Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2012, 1, 59-70**
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2012.12008 Published Online November 2012 (http://www.hanspub.org/journal/aam.html)

The Euler Implicit/Explicit Schemes with Nonconforming Finite Element Method of Subgrid Eddy Viscosity Type for the 2D Time-Dependent Navier-Stokes Equations*

Yingwen Guo, Minfu Feng

Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu
Email: guoyingwen6@sina.com

Received: Aug. 4th, 2012; revised: Aug. 20th, 2012; accepted: Aug. 21st, 2012

Abstract: In this paper, an Euler implicit/explicit scheme with nonconforming finite element method of subgrid eddy viscosity type for solving the 2D nonstationary incompressible Navier-Stokes equations under high Reynolds number Re is considered. The implicit/explicit scheme which is implicit for the linear terms and explicit for the nonlinear term, avoids the severely restricted time step size from stability requirement and results in a linear system with a same constant matrix at each level of time. The backward Euler scheme is used for time discretization. Crouzeix-Raviart nonconforming finite element approximation is used for the velocity and pressure field with the subgrid eddy viscosity technique, to cope with usual instabilities caused by Galerkin finite element methods. This paper also improved the restricted time step size which under stable conditions and given error estimates of velocity and pressure which independent on the viscosity ν.

Keywords: Euler Implicit/Explicit Schemes; Subgrid Eddy Viscosity Method; Nonconforming C-R Element

二维非定常 Navier-Stokes 方程的 Euler 隐/显格式子格涡旋粘性非协调有限元法*

郭英文，冯民富

四川大学数学学院，成都
Email: guoyingwen6@sina.com

收稿日期：*********

摘　要：本文研究了二维高雷诺数 Re 情形下，非定常不可压 Navier-Stokes 方程的 Euler 隐/显格式子格涡旋粘性非协调有限元方法。隐式处理线性项，避免了时间步长的苛刻限制，显式处理非线性项，使得对所有时间层求解时，系统矩阵为同一常数矩阵；时间项做向后 Euler 差分离散，空间用 C-R 非协调有限元逼近，构造子格涡旋粘性有限元方法，克服了在 Re 情形下 Galerkin 有限元方法的不稳定现象。本文改善了稳定性下对时间步长的限制，并给出了不依赖粘性系数 ν 的速度和压力误差估计。

关键词：Euler 隐/显格式；子格涡旋粘性法；非协调 C-R 元

1. 引言

不可压缩 Navier-Stokes 方程的相关理论及数值分析一直是计算流体力学和计算数学等领域研究的热点，至

*资助信息：国家自然科学基金 11271273/A011702 非定常 N-S 方程的稳定化有限元方法，冯民富四川大学主持。

今已有不少有限元方法、研究结果[1,2,3-5]。关于 Navier-Stokes 方程的有限元逼近，最常用的方法是混合有限元法。对高雷诺数情形下的非定常 Navier-Stokes 方程采用 Galerkin 混合有限元方法研究时，至少有以下四个问题需要考虑：

1) 为了保证速度和压力的数值解稳定，要求构造的有限元空间满足 inf-sup 条件[6]。

2) 因为高雷诺数情形下方程对流占优，所以即便采用 inf-sup 稳定的有限元空间组合，数值解仍会产生非物理震荡，需要考虑新的稳定化方法。

3) 非线性项的处理好坏将直接影响算法的效率和数值解的收敛，选择最优的处理格式成为必要。

4) 为达到工程对时间步长取值的需求并降低计算量，对时间变量的离散格式既要求计算简便，又得保证在稳定性下尽可能使时间取到大步长。

低阶元由于其计算方便，在工程应用方面有着重要意义。众所周知，传统的低阶协调 P_1-P_0， Q_1-Q_0 元不满足 inf-sup 条件，不能直接用于混合有限元法，往往需要加 bubble 函数或进行稳定化处理；相比之下，非协调 P_1-P_0 元满足 inf-sup 条件，具有局部守恒性，并且自由度取在边上，可以进行并行计算。正因如此，C-R[7]元目前在解决工程问题的混合有限元法中占据了重要的地位。但在高雷诺数情形下，即使对空间采用 inf-sup 稳定有限元逼近，方程的对流占优仍会使标准 Galerkin 混合法得到的数值解产生非物理震荡。

对于克服 Galerkin 混合法在求解对流占优问题时的不稳定性，目前已有一些有效的解决途径。经典的解决方法是人工粘性法(简称 AV 法)[8]，该方法具有良好的稳定性，但精度不高，且格式不相容。八十年代中期，Hughes 和 Brooks[9]提出了流线扩散法(简称 SD 方法)。SD 法具有良好的数值稳定性及高精度性，但该方法有以下两个方面的缺点：一方面为增加稳定性引入了其它关联项，且稳定化参数一般不易最优选取；另一方面为确保方法的相容性，添加项中含有二阶导数项，增加了计算量。近年来，一种基于人工粘性法发展起来的子格涡旋粘性法开始受到人们的关注。相比 SD 法，该方法具有良好的稳定性和高精度性，且格式简单，因此，子格粘性法近年来吸引了不少人们进行深入研究和应用。该法最早源于 Guermond 思想，他在[10]中提出了 Subgrid modeling 方法，通过 bubble 函数增强有限元空间，使得人工粘性项仅作用在 bubble 函数空间上。随后 Layton[11]将其思想进一步拓展，提出了子格粘性法，使得只在子格上增加粘性项，并针对定常对流扩散问题，用混合有限元法证明了该方法具有良好的稳定性，同时给出了最优误差估计。并且 John-Kaya[12,13]和 Kaya-Riviere[14]把该方法用于非定常 N-S 方程，Kaya-Layton[15]还基于此思想提出了一种新的稳定化技巧即变分多级方法。

由于时间离散和非线性项的处理，在提高计算效率方面有着重要的意义，因此需要研究恰当的处理格式，使得在保证稳定性下，既计算简便，又可取到大时间步长。目前，已有许多 Navier-Stokes 方程有效算法的研究。差分离散(如 Euler 离散或 C-N 离散等)由于可以有效回避时空有限元空间剖分维数增加所形成的困难，降低算法的复杂性和工作量，数值实现简便易行，成为解决非定常问题中时间项处理的常用方法。对于非线性项的处理，目前共有四种方法，即全隐格式，全显格式，半隐格式和隐/显格式[1,2,6,16]。其中全显式格式虽然简单，但由于其收敛性对时间步长的苛刻限制很少被人们使用；全隐格式虽是无条件收敛的，但需要在每一时间层求解非线性方程组，也不被人们看好；半隐格式，虽然几乎无条件收敛，但数值计算方面还存在一些缺陷。至于隐/显格式既不苛刻限制时间步长，又在每一时间层上线性方程组的系数矩阵为同一常数矩阵，提高了计算效率，该格式对线性项采用向后 Euler 隐式格式以改善格式的稳定性，对非线性项采用显式格式简化计算，因此得到人们的认可和研究。以往的数值分析结果认为对于隐/显格式，空间离散网格尺度和时间步长需要满足 CFL 条件，即 $\Delta t \le C_0 h^r$ 。最近何银年[1]对于二维 N-S 方程采用 Galerkin 混合有限元法，改善了上述收敛性条件，证明了隐/显格式数值方法是几乎无条件收敛的，即 $\Delta t \le C_0$ 。

本文针对二维高雷诺数情形下的非定常不可压 Navier-Stokes 方程，建立了基于非协调 C-R 元逼近的 Euler 隐/显格式子格涡旋粘性有限元方法，即时间变量采用向后 Euler 差分离散，空间变量采用非协调 C-R 元逼近，有效降低了算法的复杂性和工作量；隐式处理线性项，避免了时间步长的苛刻限制，显式处理非线性项，使得

对所有时间层求解时，系统矩阵为同一常数矩阵，既提高计算效率，并且可以在保证稳定性下取到大时间步长；稳定化方法采用子格涡旋粘性法，有效地克服了在 Re 情形下 Galerkin 混合有限元方法的不稳定现象，同时格式简单。本文对高雷诺数 $\mathrm{Re}=o\left(\nu^{-1}\right)$ 进行了修正，证明了该有限元格式是几乎无条件稳定的，并且改善了何银年[1]中的稳定性条件，使得时间步长不依赖于粘性系数 ν。同时，本文还给出了不依赖于粘性系数 ν 的速度和压力误差估计。

本文安排如下：第 2 节给出一些记号和预备知识；第 3 节建立非定常不可压 N-S 方程的 Euler 隐/显子格粘性非协调有限元格式；第 4 节给出格式的稳定性分析和解的存在唯一性证明；第 5 节得出不依赖粘性系数 ν 的速度和压力误差估计；第 6 节是结论。

2. 记号和预备知识

设 $\Omega\in\mathbb{R}^2$ 是边界 $\partial\Omega$ 为 Lipschitz 连续的凸多边形有界区域，文本考虑如下二维非定常不可压缩 Navier-Stokes 问题：求速度 $\boldsymbol{u}=\left(u_1\left(\boldsymbol{x},t\right),u_2\left(\boldsymbol{x},t\right)\right)$ 和压力 $p=p\left(\mathbf{x},t\right)$ 满足

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{u}_t-\nu\Delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\nabla p=\boldsymbol{f},\quad \text{in }\left(0,T\right]\times\Omega\\&\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0,\quad \text{in }\left(0,T\right]\times\Omega\\&\boldsymbol{u}=0,\quad \text{on }\left(0,T\right]\times\partial\Omega\\&\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{x},0\right)=\boldsymbol{u}_0\left(\boldsymbol{x}\right),\quad \text{in }\Omega\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x},t\right)=\left(f_1\left(\boldsymbol{x},t\right),f_2\left(\boldsymbol{x},t\right)\right)\in L^2\left(\Omega\right)^2$ 为给定体力，$\nu=\mathrm{Re}^{-1}\left(0<\nu\ll1\right)$ 是粘性系数，$T>0$ 为一有限时间，$\boldsymbol{u}_0\left(\boldsymbol{x}\right)\in H^2\left(\Omega\right)^2$ 是初始速度。

为解决问题(2.1)，引入如下 Hilbert 空间[6,12,17]：

$$X=H_0^1\left(\Omega\right)^2,\qquad Y=L^2\left(\Omega\right)^2,$$

$$Q=L_0^2\left(\Omega\right)=\left\{q\in L^2\left(\Omega\right);\int_\Omega q\mathrm{d}x=0\right\}.$$

对于空间 $L^2\left(\Omega\right)^d, d=1,2,4,$ 赋予 $L^2\left(\Omega\right)$-标量内积 $\left(\cdot,\cdot\right)$ 和 $L^2\left(\Omega\right)$-范数 $\|\cdot\|_0$；相应地，对于空间 $H_0^1\left(\Omega\right)$ 和空间 X，赋予通常内积 $\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=\left(\nabla\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{v}\right)$，和范数 $\|\boldsymbol{u}\|_X=\|\nabla\boldsymbol{u}\|_0=\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\right)^{1/2}$，同时我们定义 X 的闭子空间：$V=\left\{\boldsymbol{u}\in X;\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0\right\}$；$Y$ 的闭子空间：$H=\left\{\boldsymbol{v}\in Y;\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0;\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}=0\right\}$。此外，我们引入 Stokes 算子 $A=-P\Delta$，其中 P 为 $Y\to H$ 的 L^2-正交投影算子，A 的定义域为 $D\left(A\right)=H^2\left(\Omega\right)^2\cap V$。

对 $\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in X,\forall q\in Q$，我们分别定义 $X\times X$ 上的连续双线性型 $a\left(\cdot,\cdot\right)$，$X\times Q$ 上的连续双线性型 $d\left(\cdot,\cdot\right)$，以及 $X\times X\times X$ 上的三线性型 $b\left(\cdot,\cdot,\cdot\right)$ 为：

$$\begin{aligned}&a\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)=\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right),\ d\left(\boldsymbol{v},q\right)=\left(q,\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)\\&b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\right)=\left(\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\mathrm{div}\boldsymbol{u}\right)\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\right)-\frac{1}{2}\left(\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\right).\end{aligned}$$

对于上面定义的 $b\left(\cdot,\cdot,\cdot\right)$，我们有[3,17]：

1) 对 $\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in X: b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\right)=-b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}\right),$

$$b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\right)\le c\|\boldsymbol{u}\|_0^{1/2}\|\nabla\boldsymbol{u}\|_0^{1/2}\|\nabla\boldsymbol{v}\|_0\|\boldsymbol{w}\|_0^{1/2}\|\nabla\boldsymbol{w}\|_0^{1/2};$$

2) 对 $\forall\boldsymbol{u}\in X,\boldsymbol{v}\in D\left(A\right),\boldsymbol{w}\in Y$：

$$b\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\right)+b\left(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}\right)+b\left(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)\le c\|\nabla\boldsymbol{u}\|_0\|A\boldsymbol{v}\|_0\|\boldsymbol{w}\|_0.$$

于是，问题(2.1)的一个相应变分问题为：对 $\forall t\in\left(0,T\right]$，求 $\left(\boldsymbol{u},p\right)\in X\times Q$ 使得

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{v})+\nu a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+d(\boldsymbol{u},q)-d(\boldsymbol{v},p)=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}),\\
&\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x}),\forall(\boldsymbol{v},q)\in X\times Q.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

由文献[4]知，当 $\boldsymbol{f}\in L^\infty(0,T;H)$， $\boldsymbol{f}_t\in L^2(0,T;V')$， $\boldsymbol{f}(0)\in H,\boldsymbol{u}_0\in H^2(\Omega)^2\cap V$ 时，变分问题(2.2)存在唯一解 $(\boldsymbol{u},p)$，满足 $\boldsymbol{u}\in L^\infty\left(0,T;H^2(\Omega)^2\right)$， $p\in L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right)$。

3. Euler 隐/显子格涡旋粘性非协调有限元格式

对任给定的正整数 T，记 $t^n=n\Delta t,n=0,1,\cdots N$，其中 $N=T/\Delta t$， Δt 为时间步长。设 $h>0$ 是一网格参数，T_h 为区域 $\bar{\Omega}$ 的拟一致三角剖分，其中所有三角形单元 $K\in T_h$ 的直径 h_K 不超过 h。所有单元 K 的边界 E 的集合定义为 Γ_h， h_E 为边界 E 的长度， $\boldsymbol{n}_E$ 为边界 E 的外法向量， $P_n(K)$ 为单元 K 上次数小于或等于 n 的多项式空间。对于函数 φ，我们定义跳跃函数 $[\varphi]$ 为：$[\varphi]=(\varphi|_K)|_E-(\varphi|_{K'})|_E$。其中 E 为相邻单元 K 和 K' 的公共边界，特别地，在 $\partial\Omega$ 上我们定义 $[\varphi]=\varphi|_K$。

定义速度和压力的非协调有限元空间如下：

$$V_h=\left\{\boldsymbol{v}\in Y:\boldsymbol{v}|_K\in P_1(K)^2,\int_E[\boldsymbol{v}]\mathrm{d}s=0,\forall K\in T_h,E\in\Gamma_h\right\},Q_h=\left\{q\in Q:q|_K\in P_0(K),\forall K\in T_\mathrm{h}\right\}.$$

定义 V_h 上的内积 $(\cdot,\cdot)_h=\sum_{K\in T_h}(\cdot,\cdot)_K$，范数 $\|\cdot\|_{0,h}$，其中：$(\cdot,\cdot)_K$ 和 $\|\cdot\|_{0,k}=(\cdot,\cdot)_K^{1/2}$ 分别为 $L^2(K)$ 上内积和范数。同时定义 $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ 和 $\|\cdot\|_{0,E}=\langle\cdot,\cdot\rangle_E^{1/2}$ 为 $L^2(E)$ 上内积和范数。令

$$W_h=\left\{\boldsymbol{v}_h\in V_h;\nabla_h\cdot\boldsymbol{v}_h|_K=0,\forall K\in T_h\right\}.$$

因为 $V_h\not\subset X$，所以引进离散的双线性型 $a_h(\cdot,\cdot)$， $d_h(\cdot,\cdot)$ 的定义：

$$
\begin{aligned}
a_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)&=\sum_{K\in T_h}(\nabla_h\boldsymbol{u}_h,\nabla_h\boldsymbol{v}_h)_K,\forall\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h\in V_h+X\\
d_h(\boldsymbol{v}_h,q_h)&=\sum_{K\in T_h}(q_h,\nabla_h\cdot\boldsymbol{v}_h)_K,\forall\boldsymbol{v}_h\in V_h+\mathrm{X},\forall q_h\in Q_h;
\end{aligned}
$$

以及三线性 $b_h(\cdot,\cdot,\cdot)$ 的定义：$\forall\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{w}_h\in V_h+X$，

$$b_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{w}_h)=\frac{1}{2}\sum_{K\in T_h}\left(((\boldsymbol{u}_h\cdot\nabla_h)\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{w}_h)_K-((\boldsymbol{u}_h\cdot\nabla_h)\boldsymbol{w}_h,\boldsymbol{v}_h)_K\right),$$

其中梯度算子 ∇_h 和散度算子 $\nabla_h\cdot$ 满足 $(\nabla_h\boldsymbol{v}_h)|_K=\nabla(\boldsymbol{v}_h|_K),(\nabla_h\cdot\boldsymbol{v}_h)|_K=\nabla\cdot(\boldsymbol{v}_h|_K)$，即有：

$$
\begin{aligned}
&a_h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\ b_h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}),\\
&d_h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\ \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in X.
\end{aligned}
$$

为定义子格涡旋粘性法，我们现引入如下空间：

$$R_0=\left\{\boldsymbol{q}_h\in Y;\boldsymbol{q}_h|_K\in P_0(K)^2,\forall K\in T_h\right\},$$

同时定义 L^2-正交投影算子 $P_H:Y\to R_0$， $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}_h)=(P_H\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}_h),\forall\boldsymbol{p}\in Y,\boldsymbol{q}_h\in R_0$，则有

$$
\begin{aligned}
&\|P_H\boldsymbol{p}\|_{0,K}\le C\|\boldsymbol{p}\|_{0,K},\forall\boldsymbol{p}\in Y;\\
&\|\boldsymbol{p}-P_H\boldsymbol{p}\|_{0,K}\le Ch\|\nabla\boldsymbol{p}\|_{0,K},\forall\boldsymbol{p}\in H^1(\Omega)^2\cap Y.
\end{aligned}
$$

为后面稳定性和误差估计分析的需要，我们现给出以下三个性质：

(A1) 当 $\boldsymbol{u}_0\in D(A),\boldsymbol{f},\boldsymbol{f}_t,\boldsymbol{f}_{tt}\in L^\infty(0,T;Y)$ 时，则有(C 为正常数)

$$\|A\boldsymbol{u}_0\|_0+\sup_{0\le t\le T}\left\{\|\boldsymbol{f}(t)\|_0+\|\boldsymbol{f}_t(t)\|_0+\|\boldsymbol{f}_{tt}(t)\|_0\right\}\le C$$

(A2) 存在逼近 $I_h\boldsymbol{v}\in V_h$， $J_h p\in Q_h$ 满足对 $\forall \boldsymbol{v}\in X\cap H^2(\Omega)^2$， $\forall p\in Q\cap H^1(\Omega)$ 有[7]：

$$\left(q_h,\nabla\cdot I_h\boldsymbol{v}\right)_K=\left(q_h,\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)_K,\forall q_h\in Q_h,$$

$$\left(J_h p,\nabla\cdot\boldsymbol{v}_h\right)_K=\left(p,\nabla\cdot\boldsymbol{v}_h\right)_K,\forall\boldsymbol{v}_h\in V_h.$$

$$\left\|\boldsymbol{v}-I_h\boldsymbol{v}\right\|_{0,K}+h\left\|\nabla\left(\boldsymbol{v}-I_h\boldsymbol{v}\right)\right\|_{0,K}\le ch_K^2\left\|A\boldsymbol{v}\right\|_{0,K},\tag{3.1}$$

$$\left\|p-J_h p\right\|_{0,K}+h\left\|\nabla\left(p-J_h p\right)\right\|_{0,K}\le ch_K\left\|\nabla p\right\|_{0,K},\tag{3.2}$$

且有逆估计：

$$\left\|\nabla\boldsymbol{v}_h\right\|_{0,K}\le ch_K^{-1}\left\|\boldsymbol{v}_h\right\|_{0,K},\forall\boldsymbol{v}_h\in V_h$$

$$\left\|\boldsymbol{v}_h\right\|_{0,E}\le ch_E^{-1/2}\left\|\boldsymbol{v}_h\right\|_{0,K},\forall E\in\Gamma_h$$

(A3) 下列不等式成立：

$$\left\|\boldsymbol{v}\right\|_0\le r_0\left\|\nabla\boldsymbol{v}\right\|_0,\forall\boldsymbol{v}\in X;\left\|\boldsymbol{v}\right\|_{L^4}\le C_1\left\|\boldsymbol{v}\right\|_0^{1/2}\|\nabla\boldsymbol{v}\|_0^{1/2},$$

$$\left\|\boldsymbol{v}\right\|_{H^2}\le C_3\left\|A\boldsymbol{v}\right\|_0,\left\|\nabla\boldsymbol{v}\right\|_0\le r_0\left\|A\boldsymbol{v}\right\|_0,\forall\boldsymbol{v}\in D(A);$$

$$\left\|\boldsymbol{v}_h\right\|_{0,K}\le r_0\left\|\nabla\boldsymbol{v}_h\right\|_{0,K},\left\|\boldsymbol{v}_h\right\|_{0,2k,K}\le C_2\left\|\nabla\boldsymbol{v}_h\right\|_{0,K},\forall\boldsymbol{v}_h\in V_h.$$

其中 r_0,C_1,C_2 为仅依赖于区域 Ω 的正常数， C_3 为依赖于 Ω 和 ν 的常数。

于是变分问题(2.2)的非协调 Euler 隐/显子格粘性有限元格式为：求 $\left(\boldsymbol{u}_h^n,p_h^n\right)\in V_h\times Q_h$， 使得对任意 $n=1,2,\cdots,N$ 满足

$$\left(d_t\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{v}_h\right)_h+\nu a_h\left(\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{v}_h\right)+b_h\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1},\boldsymbol{u}_h^{n-1},\boldsymbol{v}_h\right)-d_h\left(\boldsymbol{v}_h,p_h^n\right)=\left(\boldsymbol{f}^n,\boldsymbol{v}_h\right)_h,\forall\left(\boldsymbol{v}_h,q_h\right)\in V_h\times Q_h\tag{3.3}$$

其中 $d_t\boldsymbol{u}_h^n=\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)/\Delta t$； $\boldsymbol{u}_h^0$ 为 $\boldsymbol{u}_0\in H^2$ 的 L^2-正交投影，即 $\left\|\boldsymbol{u}_h^0\right\|_{0,K}\le\left\|\boldsymbol{u}_0\right\|_{0,K}$； 双线性型 $M_h(\cdot,\cdot)$ 为

$$M_h\left(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h\right)=\sum_{K\in T_h}\left(\alpha\left(I-P_H\right)\nabla\boldsymbol{u}_h,\left(I-P_H\right)\nabla\boldsymbol{v}_h\right)_K,\forall\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h\in V_h;$$

I 为自映射，粘性参数 α 稍后给出定义。

因为 P_H 为 L^2-正交投影，所以对于 $\left\|\nabla\boldsymbol{v}_h\right\|_{0,h}>0$， $\forall\boldsymbol{v}_h\in V_h$ 有

$$\alpha\left\|\left(I-P_H\right)\nabla\boldsymbol{v}_h\right\|_{0,h}^2=\alpha\left(\left\|\nabla\boldsymbol{v}_h\right\|_{0,h}^2-\left\|P_H\nabla\boldsymbol{v}_h\right\|_{0,h}^2\right)=\alpha\left(1-\frac{\left\|P_H\nabla\boldsymbol{v}_h\right\|_{0,h}^2}{\left\|\nabla\boldsymbol{v}_h\right\|_{0,h}^2}\right)\left\|\nabla\boldsymbol{v}_h\right\|_{0,h}^2=:\alpha_{add}\left(\boldsymbol{v}\right)\left\|\nabla\boldsymbol{v}\right\|_{0,h}^2$$

且由 $0\le\left\|P_H\nabla\boldsymbol{v}_h\right\|_{0,h}\le\left\|\nabla\boldsymbol{v}_h\right\|_{0,h}$ 可得 $0\le\alpha_{\mathrm{add}}\left(\boldsymbol{v}_h\right)\le\alpha$ 。

4. 格式的稳定性分析及解的存在唯一性证明

下面我们对问题(3.3)的离散解的稳定性和存在唯一性进行分析和证明，设 C 为不依赖粘性系数 ν 的正常数，在不同的地方有不同的数值。

定义 4.1 我们定义修正的高雷诺数如下：

$$\mathrm{Re}_{\mathrm{red}}:=\left(\nu+\inf_{t\in(0,T]}\alpha_{\mathrm{add}}\left(\phi(t)\right)\right)^{-1},\forall\phi(t)\in X+V_h.$$

引理 4.1[18] 存在不依赖于 h 的正常数 β，使得

$$\inf_{q_h\in Q_h}\sup_{\boldsymbol{u}_h\in V_h}\frac{d_h\left(\boldsymbol{u}_h,q_h\right)}{\left\|\nabla\boldsymbol{u}_h\right\|_{0,h}\left\|q_h\right\|_{0,h}}\ge\beta.$$

定理 4.1 当 $\boldsymbol{f}\in\left(H^{-1}(\Omega)\right)^2$，时间步长 $\Delta t(>0)$ 满足

$$\Delta t\le\min\left\{1,\mathrm{Re}_{\mathrm{red}}^{-1}/G_h\right\},G_h=2^2\,\mathrm{Re}_{\mathrm{red}}c_0^2\kappa_1, \tag{4.1}$$

即 $\Delta t\le C_0\left(\Omega,\mathrm{Re}_{\mathrm{red}},\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{f}\right)$ 时，Euler 隐/显子格粘性非协调有限元问题(3.3)的解 $\left(\boldsymbol{u}_h^n,p_h^n\right)$ 具有如下稳定性估计：

$$\mathrm{Re}_{\mathrm{red}}^{-1}\left\|\nabla\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}^2\le\kappa_1, \tag{4.2}$$

$$\left\|\boldsymbol{u}_h^N\right\|_0^2+\mathrm{Re}_{\mathrm{red}}^{-1}\sum_{n=1}^N\Delta t\left\|\nabla\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}^2\le C\mathrm{Re}_{\mathrm{red}}\sum_{n=1}^N\left\|\boldsymbol{f}^n\right\|_{-1}^2\Delta t+\left\|\boldsymbol{u}_0\right\|_0^2. \tag{4.3}$$

其中 κ_1 为依赖于 $\left(\Omega,\mathrm{Re}_{\mathrm{red}},\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{f}\right)$ 的正常数，$\kappa_1\ge c_1^2\mathrm{Re}_{\mathrm{red}}^{-1}\left\|\nabla\boldsymbol{u}_0\right\|_{0,h}^2$。

证明：在(3.3)式中令 $\boldsymbol{v}_h=\boldsymbol{u}_h^n,q_h=p_h^n$，再等式左右两端同乘以 $2\Delta t$ 则有

$$\left(d_t\boldsymbol{u}_h^n,2\boldsymbol{u}_h\Delta t\right)_h+\nu a_h\left(\boldsymbol{u}_h^n,2\boldsymbol{u}_h\Delta t\right)+b_h\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1},\boldsymbol{u}_h^{n-1},2\boldsymbol{u}_h\Delta t\right)+M_h\left(\boldsymbol{u}_h^n,2\boldsymbol{u}_h\Delta t\right)=\left(\boldsymbol{f}^n,2\boldsymbol{u}_h\Delta t\right)_h \tag{4.4}$$

由等式 $2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{x}|^2-|\boldsymbol{y}|^2+|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2,\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$ 有

$$\left(d_t\boldsymbol{u}_h^n,2\boldsymbol{u}_h^n\Delta t\right)_h=\left\|\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}^2-\left\|\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right\|_{0,h}^2+\left\|d_t\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}^2(\Delta t)^2. \tag{4.5}$$

因为

$$\nu a_h\left(\boldsymbol{u}_h^n,2\boldsymbol{u}_h^n\Delta t\right)=2\Delta t\nu\sum_{K\in T_h}\left(\nabla\boldsymbol{u}_h^n,\nabla\boldsymbol{u}_h^n\right)_K=2\nu\left\|\nabla\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}^2\Delta t. \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}2\left|b_n\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1},\boldsymbol{u}_h^{n-1},\boldsymbol{u}_h^n\right)\right|\Delta t&=2\left|b_n\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1},\boldsymbol{u}_h^n,d_t\boldsymbol{u}_h\right)\right|(\Delta t)^2\le G^{1/2}\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\left\|\nabla\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}\left\|d_t\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}(\Delta t)^2\\&\le\left\|d_t\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}^2(\Delta t)^2+\frac{1}{4}G\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\left\|\nabla\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}^2(\Delta t)^2,\end{aligned} \tag{4.7}$$

其中 $G\left(\boldsymbol{u}_h^n\right)=2^2c_0^2\left\|\nabla\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}^2$.

$$M_h\left(\boldsymbol{u}_h^n,2\boldsymbol{u}_h^n\Delta t\right)=2\Delta t\alpha\left(\left(I-P_H\right)\nabla\boldsymbol{u}_h^n,\left(I-P_H\right)\nabla\boldsymbol{u}_h^n\right)_h=2\alpha_{\mathrm{add}}\left(\boldsymbol{u}_h^n\right)\left\|\nabla\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}^2\Delta t. \tag{4.8}$$

(4.4)式变形可得

$$\left(d_t\boldsymbol{u}_h^n,2\boldsymbol{u}_h\Delta t\right)_h+\nu a_h\left(\boldsymbol{u}_h^n,2\boldsymbol{u}_h\Delta t\right)+M_h\left(\boldsymbol{u}_h^n,2\boldsymbol{u}_h\Delta t\right)=\left(\boldsymbol{f}^n,2\boldsymbol{u}_h\Delta t\right)_h-b_h\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1},\boldsymbol{u}_h^{n-1},2\boldsymbol{u}_h\Delta t\right). \tag{4.9}$$

由(4.4)式右边可得

$$\left(\boldsymbol{f}^n,2\boldsymbol{u}_h^n\Delta t\right)_h\le\frac{C_1^2}{2}\left(\nu+\alpha_{\mathrm{add}}\left(\boldsymbol{u}_h^n\right)\right)^{-1}\left\|\boldsymbol{f}^n\right\|_{-1}^2\Delta t+\frac{3\left(\nu+\alpha_{\mathrm{add}}\left(\boldsymbol{u}_h^n\right)\right)}{4}\left\|\nabla\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}^2\Delta t. \tag{4.10}$$

结合(4.5)-(4.10)式得

$$\left\|\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}^2-\left\|\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right\|_{0,h}^2-\frac{1}{4}G\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\left\|\nabla\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}^2(\Delta t)^2+\frac{5}{4}\left(\nu+\alpha_{\mathrm{add}}\left(\boldsymbol{u}_h^n\right)\right)\left\|\nabla\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}^2\Delta t\le C_1^2\left(\nu+\alpha_{\mathrm{add}}\left(\boldsymbol{u}_h^n\right)\right)^{-1}\left\|\boldsymbol{f}^n\right\|_{-1}^2\Delta t$$

关于 n 从 1 到 N 求和，有

$$\left\|\boldsymbol{u}_h^N\right\|_0^2+\frac{5}{4}\sum_{n=1}^N\Delta t\mathrm{Re}_{\mathrm{red}}^{-1}\left\|\nabla\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}^2-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^N G\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\left\|\nabla\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}^2(\Delta t)^2\le C_1^2\sum_{n=1}^N\mathrm{Re}_{\mathrm{red}}\left\|\boldsymbol{f}^n\right\|_{-1}^2\Delta t+\left\|\boldsymbol{u}_h^0\right\|_0^2 \tag{4.11}$$

下面我们用数学归纳法证明(4.2)式和(4.3)式：

当 $N=0$ 时，由 $\left\|\boldsymbol{u}_h^0\right\|\le\left\|\boldsymbol{u}_0\right\|$ 可得两式显然成立；当 $N=1$ 时，因为 $G\left(\boldsymbol{u}_h^0\right)\Delta t\le G_h\Delta t\le\mathrm{Re}_{\mathrm{red}}^{-1}$，则显然有(4.2)式对 $N=1$ 成立。再把 $G\left(\boldsymbol{u}_h^0\right)\Delta t\le G_h\Delta t\le\mathrm{Re}_{\mathrm{red}}^{-1}$ 带入(4.11)式，则我们有(4.3)式也对 $N=1$ 成立；假设 $N=0,1,\cdots,J$ 时，(4.2)式和(4.3)式都成立，下证明两式当 $N=J+1$ 也成立。

我们由归纳假设和(4.2)式对 $N=0,1,\cdots,J$ 成立知， $G\left(\boldsymbol{u}_h^J\right)\Delta t = 2^2 c_0^2 \left\|\nabla \boldsymbol{u}_h^J\right\|_{0,h}^2 \Delta t \le 2^2 \mathrm{Re}_{\mathrm{red}} c_0^2 \kappa_1$ ，所以有 $G\left(\boldsymbol{u}_h^J\right)\Delta t \le G_h \Delta t \le \mathrm{Re}_{\mathrm{red}}^{-1}$ ，即

$$G\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\Delta t \le G_h \Delta t \le \mathrm{Re}_{\mathrm{red}}^{-1}, 1 \le n \le J+1. \tag{4.12}$$

由此当 $N=J+1$ 时，结合定义 4.1，(4.11)式和(4.12)式可得

$$\left\|\boldsymbol{u}_h^{J+1}\right\|_0^2 + \mathrm{Re}_{\mathrm{red}}^{-1} \sum_{n=1}^{J+1} \Delta t \left\|\nabla \boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}^2 \le C \mathrm{Re}_{\mathrm{red}} \sum_{n=1}^{J+1} \left\|\boldsymbol{f}^n\right\|_{-1}^2 \Delta t + \left\|\boldsymbol{u}_h^0\right\|_0^2 .$$

即有当 $N=J+1$ 时，(4.3)式成立。即由归纳假设可知，(4.3)式对 $\forall n$ 成立。

再由(4.3)式可得 $\mathrm{Re}_{\mathrm{red}}^{-1} \left\|\nabla \boldsymbol{u}_h^{J+1}\right\|_{0,h}^2 \le \kappa_1$ ，即当 $N=J+1$ 时，(4.2)式成立，则由归纳法可知，(4.2)式也对 $\forall n$ 也成立。

定理 4.2 Euler 隐/显子格粘性非协调有限元格式(3.3)存在唯一解 $\left(\boldsymbol{u}_h^n, p_h^n\right) \in V_h \times Q_h$ 。

证明：由于我们要讨论解 $\boldsymbol{u}_h^n, p_h^n$ 的存在唯一性，因此假定已求得 $\boldsymbol{u}_h^{n-1}$ 。首先证明(3.3)式中解的存在性：(3.3)式等价于

$$\left(\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{v}_h\right)_h + \nu a_h\left(\boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{v}_h\right) - d_h\left(\boldsymbol{v}_h, p_h^n\right) + d_h\left(\boldsymbol{u}_h^n, q_h\right) + M_h\left(\boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{v}_h\right) = \left(\boldsymbol{f}^n, \boldsymbol{v}_h\right)_h + \left(\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{u}_h^{n-1}, \boldsymbol{v}_h\right) + b_h\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}, \boldsymbol{u}_h^{n-1}, \boldsymbol{v}_h\right) \tag{4.13}$$

令

$$A\left(\boldsymbol{u}_h^n, p_h^n; \boldsymbol{v}_h, q_h\right) = \left(\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{v}_h\right)_h + \nu a_h\left(\boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{v}_h\right) + M_h\left(\boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{v}_h\right) - d_h\left(\boldsymbol{v}_h, p_h^n\right) + d_h\left(\boldsymbol{u}_h^n, q_h\right)$$

$$F\left(\boldsymbol{v}_h\right) = \left(\boldsymbol{f}^n, \boldsymbol{v}_h\right)_h + \left(\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{u}_h^{n-1}, \boldsymbol{v}_h\right) + b_h\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}, \boldsymbol{u}_h^{n-1}, \boldsymbol{v}_h\right)$$

则问题(4.13)即为线性问题：求 $\left(\boldsymbol{u}_h^n, p_h^n\right) \in V_h \times Q_h$ ，使得 $A\left(\boldsymbol{u}_h^n, p_h^n; \boldsymbol{v}_h, q_h\right) = F\left(\boldsymbol{v}_h\right)$ 。显然，F 是一个连续线性算子，由 Brouwer 不动点定理可知解存在。

下证明解的唯一性：假设 $\left(\boldsymbol{u}_h^{(1)n}, p_h^{(1)n}\right), \left(\boldsymbol{u}_h^{(2)n}, p_h^{(2)n}\right)$ 均为(4.13)式解，令 $\boldsymbol{E}_u^n = \left(\boldsymbol{u}_h^{(1)n} - \boldsymbol{u}_h^{(2)n}\right), E_p^n = \left(p_h^{(1)n} - p_h^{(2)n}\right)$ 则有

$$\left(\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{E}_u^n, \boldsymbol{v}_h\right)_h + \nu a_h\left(\boldsymbol{E}_u^n, \boldsymbol{v}_h\right) - d_h\left(\boldsymbol{v}_h, E_p^n\right) + d_h\left(\boldsymbol{E}_u^n, q_h\right) + M_h\left(\boldsymbol{E}_u^n, \boldsymbol{v}_h\right) = 0 \tag{4.14}$$

令 $\boldsymbol{v}_h^n = \boldsymbol{E}_u^n, q_h^n = E_p^n$ ，有 $\left\|\boldsymbol{E}_u^n\right\|_{0,h}^2 + \mathrm{Re}_{\mathrm{red}}^{-1}\Delta t \left\|\nabla \boldsymbol{E}_u^n\right\|_{0,h}^2 \le 0$ 。所以 $\boldsymbol{E}_u^n = 0$ ，即问题(3.3)的速度解唯一。再由引理 4.1 的 inf-sup 条件可知，问题(3.3)的压力解也存在且唯一。

5. 误差分析

引理 5.1[19] 存在正常数 C ，使得

$$\left|\int_E \varphi\left(v - \pi v\right)\mathrm{d}s\right| \le C h_E \left\|\nabla \varphi\right\|_{0,K} \left\|\nabla v\right\|_{0,K},$$

$$\left|\int_E \varphi\left(v - \pi v\right)\mathrm{d}s\right| \le C h_E^{1/2} \left\|\varphi\right\|_{0,E} \left\|\nabla v\right\|_{0,K}.$$

其中 π 为 $H^1(K) \to P_k(E)$ 上的 $L^2(E)$ 投影， $E \in \Gamma_h$ ， $\varphi \in H^1(K), v \in H^1(K)$ 。

引理 5.2 (Gronwall 引理)设 $C, \Delta t, a_n, b_n, c_n, d_n\ (n \ge 0)$ 是非负数，且满足

$$a_m + \Delta t \sum_{n=1}^{m} b_n \le \Delta t \sum_{n=0}^{m-1} a_n d_n + \Delta t \sum_{n=0}^{m-1} c_n + C, m \ge 1.$$

则 $a_m + \Delta t \sum_{n=1}^{m} b_n \le \left(\Delta t \sum_{n=0}^{m-1} c_n + C\right) \exp\left(\Delta t \sum_{n=0}^{m-1} d_n\right), m \ge 1.$

定理 5.1 设 $(\boldsymbol{u},p)\in\left(H^2(\Omega)^2\cap X\right)\times\left(H^1(\Omega)\cap Q\right)$ 为问题(2.1)的解，$\left(\boldsymbol{u}_h^n,p_h^n\right)\in V_h\times Q_h$ 为问题(3.3)的解，$\boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{u}_{tt},\boldsymbol{u}_{ttt}\in L^2\left(0,T;H^2(\Omega)^2\right),\boldsymbol{u}_0(x)\in H^2(\Omega)^2$，则存在不依赖粘性系数 ν 的正常数 C，当 $\Delta t\le C_0\left(\mathrm{Re}_{\mathrm{red}},\Omega,T,\boldsymbol{u}_0\right)$ 时，对 $\forall n=1,2,\cdots,N$,$(N=T/\Delta t)$ 有

$$\left\|\boldsymbol{u}_h^N-\boldsymbol{u}^N\right\|_0+\left(\mathrm{Re}_{\mathrm{red}}^{-1}\sum_{n=1}^{N}\Delta t\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}^n\right)\right\|_{0,h}^2\right)^{1/2}\le C\left(\mathrm{Re}_{\mathrm{red}},\Omega,T,\boldsymbol{u},p\right)\left(h+\Delta t+\alpha^{\frac{1}{2}}h\right)\tag{5.1}$$

证明： 令 $-\boldsymbol{e}^n=\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}^n=\left(\boldsymbol{u}_h^n-I_h\boldsymbol{u}^n\right)-\left(\boldsymbol{u}^n-I_h\boldsymbol{u}^n\right)=\theta_h^n-\eta^n$。已知在本方法中对 $\forall K\in T_h,E\in\Gamma_h$ 有 $\nabla q_h^n\big|_K=0$，$\Delta\boldsymbol{v}_h^n\big|_K=0,\left[\boldsymbol{u}^n\right]_E=0$。

由上知 $\boldsymbol{u}_h^n=\boldsymbol{u}^n+\theta_h^n-\eta^n$，则(3.3)式等价于

$$\begin{aligned}&\left(d_t\theta_h^n,\boldsymbol{v}_h\right)_h+\nu a_h\left(\theta_h^n,\boldsymbol{v}_h\right)+b_h\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{u}_h^{n-1},\boldsymbol{v}_h\right)+b_h\left(\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{v}_h\right)+M_h\left(\theta_h^n,\boldsymbol{v}_h\right)\\&=\left(f^n,\boldsymbol{v}_h\right)_h+\left(d_t\eta^n,\boldsymbol{v}_h\right)_h+\nu a_h\left(\eta^n,\boldsymbol{v}_h\right)+M_h\left(\eta^n,\boldsymbol{v}_h\right)+b_h\left(e^n,\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}_h\right)+b_h\left(\boldsymbol{u}_h^n,e^n,\boldsymbol{v}_h\right)+d_h\left(\boldsymbol{v}_h,p^n\right)-d_h\left(\boldsymbol{u}^n,q_h\right)\\&-\left(\left(\boldsymbol{u}(t_n)-\boldsymbol{u}(t_{n-1})\right)/\Delta t,\boldsymbol{v}_h\right)_h-b_h\left(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}_h\right)-\nu a_h\left(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}_h\right)-M_h\left(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}_h\right)\end{aligned}\tag{5.2}$$

又因为

$$\begin{aligned}&\left(f^n,\boldsymbol{v}_h\right)_h-\nu a_h\left(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}_h\right)-b_h\left(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}_h\right)+d_h\left(\boldsymbol{v}_h,p^n\right)-M_h\left(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}_h\right)-d_h\left(\boldsymbol{u}^n,q_h\right)\\&=\left(\boldsymbol{u}_t(t_n),\boldsymbol{v}_h\right)_h-\sum_{E\in\Gamma_h}\nu\left\langle\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{n}_E}(t_n),\boldsymbol{v}_h\right\rangle_E-M_h\left(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}_h\right)+\sum_{E\in\Gamma_h}\left\langle p^n\cdot\boldsymbol{n}_E,\boldsymbol{v}_h\right\rangle_E+\frac{1}{2}\sum_{E\in\Gamma_h}\left\langle\boldsymbol{u}^n\cdot\boldsymbol{n}_E\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}_h\right\rangle_E\end{aligned}\tag{5.3}$$

将(5.3)式带入(5.2)式，则有

$$\begin{aligned}&\left(d_t\theta_h^n,\mathbf{v}_h\right)_h+\nu a_h\left(\theta_h^n,\boldsymbol{v}_h\right)+M_h\left(\theta_h^n,\boldsymbol{v}_h\right)-b_h\left(e^n,\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}_h\right)-b_h\left(\boldsymbol{u}_h^n,e^n,\boldsymbol{v}_h\right)=-\left(d_t\boldsymbol{u}(t_n)-\boldsymbol{u}_t(t_n),\boldsymbol{v}_h\right)_h+\nu a_h\left(\eta^n,\boldsymbol{v}_h\right)\\&-b_h\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{u}_h^{n-1},\boldsymbol{v}_h\right)-b_h\left(\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{v}_h\right)+\left(d_t\eta^n,\boldsymbol{v}_h\right)+M_h\left(\eta^n,\boldsymbol{v}_h\right)-M_h\left(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}_h\right)+\sum_{E\in\Gamma_h}\left\langle p^n\cdot\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{n}_E\right\rangle_E\\&-\sum_{E\in\Gamma_h}\nu\left\langle\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{n}_E}(t_n),\boldsymbol{v}_h\right\rangle_E+\frac{1}{2}\sum_{E\in\Gamma_h}\left\langle\left(\boldsymbol{u}^n\cdot\boldsymbol{n}_E\right)\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}_h\right\rangle_E=-\left(R_1,\boldsymbol{v}_h\right)_h+\left(R_2,\boldsymbol{v}_h\right)_h+\left(R_3,\boldsymbol{v}_h\right)_h+\left(R_4,\boldsymbol{v}_h\right)_h.\end{aligned}\tag{5.4}$$

其中

$$\begin{aligned}&\left(R_1,\boldsymbol{v}_h\right)_h=\left(d_t\boldsymbol{u}(t_n)-\boldsymbol{u}_t(t_n),\boldsymbol{v}_h\right)_h+b_h\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{u}_h^{n-1},\boldsymbol{v}_h\right)+b_h\left(\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{v}_h\right),\\&\left(R_2,\boldsymbol{v}_h\right)_h=\left(d_t\eta^n,\boldsymbol{v}_h\right)_h+\nu a_h\left(\eta^n,\boldsymbol{v}_h\right)+M_h\left(\eta^n,\boldsymbol{v}_h\right),\\&\left(R_3,\boldsymbol{v}_h\right)_h=-\sum_{E\in\Gamma_h}\left(\nu\left\langle\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{n}_E}(t_n),\boldsymbol{v}_h\right\rangle_E\left\langle\left(\boldsymbol{u}^n\cdot\boldsymbol{n}_E\right)\boldsymbol{u}^n+\frac{1}{2},\boldsymbol{v}_h\right\rangle_E+\left\langle p^n,\boldsymbol{v}_h\cdot\boldsymbol{n}_E\right\rangle_E\right),\\&\left(R_4,\boldsymbol{v}_h\right)_h=-M_h\left(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}_h\right).\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{v}_h=2\theta_h^n\Delta t\in W_h$，代入(5.4)式中有

$$\begin{aligned}&\left\|\theta_h^n\right\|_{0,h}^2-\left\|\theta_h^{n-1}\right\|_{0,h}^2+\left\|d_t\theta_h^n\right\|_{0,h}^2\Delta t^2-2b_h\left(e^n,\boldsymbol{u}^n,\theta_h^n\right)\Delta t-2b_h\left(\boldsymbol{u}_h^n,e^n,\theta_h^n\right)\Delta t+2\Delta t\left(\nu+\alpha_{\mathrm{add}}\left(\theta_h^n\right)\right)\left\|\nabla\theta_h^n\right\|_{0,h}^2\\&\le-\left(R_1,2\theta_h^n\Delta t\right)_h+\left(R_2,2\theta_h^n\Delta t\right)_h+\left(R_3,2\theta_h^n\Delta t\right)_h+\left(R_4,2\theta_h^n\Delta t\right)_h\end{aligned}\tag{5.5}$$

下面我们估计等式(5.5)右边的每一项，因为

$$\boldsymbol{u}_t(t_n)-d_t\boldsymbol{u}(t_n)=\frac{1}{\Delta t}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\boldsymbol{u}_t(t_n)-\boldsymbol{u}_t(t_n)\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{\Delta t}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(t-t_{n-1}\right)\boldsymbol{u}_{tt}\mathrm{d}t$$

所以

$$\left(R_1,\boldsymbol{v}_h\right)_h=-\frac{1}{\Delta t}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(t-t_{n-1}\right)\left(\boldsymbol{u}_{tt}\left(t\right),\boldsymbol{v}_h\right)_h\mathrm{d}t+b_h\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{u}_h^{n-1},\boldsymbol{v}_h\right)+b_h\left(\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_h^n,\boldsymbol{v}_h\right)$$

则

$$\left\|R_1\right\|_{0,h}\le C\left(\Delta t\right)^{-1/2}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(t-t_{n-1}\right)^2\left\|\boldsymbol{u}_{tt}\right\|_0^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}+C\left(\left\|\nabla\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}+\left\|\nabla\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right\|_{0,h}\right)\left\|d_t\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}\Delta t$$

$$\begin{aligned}\left|-\left(R_1,2\theta_h^n\right)_h\Delta t\right|\le{}&\frac{C}{\nu+\alpha_{\text{add}}\left(\theta_h^n\right)}\Delta t^2\left\|\boldsymbol{u}_{ttt}\left(t_n\right)\right\|_{-1,h}^2+\frac{\nu+\alpha_{\text{add}}\left(\theta_h^n\right)}{12}\left\|\nabla\theta_h^n\right\|_{0,h}^2\Delta t+\left\|d_t\boldsymbol{u}_h^n\right\|_{0,h}^2\Delta t^2\\&+\left(G\left(\boldsymbol{u}_h^n\right)+G\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\right)\big/4\left\|\nabla\theta_h^n\right\|_{0,h}^2\Delta t^2\end{aligned}\tag{5.6}$$

下面估计(5.5)式右边的第二项，

$$\begin{aligned}&\left|\left(d_t\eta^n,2\theta_h^n\right)_h\right|\le C\left\|d_t\eta^n\right\|_{-1,h}\left\|\nabla\theta_h^n\right\|_{0,h}\le\frac{\nu+\alpha_{\text{add}}\left(\theta_h^n\right)}{12}\left\|\nabla\theta_h^n\right\|_{0,h}^2+\frac{C}{\nu+\alpha_{\text{add}}\left(\theta_h^n\right)}\left\|d_t\eta^n\right\|_{-1,h}^2\\&\left|\nu a_h\left(\eta^n,2\theta_h^n\right)+M_h\left(\eta^n,2\theta_h^n\right)\right|\le\frac{\nu+\alpha_{add}\left(\theta_h^n\right)}{12}\left\|\nabla\theta_h^n\right\|_{0,h}^2+2\left(\nu+\alpha_{\text{add}}\left(\eta^n\right)\right)\left\|\nabla\eta^n\right\|_{0,h}^2\end{aligned}\tag{5.7}$$

下面估计(5.5)式右边的第三项，由[20]知

$$\left|\sum_{E\in\Gamma_h}\nu\left\langle\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\boldsymbol{n}_E}\left(t_n\right),\theta_h^n\right\rangle_E\right|\le C\nu h\left\|A\mathbf{u}^n\right\|_{0,h}\left\|\nabla\theta_h^n\right\|_{0,h}\quad,\tag{5.8}$$

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{E\in\Gamma_h}\left\langle\left(\mathbf{u}^n\cdot\boldsymbol{n}_E\right)\mathbf{u}^n,\theta_h^n\right\rangle_E\right|\le Ch\left\|A\mathbf{u}^n\right\|_{0,h}^2\left\|\nabla\theta_h^n\right\|_{0,h},\tag{5.9}$$

$$\left|\sum_{E\in\Gamma_h}\left\langle p^n,\theta_h^n\cdot\boldsymbol{n}_E\right\rangle_E\right|\le Ch\left\|\nabla p^n\right\|_{0,h}\left\|\nabla\theta_h^n\right\|_{0,h},\tag{5.10}$$

$$\left|\left(R_3,2\theta_h^n\right)_h\right|\le\frac{\nu+\alpha_{\text{add}}\left(\theta_h^n\right)}{12}\left\|\nabla\theta_h^n\right\|_{0,h}^2+\frac{C}{\nu+\alpha_{\text{add}}\left(\theta_h^n\right)}h^2\left(\left\|A\boldsymbol{u}^n\right\|_{0,h}^4+\left\|\nabla p^n\right\|_{0,h}^2\right)\tag{5.11}$$

最后我们估计(5.5)式右边的第四项得

$$\left|\left(R_4,2\theta_h^n\right)_h\right|\le\alpha\left\|\left(I-P_H\right)\nabla\boldsymbol{u}^n\right\|_{0,h}\left\|\left(I-P_H\right)\nabla\theta_h^n\right\|_{0,h}\le\frac{\alpha_{\text{add}}\left(\theta_h^n\right)}{12}\left\|\nabla\theta_h^n\right\|_{0,h}^2+C\alpha h^2\left\|A\boldsymbol{u}^n\right\|_{0,h}^2\tag{5.12}$$

又因为

$$\begin{aligned}&-b_h\left(e^n,\boldsymbol{u}^n,2\theta_h^n\right)-b_h\left(\boldsymbol{u}_h^n,e^n,2\theta_h^n\right)=-b_h\left(\eta^n,\boldsymbol{u}^n,2\theta_h^n\right)-b_h\left(\boldsymbol{u}^n,\eta^n,2\theta_h^n\right)-b_h\left(\theta_h^n,\eta^n,2\theta_h^n\right)\\&-b_h\left(\eta^n,\eta^n,2\theta_h^n\right)+b_h\left(\theta_h^n,\boldsymbol{u}^n,2\theta_h^n\right)\le C\left(\left\|\nabla\boldsymbol{u}^n\right\|_{0,h}+\left\|\nabla\eta^n\right\|_{0,h}\right)\left\|\nabla\theta_h^n\right\|_{0,h}\left\|\theta_h^n\right\|_{0,h}\\&+C\left(\left\|\nabla\eta^n\right\|_{0,h}^2+\left\|\nabla\boldsymbol{u}^n\right\|_{0,h}\left\|\nabla\eta^n\right\|_{0,h}\right)\left\|\theta_h^n\right\|_{0,h}\le\frac{\nu+\alpha_{\text{add}}\left(\theta_h^n\right)}{12}\left\|\nabla\theta_h^n\right\|_{0,h}^2+\frac{C}{\nu+\alpha_{\text{add}}\left(\theta_h^n\right)}\left(\left\|\nabla\boldsymbol{u}^n\right\|_{0,h}^2+h^2\left\|A\boldsymbol{u}^n\right\|_{0,h}^2\right)\left\|\theta_h^n\right\|_{0,h}^2\\&+\frac{C}{\nu+\alpha_{\text{add}}\left(\theta_h^n\right)}\left\|\nabla\boldsymbol{u}^n\right\|_{0,h}^2\left\|\nabla\eta^n\right\|_{0,h}^2+\frac{C}{\nu+\alpha_{\text{add}}\left(\theta_h^n\right)}\left\|\nabla\eta^n\right\|_{0,h}^4\end{aligned}\tag{5.13}$$

将上面的式子代入(5.5)式，整理得

$$\begin{aligned}
&\left\|\theta_h^n\right\|_{0,h}^2-\left\|\theta_h^{n-1}\right\|_{0,h}^2+\frac{1}{2}\left(\nu-G\left(\boldsymbol{u}_h^n\right)\Delta t\right)\left\|\nabla\theta_h^n\right\|_{0,h}^2\Delta t+\frac{1}{2}\left(\nu-G\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\Delta t\right)\left\|\nabla\theta_h^n\right\|_{0,h}^2\Delta t+\frac{3}{2}\Delta t\left(\nu+\alpha_{\text{add}}\left(\theta^n\right)\right)\left\|\nabla\theta_h^n\right\|_{0,h}^2\\
&\le\frac{C}{\nu+\alpha_{\text{add}}\left(\theta_h^n\right)}\left\|d_t\eta^n\right\|_{-1,h}^2\Delta t+\Delta tC\alpha H^2\left\|A\boldsymbol{u}^n\right\|_{0,h}^2+4\left(\nu+\alpha_{add}\left(\eta^n\right)\right)\left\|\nabla\eta^n\right\|_{0,h}^2\Delta t+\frac{C}{\nu+\alpha_{\text{add}}\left(\theta_h^n\right)}\Delta t^2\left\|\boldsymbol{u}_{ttt}\left(t_n\right)\right\|_{-1,h}^2\\
&+\frac{C}{\nu+\alpha_{\text{add}}\left(\theta_h^n\right)}\left(\left\|\nabla\boldsymbol{u}^n\right\|_{0,h}^2+h^2\left\|A\boldsymbol{u}^n\right\|_{0,h}^2\right)\left\|\theta_h^n\right\|_{0,h}^2\Delta t+\frac{C}{\nu+\alpha_{\text{add}}\left(\theta_h^n\right)}h^4\left\|A\boldsymbol{u}^n\right\|_{0,h}^4\Delta t+C\left(\nu+\alpha_{\text{add}}\left(\theta_h^n\right)\right)\left\|A\boldsymbol{u}^n\right\|_{0,h}^2\Delta t\\
&+\frac{Ch^2}{\nu+\alpha_{\text{add}}\left(\theta_h^n\right)}\left(\left\|A\boldsymbol{u}^n\right\|_{0,h}^4+\left\|\nabla p^n\right\|_{0,h}^2\right)\Delta t
\end{aligned}$$

由(4.1)式和定理 4.1 可知

$$\mathrm{Re}_{\text{red}}^{-1}-G\left(\boldsymbol{u}_h^n\right)\Delta t\ge\mathrm{Re}_{\text{red}}^{-1}-G_h\Delta t\ge 0,\forall 0\le n\le N\,.$$

对 n 从1到 N 求和，则

$$\begin{aligned}
\left\|\theta_h^N\right\|_0^2+\frac{1}{2}\mathrm{Re}_{\text{red}}^{-1}\sum_{n=1}^{N}\Delta t\left\|\nabla\theta_h^n\right\|_{0,h}^2\le{}&C\mathrm{Re}_{\text{red}}h^4\left\|\boldsymbol{u}_t\right\|_{L^2\left(0,T;H^2(\Omega)^2\right)}^2\\
&+C\Delta t\sum_{n=1}^{N}\left(\mathrm{Re}_{\text{red}}+\mathrm{Re}_{\text{red}}h^2\right)\left\|\theta_h^n\right\|_{0,h}^2+C\mathrm{Re}_{\text{red}}\Delta t^2\left\|\boldsymbol{u}_{tt}\right\|_{L^2\left(0,T;H^2(\Omega)^2\right)}^2\\
&+C\mathrm{Re}_{\text{red}}h^2\left\|\boldsymbol{u}\right\|_{L^2\left(0,T;H^2(\Omega)^2\right)}^2+C\alpha H^2\left\|\boldsymbol{u}\right\|_{L^2\left(0,T;H^2(\Omega)^2\right)}^2\\
&+C\mathrm{Re}_{\text{red}}h^2\left\|p\right\|_{L^2\left(0,T;H^1(\Omega)^2\right)}+C\mathrm{Re}_{\text{red}}h^4\left\|\boldsymbol{u}\right\|_{L^2\left(0,T;H^2(\Omega)^2\right)}^4+\left\|\theta_h^0\right\|_{0,h}^2
\end{aligned}$$

由三角不等式，可知

$$\left\|\theta_h^0\right\|_{0,h}=\left\|\boldsymbol{u}_h^0-I_h\boldsymbol{u}^0\right\|_{0,h}\le\left\|\boldsymbol{u}_h^0-\boldsymbol{u}^0\right\|_{0,h}+\left\|\boldsymbol{u}^0-I_h\boldsymbol{u}^0\right\|_{0,h}\le\left\|\boldsymbol{u}_h^0-\boldsymbol{u}^0\right\|_{0,h}+Ch^2\left\|A\boldsymbol{u}^n\right\|_{0,h}$$

取 $\boldsymbol{u}_h^0$ 为 $\boldsymbol{u}_0$ 在 V_h 中的插值函数，即令 $\boldsymbol{u}_h^0=I_h\boldsymbol{u}_0$，则 $\left\|\boldsymbol{u}_h^0-\boldsymbol{u}_0\right\|_{0,h}\le Ch^2\left\|A\boldsymbol{u}_0\right\|_{0,h}$，$\left\|\theta_h^0\right\|_{0,h}\le Ch^2\left\|A\boldsymbol{u}_0\right\|_{0,h}$。使用离散的 Gronwall 不等式，则存在正常数 $C\left(\mathrm{Re}_{\text{red}},\Omega,T,\boldsymbol{u}\right)$ 使得

$$\left\|\theta_h^N\right\|_0^2+\frac{1}{2}\mathrm{Re}_{\text{red}}^{-1}\sum_{n=1}^{N}\Delta t\left\|\nabla\theta_h^n\right\|_{0,h}^2\le C\left(h^2+\Delta t^2+\alpha h^2\right)\tag{5.14}$$

又 $\left\|\eta^N\right\|_0^2+\frac{1}{2}\mathrm{Re}_{\text{red}}^{-1}\sum_{n=1}^{N}\Delta t\left\|\nabla\eta^n\right\|_{0,h}^2\le C\left(h^2+\Delta t^2+\alpha h^2\right)$，由三角不等式即可得(5.1)式。

定理 5.2 设 $\left(\boldsymbol{u}_h^n,p_h^n\right)\in V_h\times Q_h$ 为问题(3.3)的解，$\left(\boldsymbol{u},p\right)\in\left(H^2\left(\Omega\right)^2\cap X\right)\times\left(H^1\left(\Omega\right)\cap Q\right)$ 为问题(2.1)解，$\boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{u}_{tt},\boldsymbol{u}_{ttt}\in L^2\left(0,T;H^2\left(\Omega\right)^2\right),p\in L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega\right)\right)$，$\boldsymbol{u}\in L^\infty\left(0,T;H^2\left(\Omega\right)^2\right)$，则存在不依赖粘性系数 ν 的正常数 $\mathrm{C}\left(\mathrm{Re}_{\text{red}},p,T,\boldsymbol{u}\right)$，使得

$$\sum_{n=1}^{N}\Delta t\left\|p^n-p_h^n\right\|_{0,h}\le C\left(\Delta t^{3/2}+h\Delta t^{1/2}+\alpha^{1/2}h\Delta t^{1/2}+\alpha h\Delta t\right)\tag{5.15}$$

证明：对(2.1)式的第 n 层，两边同乘以 $\boldsymbol{v}_h\in V_h$，并在单元 K 上积分后运用 Green 公式，则我们可得

$$\left(\boldsymbol{u}_t\left(t_n\right),\boldsymbol{v}_h\right)_h+\nu a_h\left(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}_h\right)+b_h\left(\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{u}^n,\boldsymbol{v}_h\right)-d_h\left(\boldsymbol{v}_h,p^n\right)+d_h\left(\boldsymbol{u}^n,q_h\right)=\left(f^n,\boldsymbol{v}_h\right)_h+L_h\left(\boldsymbol{v}_h\right)$$

其中

$$L_h\left(\boldsymbol{v}_h\right)=\sum_{E\in\Gamma_h}\int_E\left(\nu\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{n}_E}\left(t_n\right)\boldsymbol{v}_h-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{u}^n\cdot\boldsymbol{n}_E\right)\boldsymbol{u}^n\boldsymbol{v}_h-p^n\left(\boldsymbol{v}_h\cdot\boldsymbol{n}_E\right)\right)\mathrm{d}s$$

结合(3.3)式，有

$$\begin{aligned}\left(J_h p^n - p_h^n, \nabla\cdot \boldsymbol{v}_h\right)_h &= \left(J_h p^n - p^n, \nabla\cdot \boldsymbol{v}_h\right)_h + \left(p^n, \nabla\cdot \boldsymbol{v}_h\right)_h - \left(p_h^n, \nabla\cdot \boldsymbol{v}_h\right)_h \\ &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}(t_n) - \frac{1}{\Delta t}\left(\boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{u}_h^{n-1}\right), \boldsymbol{v}_h\right)_h + \nu a_h\left(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{v}_h\right) \\ &\quad + b_h\left(\boldsymbol{u}^n, \boldsymbol{u}^n, \boldsymbol{v}_h\right) - b_h\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}, \boldsymbol{u}_h^{n-1}, \boldsymbol{v}_h\right) - M_h\left(\boldsymbol{u}^n, \boldsymbol{v}_h\right) - L_h\left(\boldsymbol{v}_h\right) \\ &\quad + \left(J_h p^n - p^n, \nabla\cdot \boldsymbol{v}_h\right)_h + M_h\left(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{v}_h\right) + \left(p^n, \nabla\cdot \boldsymbol{v}_h\right)_h\end{aligned}$$

由(5.8)，(5.10)式可得

$$\left|L_h\left(\mathbf{v}_h\right)\right| \le Ch\left(\left\|A\mathbf{u}^n\right\|_0^2 \left\|\nabla p^n\right\|_{0,h}\right)\left\|\nabla \mathbf{v}_h\right\|_{0,h} \tag{5.16}$$

结合(4.12)，(5.6)，(5.13)式，我们可知

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^n}{\partial t} - \frac{\boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{u}_h^{n-1}}{\Delta t}, \boldsymbol{v}_h\right) + a_h\left(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{v}_h\right) + b_h\left(\boldsymbol{u}^n, \boldsymbol{u}^n, \boldsymbol{v}_h\right) - b_h\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}, \boldsymbol{u}_h^{n-1}, \boldsymbol{v}_h\right) + M_h\left(\boldsymbol{u}_h^n, \boldsymbol{v}_h\right) \\ &\le C\Bigg(\Delta t\left\|\boldsymbol{u}_{ttt}(t_n)\right\|_{-1,h} + \nu\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}_h^n\right)\right\|_{0,h} + \left(\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}_h^n\right)\right\|_{0,h} + \left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}^{n-1} - \boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\right\|_{0,h}\right)\left(\left\|\boldsymbol{u}^n\right\|_0 + \left\|\boldsymbol{u}^{n-1}\right\|_0\right) \\ &\quad + \alpha\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}_h^n\right)\right\|_{0,h} + \alpha h\left\|A\boldsymbol{u}^n\right\|_0\Bigg)\left\|\nabla \boldsymbol{v}_h\right\|_{0,h}\end{aligned}$$

综上，对 n 从1到 N 求和，再由(5.1)式和 $\boldsymbol{u}^n$， p^n 的正则性，则存在不依赖粘性系数 ν 的正常数C，使

$$\sum_{n=1}^{N}\left(p^n - p_h^n, \nabla\cdot \boldsymbol{v}_h\right)_h \Delta t \le C\left(\Delta t^{3/2} + h\Delta t^{1/2} + \alpha^{1/2} h\Delta t^{1/2} + \alpha h\Delta t\right)\left\|\nabla \boldsymbol{v}_h\right\|_{0,h} \tag{5.17}$$

由引理 4.1 知

$$\left\|J_h p^n - p_h^n\right\|_{0,h} \le C \sup_{\forall \boldsymbol{v}_h \in V_h} \frac{\left|\left(\mathrm{div}\boldsymbol{v}_h, J_h p^n - p_h^n\right)_h\right|}{\left\|\nabla \boldsymbol{v}_h\right\|_{0,h}},$$

所以，利用三角不等式和(5.17)式，有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\Delta t\left\|p^n - p_h^n\right\|_{0,h} &\le \sum_{n=1}^{N}\Delta t\left\|J_h p^n - p_h^n\right\|_{0,h} + \sum_{n=1}^{N}\Delta t\left\|p^n - J_h p^n\right\|_{0,h} \le C\sum_{n=1}^{N}\Delta t \sup_{\forall \boldsymbol{v}_h \in V_h}\frac{\left|\left(\mathrm{div}\boldsymbol{v}_h, J_h p^n - p_h^n\right)_h\right|}{\left\|\nabla \boldsymbol{v}_h\right\|_{0,h}} + Ch\sum_{n=1}^{N}\Delta t\left\|\nabla p^n\right\|_0 \\ &\le C\left(\Delta t^{3/2} + h\Delta t^{1/2} + \alpha^{1/2} h\Delta t^{1/2} + \alpha h\Delta t\right)\end{aligned} \tag{5.18}$$

所以有(5.15)式的压力估计。

6. 结论

本文对高雷诺数情形下，非定常不可压 Navier-Stokes 方程采用 Euler 隐/显格式子格粘性方法，用非协调 C-R 元逼近，有效地克服了在 Re 情形下 Galerkin 混合有限元方法的不稳定现象，改善了稳定性下对时间步长的限制，给出了稳定性分析和不依赖粘性系数 ν 的误差估计。该有限元方法很容易推广到满足 inf-sup 条件的高阶有限元情况。

7. 致谢

非常感谢参考文献中作者的思想、结论对本文的启发和帮助，同时也非常感谢评审专家及编者对本文提出的宝贵意见。

参考文献 (References)

[1] Y. N. He. The euler implicit/explicit scheme for the 2D time-dependent Navier-Stokes equations with smooth or non-smooth initial data. Mathematics of Computation, 2008, 77(264): 2097-2124.
[2] L. G. Davis, F. Pahlevani. Semi-implicit schemes for transient Navier-Stokes equations and eddy viscosity models. Wiley InterScience, 2007: 1-20.
[3] J. Li, Y. He and Z. Chen. A new stabilized finite element method for the transient Navier-Stokes equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 197(1-4): 22-35.
[4] R. Temam. Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis. 2nd Edition, Philadelphia: SIAM, 1995.
[5] W. Layton, L. Tobiska. A two-level method with backtrackking for the Navier-Stokes equations. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1998, 35(5): 2035-2054.
[6] V. Girault, P. A. Raviart. Finite element method for Navier-Stokes equations: Theory and algorithms. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1987.
[7] M. Crouzeix, P. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations I. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 1973, 7(R3): 33-75.
[8] A. Quarteroni, A. Valli. Numerical approximation of partial differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1997.
[9] T. J. R. Hughes, A. N. Brooks. A multi-dimensional up-wind scheme with no crosswind Diffusion. In: T. J. R. Hughes, Ed., Finite element methods for convection domination flows. ASME Monograph AMD-34, 1979: 19-35.
[10] J.-L. Guermond. Stabilization of Galerkin approximation of transport equations by subgrid modeling. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 1999, 33(6): 1293-1316.
[11] W. Layton. A connection between subgrid scale eddy viscosity and mixed methods. Applied Mathematics and Computation, 2002, 133(1): 147-157.
[12] V. John, S. Kaya. A finite element variational multiscale method for the Navier-Stokes equations. SIAM Journal on Scientific Computing, 2005, 26(5): 1485-1503.
[13] V. John, S. Kaya. Finite element error analysis of a variational multiscale method for the Navier-Stokes equations. Advances in Computational Mathematics, 2008, 28: 43-61.
[14] S. Kaya, B. Riviere. A discontinuous subgrid eddy viscosity method for the time-dependent Navier-Stokes equations. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2005, 43(4): 1572-1595.
[15] S. Kaya, W. Layton. Subgrid-scale eddy viscosity methods are variational multiscale method. Tech. Report TR-MATH 03-05, University of Pittsburgh, 2003.
[16] J. G. Heywood, R. Rannacher. Finite-element approximations of the nonstationary Navier-Stokes problem, Part I: Regularity of solutions and second-order spatial discretization. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1982, 19(2): 275-311.
[17] R. Temam. Navier-Stokes equations: Theory and numerical analysis. 3rd Edition, Amsterdam: North-Holland, 1983.
[18] 王烈衡, 许学军. 有限元方法的数学基础[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
[19] V. John, J. Maubach and L. Tobiska. Nonconforming streamline-diffusion-finite-element-methods for convection-diffusion problems. Numerische Mathematik, 1997, 78: 165-188.
[20] Z. Cai, J. Douglas Jr. and X. Ye. A stable nonconforming quadric-lateral finite element method for the stationary Stokes and Navier-Stokes equations. Calcolo, 1999, 36: 215-232.

