实力可以作为一种生产要素介入生产函数中, 但是区域软实力是“潜变量”, 需要一个合理的赋值方法。本文在Cobb-Douglas生产函数中引入区域软实力指标, 得到了一个新的生产函数, 应用因子分析模型L, 给区域软实力进行赋值, 最后对江苏省13个城市进行了实证分析。

关键词

Cobb-Douglas生产函数, 区域软实力, 因子分析模型L

1. 引言

在经济学中, 著名的Cobb-Douglas生产函数为

$$Q_t = aL_t^b K_t^c \quad (1.1)$$

其中 Q_t 表示第 t 年的生产总值, L_t 代表第 t 年的劳动力投入量, K_t 代表第 t 年的资金投入量, a, b, c 为模型参数。Cobb-Douglas生产函数是研究一个国家、一个地区或者一个大型企业的投入产出关系的一种经济数学模型。

在研究区域生产函数中, 区域软实力对于生产总值存在潜在的影响。Baltagi 和 Pinnoi [1]在研究美国48个相邻的州1970到1986年的生产函数时, 在投入变量中增加了“公共资本”指标, 这个“公共资本”包括高速公路、街道、水和排污设备以及其他的公共建设。我们认为用区域软实力来代替“公共资本”更为准确。

软实力是当前国际竞争的一个新兴领域。约瑟夫·奈把软实力定义为“软实力是一个国家造成一种情势, 使其他国家仿效该国倾向并界定其利益的能力, 这个实力往往来自文化和意识形态吸引力, 国际机制的规则和制度等资源”。随着软实力理论研究的逐步深入, 软实力的概念被应用于区域经济竞争, 产生了区域软实力的概念, 用来衡量一个地区具有的现实的和潜在的竞争优势。区域软实力被定义为“在区域竞争中, 建立在区域文化、政府公共服务(服务制度和服务行为)、人力素质(居民素质)等非物质要素之上的区域政府公信力、区域社会凝聚力、特色文化的感召力、居民创造力和对区域外部吸引力等力量的总和[2]”。

管理学大师熊彼特提出, 所谓创新就是“建立一种新的生产函数”。既然区域软实力衡量了一个地区具有的现实的和潜在的竞争力, 那么区域软实力就可以作为一种生产要素而介入投入产出模型中。本文尝试在Cobb-Douglas生产函数中引入软实力指标, 作为投入变量中的“潜变量”, 从而得到一个新的生产函数:

$$Q_t = aL_t^b K_t^c S_{t-1}^d \quad (1.2)$$

其中 S_{t-1} 表示第 $t-1$ 年的区域软实力, d 是参数。

本文的后面是这样安排的, 在第二节, 我们建立估计生产函数(1.2)的参数统计模型和软实力测量模型; 在第三节, 我们对江苏省13个城市的年度经济数据进行实证分析。

2. 模型的建立与求解

2.1. 模型的建立

对生产函数(1.2)的两边取对数, 加上模型的随机误差 ε , 得到回归方程

$$\log Q_t = \beta_0 + \beta_1 \log L_t + \beta_2 \log K_t + \beta_3 \log S_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.1)$$

其中 $\beta_0 = \log a$ 为模型截距项, $\beta_1 = \log b, \beta_2 = \log c, \beta_3 = \log d$ 为回归系数, $E(\varepsilon_t) = 0, E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$ 。

在模型(2.1)中, Q_t, L_t, K_t 是可观测的变量, 而区域软实力 S_{t-1} 是一个潜变量, 不能直接观察, 需要用数学工具进行间接测度。

如何应用数学工具来测度区域软实力? 目前文献中比较一致的观点是, 把区域软实力划分为几个二级指标, 每一个二级指标用若干个可观测指标进行定量评估, 得到每一个二级指标的得分, 再利用二级指标的得分得到区域软实力的得分, 使用的数学工具主要是层次分析法或者因子分析法。本文将使用因子分析法来计算二级指标的得分, 然后基于二级指标的得分, 使用方差比定义的权重来计算区域软实力的得分。

根据专家的观点[3], 将区域软实力划分为 6 个二级指标: 1) 区域文化, 记为 f_1 ; 2) 人力资源素质, 记为 f_2 ; 3) 政府公共服务, 记为 f_3 ; 4) 区域形象, 记为 f_4 ; 5) 区域融通, 记为 f_5 ; 6) 区域创新, 记为 f_6 。假设二级指标 $f_i (i=1, \dots, 6)$ 可以用 m_i 个可观测指标 $x_{ij}, j=1, \dots, m_i$ 来测量, 则测量方程为

$$\begin{cases} x_{ijk} = \mu_i + \lambda_{ij} f_i + \delta_{ijk}, \\ E(\delta_{ijk}) = 0, \text{Var}(\delta_{ijk}) = \zeta_i^2, \\ i = 1, \dots, 6, j = 1, \dots, m_i, k = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 x_{ijk} 为指标 x_{ij} 在 n 个城市上的观察值。

有了二级指标的得分, 则构造 $f_i, i=1, \dots, 6$ 的函数 $g(f_1, \dots, f_6)$ 来评估区域软实力 S , 其中 $g(\bullet)$ 为某一实值函数, 一般取 $g(\bullet)$ 为线性函数, 则有

$$S = \sum_{i=1}^6 \omega_i f_i \quad (2.3)$$

令 $X = (x_{11}, \dots, x_{1m_1}, \dots, x_{61}, \dots, x_{6m_6})'$, 其协方差阵 $\text{Cov}(X) = \Sigma$ 可以表示为

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{11,12} & \cdots & \sigma_{1m_1,6m_6} \\ \sigma_{12,11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{12,6m_6} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{6m_6,11} & \sigma_{6m_6,12} & \cdots & \sigma_{6m_6} \end{pmatrix}$$

注意到方差和 $\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^{m_i} \sigma_{ij}$ 度量了随机向量 X 的变差, 方差和 $\sum_{j=1}^{m_i} \sigma_{ij}$ 度量了随机向量 $(x_{i1}, \dots, x_{im_i})'$ 的变差, 而 $(x_{i1}, \dots, x_{im_i})'$ 是用来测量软实力二级指标 $f_i, i=1, \dots, 6$ 的。这启发了我们产生了如下想法: 比值 $\sum_{j=1}^{m_i} \sigma_{ij} / \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^{m_i} \sigma_{ij}$ 越大, 对应的二级指标 f_i 能够解释软实力 S 就越好; f_i 解释软实力 S 越好, f_i 的权重就应该越大。基于这个观点, 我们定义公式(2.3)中的权重为

$$\omega_i = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} \sigma_{ij}}{\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^{m_i} \sigma_{ij}}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.4)$$

结合(2.3)和(2.4), 我们能够计算软实力的得分, 然后把软实力的得分作为回归方程(2.1)中潜变量 S_{t-1}

的观察值来进行回归分析。

2.2. 模型的估计

1) 测量模型的估计

测量模型(2.2)是因子分析模型, 我们要计算它的因子载荷和因子得分。

因子分析是使用较少的几个变量(称之为因子)来解释 p 维随机变量 X , 这些因子(不可观测)被解释为可观测的 p 维随机变量 X 的潜在的公共特征, 因子分析的模型为

$$X = \mu + Lf + \varepsilon \quad (2.5)$$

其中 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)'$ 为模型的截距项, $f = (f_1, \dots, f_m)'$ 为因子向量, $L = (l_{ij})_{p \times m}$ 为载荷矩阵, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)'$ 为特殊因子。

林海明[4]提出了因子模型 L 的概念: 如果要求 $E(f) = 0, Cov(f) = I, E(\varepsilon) = 0, Cov(\varepsilon, f) = 0$, 则称(2.5)为因子分析模型 L , 注意因子分析模型 L 与一般的正交因子模型相比较, 是释放了条件 $Cov(\varepsilon) = \sigma^2 I$ 。他引入了因子分析的精确解概念, 称使得特殊因子的方差之和 $\sum Var(\varepsilon_i)$ 最小化的载荷阵 L 和因子得分 f 为因子分析模型的精确解, 精确解的结果如下所示:

$$L = \left(\lambda_1^{-\frac{1}{2}} \gamma_1, \dots, \lambda_m^{-\frac{1}{2}} \gamma_m \right) \quad (2.6)$$

$$f = diag(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_m^{-1}) L' (X - \mu) \quad (2.7)$$

其中 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$ 为 $Cov(X)$ 前 m 个顺序特征值, $\gamma_i, i = 1, \dots, m$ 为 $Cov(X)$ 对应于 λ_i 的标准特征向量。本文将应用公式(2.6) (2.7)来估计测量模型(2.2)的因子载荷和因子得分。

区域软实力的二级指标 $f_i, i = 1, \dots, 6$ 的测量模型(2.2)是公共因子个数为一的因子分析模型, 记 $S^{(i)}, i = 1, \dots, 6$ 为观察指标向量 $X^{(i)} = (x_{i1}, \dots, x_{im_i})', i = 1, \dots, 6$ 在 n 个城市上的观察数据阵的样本协方差阵, 则 $S^{(i)}$ 为 $X^{(i)}$ 的总体协方差阵的最大似然估计, 设 $\lambda_1^{(i)}, \gamma_1^{(i)}$ 分别为 $S^{(i)}$ 的最大特征值与标准特征向量, 则载荷阵和城市 $k, k = 1, \dots, n$ 的因子得分的精确解的估计值分别为

$$\left(\hat{\lambda}_{i1}, \dots, \hat{\lambda}_{im_i} \right)' = \sqrt{\lambda_1^{(i)}} \gamma_1^{(i)} \quad (2.8)$$

$$\hat{f}_{ik} = \sum_{j=1}^{m_i} \sqrt{\lambda_1^{(i)}} a_j (x_{ijk} - \bar{x}_{ij}) \quad (2.9)$$

其中 f_{ik} 表示 $f_i, i = 1, \dots, 6$ 在城市 $k, k = 1, \dots, n$ 的因子得分, $a_j, j = 1, \dots, m_i$ 为 $\gamma_1^{(i)}$ 的第 j 个分量。

2) 对于区域软实力评价模型(2.3), 权重 ω_i 的估计值为

$$\hat{\omega}_i = \frac{DS^{(i)}}{\sum_{k=1}^6 DS^{(k)}}, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (2.10)$$

其中 $DS^{(i)}$ 表示 $S^{(i)}, i = 1, \dots, 6$ 的主对角线元素之和。

3) 对于回归模型(2.1), 应用最小二乘法进行估计。

3. 实证分析

现在我们利用上述的理论方法, 来评估江苏省 13 个城市的区域软实力, 并且估计生产函数(1.2)。

首先我们参考朱孔来等[3]构建的区域软实力指标评价体系, 结合数据的可采集情况, 确定了区域软实力评价指标体系(表 1)。

Table 1. Regional soft power index evaluation system
表 1. 区域软实力指标评价体系

一级指标	二级指标	三级指标
S 软实力	f_1 区域文化	X_{11} 文物文化事业费占地方财政支出的比例(%)
		X_{12} 每万人图书馆数(个/万人)
		X_{13} 每万人图书馆藏书量(册/万人)
	f_2 人力资源素质	X_{21} 人均财政性教育支出(元/人)
		X_{22} 每万人中小学在校生人数(人/万人)
		X_{23} 每万人高校在校生人数(人/万人)
	f_3 政府公共服务	X_{31} 政府服务满意度(%)
		X_{32} 每万人拥有医生数(人/万人)
		X_{33} 参加基本保险人数(%)
	f_4 区域形象	X_{41} 污水处理能力(%)
		X_{42} 吸引外资能力(美元/人)
		X_{43} 城市人均公共绿化面积(平方米/人)
	f_5 区域融通	X_{51} 人均邮电业务量(元/人)
		X_{52} 人均地方交通客运量(%)
		X_{53} 人均入境旅游人数(人/万人)
	f_6 区域创新	X_{61} R&D 经费占地方财政支出的比例(%)
		X_{62} 每万人专利授权数(件/万人)
		X_{63} 每万人 R&D 人员数(人/万人)

根据《江苏省统计年鉴 2014》，得到指标 X_{ij} 的 13 个城市的样本值。为了克服数据之间单位的不一致，我们利用极差对 X_{ij} 进行规范化，令 $x_{ijk}, k=1, \dots, 13$ 为 X_{ij} 的 13 个城市的观察值， $d_{ij} = \max_{1 \leq k \leq 13} \{x_{ijk}\} - \min_{1 \leq k \leq 13} \{x_{ijk}\}$ 为 X_{ij} 的极差，定义

$$z_{ijk} = \frac{x_{ijk} - \min_{1 \leq k \leq 13} \{x_{ijk}\}}{d_{ij}} \times 100, \quad k=1, \dots, 13 \quad (3.1)$$

称 z_{ijk} 为 X_{ij} 的归一化观察值，令 $z_{ijk}^c = z_{ijk} - \bar{z}_{ij}, i=1, \dots, 6, j=1, 2, 3$ ，即 z_{ijk}^c 为 z_{ijk} 的中心化。根据式(2.2)，则软实力二级指标 $f_i, i=1, \dots, 6$ 的测量方程为

$$\begin{cases} z_{ijk}^c = \lambda_{ij} f_i + \delta_{ijk}, \\ E(\delta_{ijk}) = 0, Var(\delta_{ijk}) = \zeta_i^2, \\ i=1, \dots, 6, j=1, 2, 3, k=1, \dots, 13 \end{cases}$$

其精确解的因子得分如表 2。

利用(2.10)。计算 $f_i (i=1, \dots, 6)$ 的权重，结果列在表 3。

根据公式(2.3)，区域软实力得分的计算公式为

$$SF = 0.2319f_1 + 0.3422f_2 + 0.1108f_3 + 0.1234f_4 + 0.0954f_5 + 0.0967f_6 \quad (3.3)$$

为了使得分成为百分制，并且避免回归方程(2.1)中 $\log S_{t-1}$ 出现无意义的情况，我们把 SF 按照如下公

Table 2. Score of grade two
表 2. 二级指标的得分

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
2.6104	0.7089	1.9972	1.1951	0.4748	-0.9889
0.4648	0.4641	0.9307	0.8669	0.5503	0.2326
-1.4553	0.9768	-0.3752	-0.8151	-0.5194	0.0101
-0.7883	-0.7568	1.0086	1.2880	0.0715	-0.8083
0.3528	-0.3123	1.3510	0.8707	3.0149	1.6636
0.2064	0.0509	-0.4402	-0.1999	0.0500	0.2197
-0.3904	1.4873	-1.2642	-1.1263	-0.6308	1.9631
-0.5088	0.9656	-0.1516	-0.5096	-0.6011	-1.3110
-0.2975	-0.6028	-0.9780	-1.4651	-0.7035	0.8112
-0.4104	-1.1613	-0.4137	0.9512	-0.4838	-0.9518
0.9645	-0.8296	-0.1894	0.6971	-0.2646	0.0051
-0.0698	-1.8406	-0.5186	-1.0962	-0.2699	-0.3754
-0.6784	0.8499	-0.9564	-0.6569	-0.6884	-0.4700

Table 3. Two level index weight
表 3. 二级指标的权重

指标	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
$DS^{(i)}$	0.5903	0.8712	0.2820	0.3142	0.2429	0.2462
权重	0.2319	0.3422	0.1108	0.1234	0.0954	0.0967

Table 4. Evaluation results of regional soft power in 13 cities of Jiangsu Province in 2013
表 4. 2013 年江苏省 13 市区域软实力评价结果

城市	南京	无锡	徐州	常州	苏州	南通	连云港
得分	100	70.6	34.9	32.5	76.7	45	57.0
城市	淮安	宿迁	扬州	镇江	泰州	盐城	
得分	41.9	17.7	17.4	43.2	1	46.3	

式进行变换:

$$s_k = \left(0.01 + \frac{SF_k - \min_{1 \leq k \leq 13} \{SF_k\}}{d} \times 0.99 \right) \times 100, \quad k = 1, \dots, 13 \quad (3.4)$$

其中 $d = \max_{1 \leq k \leq 13} \{SF_k\} - \min_{1 \leq k \leq 13} \{SF_k\}$, $SF_k, k = 1, \dots, 13$ 是 SF 的第 k 个分量。每个城市的得分列在表 4。

然后根据《江苏省统计年鉴 2015》，得到 13 个城市 2014 年的生产总值、劳动力投入和居民储蓄总额。将这些数据应用到式(2.1)，得到最小二乘估计为

$$\hat{\beta}_0 = 1.0382, \hat{\beta}_1 = 0.3314, \hat{\beta}_2 = 0.6129, \hat{\beta}_3 = 0.0281$$

于是 Cobb-Douglas 生产函数的经验模型为

$$Q_t = 2.8241L_t^{1.3929}K_t^{1.8458}S_{t-1}^{1.0285} \quad (3.5)$$

4. 结论

我们给出了一个改进的 Cobb-Douglas 生产函数(1.2), 改进之处是在经典的 Cobb-Douglas 生产函数中加入区域软实力这个潜变量, 问题的关键是如何合理的度量区域软实力。本文利用了因子分析模型 L 来评估区域软实力指标的, 得到的经验模型(3.5)的决定系数 $R^2 = 0.9707$, 表明用劳动力、投入资金和区域软实力能够很好的解释生产总值, 因此改进的 Cobb-Douglas 生产函数(1.2)是合理的。

参考文献 (References)

- [1] Baltagi, B.H. and Pinnoi N. (1995) Public Capital Stock and State Productivity Growth: Further Evidence from an Error Components Model. *Empirical Economics*, **20**, 351-359. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01205444>
- [2] 马庆国, 楼阳生. 区域软实力的理论与实践[M]. 北京: 中国社会科学出版社, 2007.
- [3] 朱孔来, 郭春燕, 马金柱, 等. 区域软实力指标体系及量化测度的实证研究[J]. 软实力研究论丛, 2014(3): 83-92.
- [4] 林海明. 因子分析模型的改进与应用[J]. 数理统计与管理, 2009, 28(6): 998-1012.

期刊投稿者将享受如下服务:

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: sa@hanspub.org