

浅谈代数思维在小学数学教学中的渗透

高梦菊

安宁中学太平学校, 云南 昆明

收稿日期: 2024年3月12日; 录用日期: 2024年4月11日; 发布日期: 2024年4月18日

摘要

代数教学是中小学数学教学的重要衔接点之一, 一直以来也是许多学生难以突破的困难点。代数思维的早期训练可以有效帮助学生成功过渡小学到中学数学学习的关键阶段。但讨论小学代数教学应考虑数学教材中代数内容分布特点及小学不同学段的学生特点。本文将从小学不同学段学生实际学情出发, 分别给出几点代数思维的培养策略。

关键词

代数, 代数思维, 小学数学, 教学

On the Infiltration of Algebraic Thinking in Elementary Mathematics Teaching

Mengju Gao

Taiping Campus, Anning Middle School, Kunming Yunnan

Received: Mar. 12th, 2024; accepted: Apr. 11th, 2024; published: Apr. 18th, 2024

Abstract

Algebra teaching is one of the important links in mathematics teaching between primary and secondary school. It is a difficult point for most students to break through. The early training of algebraic thinking is an effective way to help students transfer from primary school to middle school in mathematics learning. However, before discussing elementary school algebra teaching, we should consider the distribution characteristics of algebraic content in mathematics textbooks and students' traits at different stages in primary school. This thesis is based on the actual learning situation among different phases of students in primary school and gives several strategies for

cultivating algebraic thinking.

Keywords

Algebra, Algebraic Thinking, Elementary Mathematics, Teaching

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 前言

代数思维因在中小学数学教学中被认为是数学的“核心思想”而占有重要的地位，近年来一直备受国内外众多学者的关注。1994年2月，全美数学教师理事会(NCTM)通过了关于“algebra for everyone”(为每个人的代数)的报告，报告中提出所有中学生都应该有机会学习代数的基本思想和方法。自此，美国人开始关注代数思维的教学研究。2000年美国颁布了《美国学校数学教育的原则和标准》[1]，其中建议在小学就引入代数相关内容。我国也在《义务教育课程标准》(2011年版)[2]小学“数与代数”的部分增加了负数的认识，运算律、式与方程、正反比例等代数内容。小学阶段在义务教育阶段时间最为漫长，长时间的算术思维训练，最容易忽视对小学生代数思维培养造成学生后期代数学习的困难。

针对这一问题，文[3]说道要解决好算术思维到代数思维的过渡问题教师要关注到这其中可能会遇到的问题，比如同一个符号在算术和代数中有着不同的意义、算术过渡到代数时运算客体的扩充、逆向思维惯性等。文[4]中提出要把握小学代数课程内容设计的阶段性、重视代数思维的早期渗透、将准变量思维作为算术思维与代数思维连接的桥梁、关注儿童用字母表示数的发展水平等。文[5]则给出了从算术思维到代数思维过渡的3个关键点，即“运算客体从具体数字到抽象符号”、“问题的解决方法从特殊到一般”、“两种思维的转变是从程序性思维到结构性思维”。

小学阶段的代数思维培养应关注到教材内容设置，小学不同学段学生的认知水平等因素，分学段来讨论具体教学策略。

2. 代数和代数思维

2.1. 算术与代数

2.1.1. 算术简述

算术是数学中最古老的内容，来源于人类的日常生活和生产实践经验的积累。在四大文明古国之一，同时也是数学最早的发源地之一的中国，大约在3000年前人们就已经知道自然数的四则运算，2500年前就已有九九(九九乘法表在古代称“九九”)。《孙子算经》中“一从十横，百立千僵，千十相望，万百相当”的计数法已经和现代所使用的位率相同。“算术”一词的引入是在《九章算术》中，书中涉及数的运算、方程、测量、面积、体积、勾股等算术、代数、集合初等数学知识。当时的算术泛指数学的全部，和现代算术有很大的不同。现代汉语词典对算术的定义是：数学的一个分支，是数学中最基础、最初等的部分。算术的基本对象是数，包括数的表示、数与数的关系、数的意义、数的运算等[6]。

2.1.2. 代数简述

1) 代数的发展

随着人类文明的发展，人们在算术中积累了关于各种数量问题的解法，而代数就在人类为了寻求更

简单的解决各种数量关系问题的解法时悄然出现。因此古代数学研究者普遍认为，“算术”与“代数”是相辅相成的。但随着学科分支的细化，算术与代数也被区分开来。

代数是代数学的简称，代数学的发展经历了三个阶段。修辞代数阶段(公元 250 年之前)，彼时还未有代数学之父丢番图用文字符号代表未知量，所以人们用简单的词语来表达和解决问题。半符号代数阶段(公元 250 年~16 世纪)，从数学家丢番图开始用字母表示未知量。但在这一阶段数学家们并未用字母去表达一般式。直到 16 世纪末韦达才开始用任意字母来表达未知量，才为方程一般解的表达式提供了可能。代数学也自此进入符号代数阶段并发展至今。

“代数”一词第一次出现是在公元 9 世纪阿拉伯数学家阿尔·花拉子米著的书名上，书名的阿拉伯文是 ‘ilm al-jabr wal muqabalah，翻译为《还原与对消的科学》。翻译时把“al-jabr”译为拉丁文“algebra”，英文译作“algebra”，被西方众多学者沿用至今。直至 1859 年，我国近代数学家李善兰才将“algebra”译成“代数”。之后清代学者华蘅芳和英国人傅兰雅合译英国瓦里斯的《代数学》时卷首写到“代数之法，无论何数，皆可以任何记号代之” [7]。

2) 代数的定义及其特点

代数被定义为“研究数、数量、关系、结构与代数方程(组)的通用解法及其性质的数学分支。代数的研究对象是各种抽象化的结构。”当然多数人更乐意将“代数”简单的理解为“用符号代替数字进行运算”，这种理解显然是片面的。尤塞斯金将代数从“一般化的算术”、“解决问题的过程的研究”、“数量间关系的研究”、“结构的研究”四个方面来刻画[8]。

关于代数的特点，一般认为代数有三个特点：其一是高度的抽象性，其二是应用广泛，第三是有助于培养思维的严密性[9]。

2.2. 算术思维与代数思维的区别

算术思维简单来说就是用条件推理出结果的思维，每一步都有思维根据[10]。代数思维就是指使用符号来代替具体数值进行思考的思维形式。

从思考的特点来看，算术的思考是过程性的，以得到正确答案为目的。该过程有三个特点，即情境性、特殊性和计算性。代数的思考更偏向关系性，其目的是为了寻找(一般化的)关系和结构建立数学模型。有结构化、符号化、抽象化及概括化的特点。

从数学思维的角度来看，算术思维注重“数量”的运算，是直观的；而代数思维更注重“符号”的运算，无法依赖直观。算术思维是程序性的，代数思维是结构性的[4]。

我们可以结合两种思维解决问题的过程图(见图 1 及图 2)和表 1 来看出两种思维的不同。

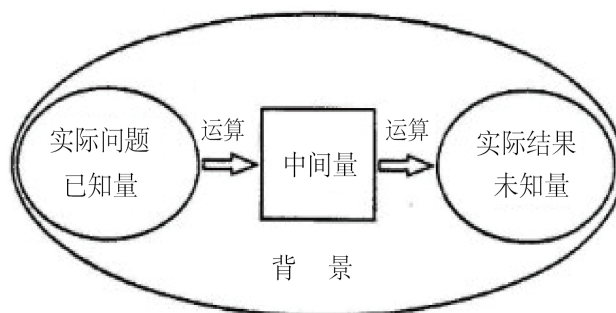


Figure 1. The model of arithmetic thinking to solve problems

图 1. 算术思维解决问题的模型

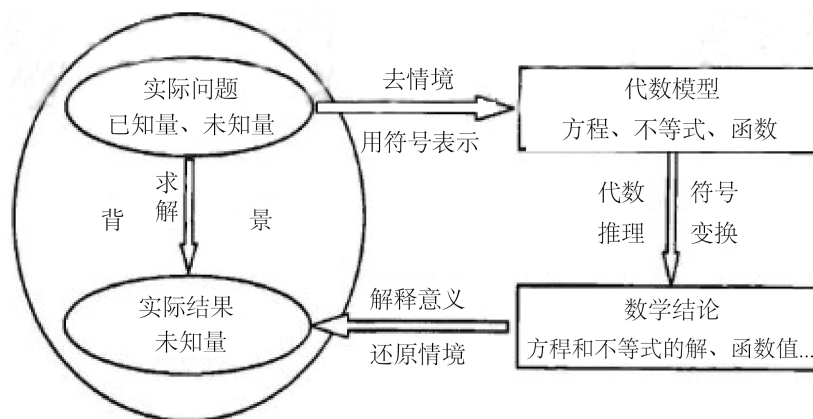


Figure 2. Algebraic thinking model for solving problems
图 2. 代数思维解决问题的模型

Table 1. Difference table between algebraic thinking and arithmetic thinking
表 1. 代数思维与算术思维区别表

算术思维	代数思维
通过已知量的运算得出未知的量	同时对已知量与未知量进行运算
通过一系列的、连续的运算得出答案	进行一系列的等价或者不等价的符号变换
未知量是暂时的，表示中间过程	未知量是设定的、固定的
方程(如果有的话)被看作是用于计算的公式， 或者是对数产生的一种描述	方程被看作是对不同量之间的某种关系的描述
中间量有明确的含义	中间量不一定有明确的含义

2.3. 小学阶段培养代数思维的必要性

2.3.1. 基于数学课程标准的要求

在《义务教育数学课程标准(2022 年版)》中也提出以数学核心素养为目标的课程体系，并明确指出数学核心素养包括以下三个方面：

- 1) 会用数学的眼光观察现实世界。在义务教育阶段，数学的眼光主要表现为抽象能力(包括符号意识、数感、量感)、几何直观、空间观念与创新意识；
- 2) 会用数学的思维思考现实世界。在义务教育阶段，数学思维主要表现为运算能力、推理意识或推理能力；
- 3) 会用数学的语言表达现实世界。在义务教育阶段，数学语言主要表现为数据意识或数据观念、模型意识或模型观念、应用意识。

数学思维是核心素养的重要体现，代数思维是其中一种。小学阶段代数思维的培养主要在抽象能力、推理意识和模型意识。这是因为代数思维的基本特征是符号化思想，而符号是在数的基础上进一步抽象的结果；同时，代数思维是一种符号化的推理过程，代数推理更具有一般性与普遍性；并且代数思维主要表现为解决问题时的模型建构，其实质是数学建模。由此可见，代数思维的培养与核心素养“三会”是一脉相承的。

2.3.2. 基于学生数学思维发展的需要

数学思维简单点来说就是用数学的方法去思考 and 解决问题的思维活动形式[11]。数学知识具有逻辑性

强、抽象性强的特点。这就要求学生拥有较强的数学思维能力，而代数思维是一种重要的数学思维方式。在初一学生中有这样一种现象：部分学生在小学阶段数学成绩名列前茅，却在初中以后遭遇数学学习的“滑铁卢”。这是为什么呢？多方调查显示这与小学阶段教师不注重学生代数思维训练是有一定关系的。小学阶段教师没有注意学生代数思维的发展，过分强调算术思维的训练，就会造成学生的思维跟不上中学数学的思维方式，从而导致数学成绩的下降。学生数学思维的培养同知识培养一样也应当是循序渐进，分学段逐渐深化的。

有教师认为小学一到四年级的学生认知水平处在具体运算阶段，而五、六年级的学生，他们的思维才是由具体到抽象的发展阶段，应当从这个阶段开始渗透代数的初级内容，而这一阶段的教学中刚好涉及式与方程这一重要代数内容。但事实上，如果教师只考虑从高年级才开始渗透代数思维，对于学生思维发展来说是不够的，学生到了中学以后仍然不会主动用代数思维来思考问题。小学生代数思维的渗透主要依赖“数与代数”部分的内容，这一部分内容贯穿小学的所有阶段。综上，小学生代数思维的渗透应自低年级起。

3. 小学生代数思维发展的制约因素

3.1. 制约因素分析

3.1.1. 学前潜在的算术思维

多项研究表明学生在进入小学之前其实已经具备了较强的算术思维，在掌握语言能力之前大多数幼儿对数量的理解能力就已经很强了。著名生物学家斯塔基就曾发现，尚在婴幼儿时期的孩子就会对黑色的圆点和一些图形敏感；6岁儿童对加法的认知要经过重要的三个阶段，即从数所有的数，到从第一个加数开始数，再到从加大的数开始数^[12]。小学数学学习的前期阶段学生也一直在学习算术知识，在解决问题时学生往往会下意识的使用算术的思维方式。到了小学高年级学生虽然有进行抽象符号的推理，但算术思维定式依旧会让学生在考虑问题时更多的使用算数思维。

3.1.2. 代数思维本身的抽象性

数学学习就是一个不断抽象的过程，而代数思维最重要的一个特性就是抽象性。数的认识，是数学抽象的开始，从实际的情境中抽象出数字表达；数的运算，从复杂庞大的数学计算中总结出了一般化的规律。对代数思维而言，符号的加入是其与众不同的地方。当然代数思维绝不是简单的符号游戏，学生需要理解其内在的数量关系和结构，要理解符号的意义、会进行符号之间的运算、用符号进行表示、用符号解决问题……对抽象之又抽象的数学符号的理解和应用对学生而言是一道难以逾越的鸿沟。

3.1.3. 教师传统教育思想的制约

教师的教育思想观念直接影响学生的学习，在小学教师存在的一些传统的教育思想上就是小学阶段代数思维培养的劲敌。

① 双减之后小学第一学段无书面作业，到第二、三学段为快速提升成绩部分教师仍然采用“题海战术”，忽视对学生思维的培养。

② 教师教学思想更新不及时，教学方法老旧。尤其是在一些农村小学，学生基础相对较差，在传统教学模式下学生被动的接受知识不去主动思考，难以形成自己的思维方法。

③ 教师对代数思维的理解模糊、片面，对代数思维教学的理解，要么仅限于符号的引入等零碎的知识点，要么存在“代数即方程”的错误认知^[13]。

3.1.4. 教师缺乏数学教学全局化意识

在小学课堂教学中，绝大部分教师不会有意识的对高年级知识进行“预教”，往往只着眼于目前进

行的教学内容，也有部分教师会在习题部分等设置悬念，为下一节课的教学铺垫，但这种铺垫往往只针对知识本身，对学生思维的培养并无多大的助益。当然这里所说的“预教”，绝不是让教师把初中的知识提前拿到小学来学，而是指对更高层次的思维、方法的提前训练。学生学习的知识可能会被遗忘，但数学思维方法不会。就拿算术思维到代数思维的过渡来说，如果中小学教师在教学中都具备全局化意识，能够在小学就对学生的思维过渡做好“预教”，对学生在初中的代数学习一定大有裨益。

4. 代数思维在小学数学教学中的渗透

我国的小学并没有统一的教材，不同版本教材的编写虽然均依据大纲编写但还是有所不同，就“数与代数”部分内容的设置上来看，在人教版教材中，一些代数的初步知识：用字母表示数、式与方程、正反比例等内容被安排在了五、六年级。反观北师大版教材中四年级就涉及到“生活中的负数”。而苏教版的教材虽然也从五年级才开始有代数相关知识，但在内容的分布上，从五年级开始每一册教材上都分布有代数内容。本文将主要参照人教版小学教材针对不同学段(即《义务教育课程标准》(2022年版)中划分的三个学段，第一学段(1~2年级)，第二学段(3~4)年级，第三学段(5~6)年级)，给出几点教学建议。

4.1. 代数思维在小学一、二学段中的渗透

虽然在小学一、二学段的教学内容中没有正规地涉及到有关“用字母表示数”及“方程”等代数相关内容，但并不代表在小学一、二学段不可以进行代数知识的初期渗透。事实上教学的编排呈螺旋上升趋势，在小学一、二学段年级中同样可以找寻到代数的痕迹。

4.1.1. 打“基础”，培“数感”

代数本身就是由算术发展起来的，要想学好代数，算术基础是不可忽视的因素。在我国，小学代数学习之所以较为困难有很大一部分原因就是学生的算术基础薄弱，导致教师不敢轻易在教学中引入代数初步知识。在正式代数内容开始之前，首先要做的一件事就是打好学生的算术基础，培养学生的“数感”。学生“数感”的培养既是《课标》的要求也是学生应当具备的数学素养之一。数感的培养方式是多样化的，比如从加法表里培养数感，发展低年级学生的运算能力，同时引导学生发现加法表中竖排、横排、斜排的规律，及三者之间的相同点和不同点[14]。再比如三个连续数之间的表示，可以引导学生从“1, 2, 3”到“1, 1+1, 1+1+1”，那么顺利过渡到任意几个连续数的表示是“n, n+1, n+2”也就变得不再困难了。

4.1.2. 充分挖掘教材里蕴藏的代数思维“雏形”

在小学一、二学段教学中可用于代数知识初期渗透的实例并不少，比如：

1) 方程意识的初步培养——等式

例 1 [15]：在“□”里填上合适的数(见图 3)。

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{9} & 8 + \square = 12 & 7 + \square = 16 & 9 + \square = 13 \\ & 6 + \square = 15 & 8 + \square = 11 & 7 + \square = 14 \end{array}$$

Figure 3. Fill in the appropriate number in “□”

图 3. 在“□”里填上合适的数

师：8 + 几 = 12 呢？说说你是怎么想的？

预设：生 1：8 再往下数 4 个数是 12，所以 $8 + 4 = 12$ 。

生 2: 8 和 2 组成 10, $10 + 2 = 12$, $2 + 2 = 4$, 所以“□”里的数是 4。

生 3: $12 - 8 = 4$, 所以“□”里填 4。

对于一年级新生来说这类题很有教学价值, 能让学生认识到“□”代表一个数, 可渗透用字母表示数的意识, 又是“凑十法”的逆用。第 2 种解法若表示为 $(8 + 2) + 2 = 10 + 2$, 实际上就是等式性质的初步, 第 3 种解法如果脱离“加数 = 和 - 另一个加数”的算术原理使学生逐步认识到 $\square = 4$, 这不就是真正的代数吗?

2) 直观代数推理的渗透

例 2 [16]: 一口平底锅每次最多只能烙 2 张饼, 两面都要烙, 每面 3 分钟。多长时间可以烙完一张饼? 如果要烙 2 张饼、3 张饼、4 张饼……呢?

饼数(张)	烙饼方法	烙的次数	所用最短时间(分)
2	2张同时烙	2	$2 \times 3 = 6$
3	轮换烙	3	$3 \times 3 = 9$
4	2, 2	4	$4 \times 3 = 12$
5	2, 3	5	$5 \times 3 = 15$
6	2, 2, 2	6	$6 \times 3 = 18$
7	2, 2, 3	7	$7 \times 3 = 21$
8	2, 2, 2, 2	8	$8 \times 3 = 24$
9	2, 2, 2, 3	9	$9 \times 3 = 27$
10	2, 2, 2, 2, 2	10	$10 \times 3 = 30$
.....

Figure 4. The pancake problem

图 4. 烙饼问题

教学中部分教师会利用图 4 中表格引导学生找出规律, 得出“烙饼所用最短时间: 单面时间 \times 张数”的结论, 而后提问: 请快速说出烙 20 张、50 张、101 张饼所用最短时间。这时候教师不妨大胆地提问: n 张饼所需最短时间? 这样学生不仅能够进一步理解烙饼所用最短时间与张数之间的关系, 还直观地引导学生进行代数思维。

3) 用字母表示运算定律

例 3 [17]: 教学示例: 用符号表示加法结合律(见图 5)

你能用符号表示加法结合律吗?

$$(\triangle + \star) + \circ = _ + (_ + _)$$

$$(a+b)+c = _ + (_ + _)$$

做一做

① 根据加法交换律填空。

$$300+600 = 600+_ \quad _+65 = 65+35$$

$$78+_ = 43+_ \quad a+12 = 12+_$$

Figure 5. Teaching material presentation of Operation Law (part)

图 5. 《运算定律》教材展示(部分)

教学中教师通过启发学生分别用符号、字母表示加法结合律, 然后引导学生用符号、字母表示表示

加法交换率。这部分内容是教材中第一次出现用字母表示运算定律，也是学生学习和认识数学的一次大的飞跃，在教学中要善用这一渗透点培养学生的符号意识。到了乘除法的运算定律学习时就可以用类推的思想方法引导学生用字母去表示了。

4.1.3. 生活情境助推代数思维培养

杜威曾说“教育即生活”。小学生学习数学知识往往会利用已有的生活经验，当然在学校学习的数学也是与他们的生活息息相关的数学现象，学生的学习都是现实的数学世界出发，与教学相容后建构成为自己的数学知识，也就是将生活“数学化”。在代数思维的培养中借助学生的生活经验可以让代数变得更为直观，具体。文[18]中提出了“生活化孕育——用经验链接学生的代数学习”、“情境迁移——用经验启发学生的代数学习”和“反思提升——借经验助推学生的代数学习”3种策略，增强学生对数学符号意义的理解和运用能力[18]。使得学生的生活经验对学生的代数思维培养起到助推作用。

4.1.4. 变式训练强化代数思维初步培养

学生数量关系的练习题里，可以适当增加变式题组训练，让学生在训练中体会数量关系的多种表达形式，增强学生思维的灵活性，深化学生对等式性质的初步理解，培养对代数思维培养来说至关重要的一项能力——逆向思维能力。为后期代数思维的培养打下良好的基础。比如：

变式一

$$\begin{array}{cccc} 8 + () = 15 & 40 + () = 67 & 100 - () = 77 & () + 15 = 27 \\ 15 - () = 8 & 67 - () = 40 & () + 77 = 100 & 27 - () = 15 \end{array}$$

这类题不但能帮助学生理解加法和减法的含义，还能锻炼学生的逆向思维能力。等号的两边不是简单的单向运算，一个等式成立意味着左边等于右边，此运算它可逆。减法和加法是两个互逆运算，除法和乘法(乘除法也可增加此类变式训练)是两个互逆运算。这样的对逆向思维的基础认知是可以对代数思维的培养起到助推作用的，后期的方程、分数运算等均需要这种逆向思维。

变式二

$$\begin{array}{cc} 3 + 5 = () + 2 & 7 + 5 = 6 + () \\ 30 + () = () - 30 & 24 - () = 24 + () \\ 18 + () = () + 12 = 26 - () = 14 + 6 = 48 - () \end{array}$$

变式二的训练是让学生更深刻的感悟“等式”的性质，理解“等号”的意义，播撒下关系性思维的种子。

变式三

“有20只绵羊在山坡上吃草，走了9只，问还剩几只绵羊？”这一类型的问题可以改为“山坡上有20只绵羊在吃草，走了一些，还剩下11只，问走了几只绵羊？”。

变式三的应用题，前一个题学生很容易就能列出算式“ $20-9$ ”进而算出答案，改编之后学生需要将思考转变为 $20-?=11$ ，这就是简单“方程问题”的初步。

总之，对于中低年级学生代数思维的培养教师要考虑到中低年级学生的思维发展特点，年龄特征和思维水平等因素。在实际教学中要意识的对学生进行代数思维的培养，善于钻研教材，选择好渗透代数思维的内容与时机。

4.2. 小学第三学段学生代数思维培养途径

人教版小学数学教材从五年级上册起，依次安排了以下代数内容见表2。

有了正式的代数内容，教学目标也相对明确，高年级的代数思维的渗透就可以依据教学内容来开展了。但在高年级代数思维的培养中还有几点值得注意：

Table 2. The people's education press mathematics textbook elementary school algebra content arrangement distribution table**表 2.** 人教版数学教材小学代数内容安排分布表

五年级上册	六年级上册	六年级下册
第四单元 简易方程 1) 用字母表示数 2) 方程的意义 3) 等式的性质 4) 解简易方程 5) 实际问题与方程	第四单元 比 1) 比的意义 2) 比的基本性质 3) 比的应用	第一单元 负数 1) 认识复数 2) 解决问题 第四单元 比例 1) 比例的意义 2) 比例的基本性质 3) 解比例 4) 正比例和反比例

4.2.1. 要明确算术思维与代数思维的关系

算术思维是代数思维形成的前提，学生代数思维的培养需要有一定程度的算术思维的积累。当算术思维的积累达到一定程度必然会向代数思维过渡，但算术到代数之间思维的过渡不是简单的量变过程。它是“从数字到符号”“从程序到结构”尤其是“从特殊到一般”的转变，所以在此过程中一定要明确两者之间的区别和联系，并合理利用减少学生过渡时的困难。比如解应用题时将算术法与代数法同时使用，进行对比，可使学生体会到代数思维解题的优越性。

例 4: AB 两地相距 275 km, 已知甲乙两车的速度分别为 50 km/h 和 75 km/h。甲车从 A 地出发前往 B 地, 1 h 后乙车从 B 地出发返回 A 地, 请问甲车出发多久后与乙车相遇?

(一) 算术解法

$$\textcircled{1} (275 - 50) \div (75 + 50) = 1.8(\text{h})$$

$$\textcircled{2} 1 + 1.8 = 2.8(\text{h})$$

(二) 代数解法

解: 设甲车出发 x 时后与乙车相遇。

$$50x + 75(x - 1) = 275$$

$$125x = 350$$

$$x = 2.8$$

对于例题 4, 用方程解题。学生只需要找到“甲车路程+乙车路程=AB两地距离”这一等量关系就可以轻松列出方程求解。教学中教师可要求学生同时用两种方法解题, 引导学生对比两种方法的优劣。

4.2.2. 要关注学生代数推理能力的发展

小学为何也要培养学生的推理能力呢? 推理是数学的基本思维方式, 包括合情推理和演绎推理, 两种推理功能不同, 前者用于探索思路, 发现结果, 后者用于证明结论[2]。发展学生的推理能力是《课标》中的要求, 也是学生学习和生活中的必要。但学生的推理能力的发展不可能一蹴而就, 需要教师在日常教学活动中逐步培养。《课标》中对于数学核心素养的培养要求小学阶段培养推理意识。从小学阶段就开始培养代数推理能力, 能减少学生将来代数学习的困难。学生推理能力的培养可从以下 2 点出发:

① 教学设计中引导学生参与“猜想-证明”的过程来培养学生的推理能力。比如: 在四年级《商的变化规律》的教学中改变引入方式, 让学生类比于“积的变化规律”猜测商的变化规律再引导学生去证明。通过这一过程培养学生推理能力。

② 将传统算术问题合理改编转化成培养学生代数推理能力的材料[19]。

例 5: 4 个人两两握手, 一共握手多少次? 5 个人呢? n 个人呢? $n+1$ 个人呢?

Table 3. Handshake problem guide table

表 3. 握手问题引导表

人数	2	3	4	5	...	n	$n+1$
握手次数	1	$1+2$	$1+2+3$	$1+2+3+4$...	$1+2+3+\dots+(n-1)$	$1+2+3+\dots+n$

如例 5 的握手问题就可用作引导学生推理 $1+2+3+4+\dots+\dots+n$ 的计算公式(见表 3)。

4.2.3. 要提高学生的数学阅读能力

提高学生的数学阅读能力是增强学生数学素养的关键, 而在这里我所说的学生的数学阅读能力实际上指的是学生对抽象的数学符号的理解能力。也就是《课标》所提出的几个核心素养之一——符号意识。代数思维正是通过运用符号系统来简化数学运算和推理的过程。上一节中分析过, 对符号的理解和应用是小学生代数学习的一大难点。因此, 提高学生的数学阅读能力尤其是学生对抽象的数学符号的理解能力是培养小学生代数思维意识的重要途径。对于学生符号意识的培养, 教师需要从教学的点滴开始有意识的培养, 包括生活中的符号、运算符号等等, 也要注意同一符号在算术与代数中表示的不同意义, 及时的帮助学生理清其中的关系, 为学生后期代数学习做好铺垫。

4.2.4. 培养数学建模能力

模型思想是学生数学学习的重要思维方式和学习方式, 是重要的数学思想之一, 培养数学模型思想也是《课标》中的要求。从图 6 我们可看出数学建模要依托数学符号、不等式、函数等完成, 也就是说学生进行数学建模的过程需要进行代数思维。那么在高年级教学中教师就可通过培养学生的数学建模能力来达到培养代数思维的目的, 同时通过代数思维训练也可以帮助学生提升数学建模能力。高年级教师可通过方程和正比例关系, 反比例关系的应用题来培养学生的数学建模能力, 渗透代数思维。

建立和求解模型的过程包括:

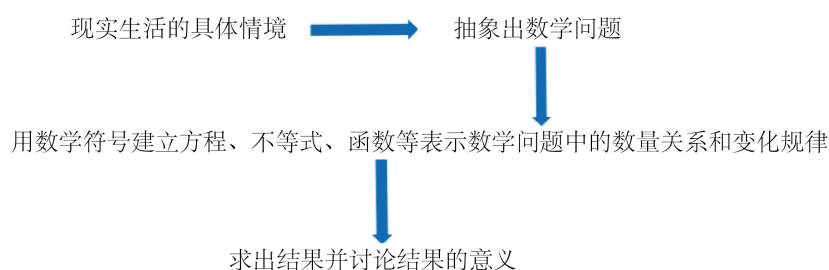


Figure 6. Schematic diagram of the process of establishing and solving models

图 6. 建立和求解模型的过程示意图

5. 结语

学生从“数”过渡到“代数”, 是要以丰富的生活经验和数学经验为基础, 在活动、感悟、体验的不断“浸泡”中逐步建立、形成、强化和发展起来的, 非一朝一夕就能成就的。小学数学教师的任务是找到学生的起点, 找准他们的发展点。需要聚焦关键问题, 引导学生逐步走向抽象思维。需要坚持沿着“形象→表象→抽象→表象→形象”的轨迹不断循环。在这个过程中, 学生的代数思维就会由弱到强、

由低到高不断提升, 为他们的未来生活和学习打下坚实的基础。

参考文献

- [1] 全美数学教师理事会. 美国学校数学教育的原则和标准[M]. 北京: 人民教育出版社, 2004.
- [2] 中华人民共和国教育部. 义务教育课程标准(2021年版)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2023.
- [3] 壮惠铃, 孙玲. 从算术思维到代数思维[J]. 小学教学研究, 2006(3): 26-28.
- [4] 刘久成, 刘久胜. 代数思维及其教学[J]. 课程教材教法, 2015, 35(12): 76-81.
- [5] 刘克臣. 小学数学教学中代数思维的渗透[J]. 中小学数学(小学版), 2016(4): 1-3.
- [6] 贝凌云. 六年级学生代数思维发展现状的调查研究[D]: [硕士学位论文]. 南京: 南京师范大学, 2010.
- [7] 占云萍. 七年级学生代数思维发展的研究[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中师范大学, 2014.
- [8] 将炎贝. 小学代数教学的现状及对策研究——基于学生代数思维的发展[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆师范大学, 2018.
- [9] 朱童兰. 在小学算术教学中渗透代数思想的分析与研究[D]: [硕士学位论文]. 上海: 上海师范大学, 2017.
- [10] 胡媛媛. 中小学数学应用题教学衔接的研究[D]: [硕士学位论文]. 天津: 天津师范大学, 2013.
- [11] 刘义萍. 如何提升学生的数学思维能力[J]. 学苑教育, 2018(1): 44.
- [12] 陈英. 发展关系性思维, 实现从算术到代数的顺利过渡[J]. 黑龙江教育(小学), 2018(9): 28-31.
- [13] 陈小燕. 小学数学教学中培育中年级学生代数思维的研究[D]: [硕士学位论文]. 南京: 南京师范大学, 2018.
- [14] 吴丽英, 刘书闽. 代数思维早渗透立足课堂培数感[J]. 小学教学参考, 2018(23): 49-50.
- [15] 小学数学课程教材研究开发中心. 义务教育教科书 数学 一年级上[M]. 北京: 人民教育出版社, 2012.
- [16] 小学数学课程教材研究开发中心. 义务教育教科书 数学 四年级上[M]. 北京: 人民教育出版社, 2012.
- [17] 小学数学课程教材研究开发中心. 义务教育教科书 数学 四年级下[M]. 北京: 人民教育出版社, 2012.
- [18] 杨琴. “生活经验”与“符号代数”的耦合策略[J]. 数学教学通讯, 2018(4): 45-46.
- [19] 杨彦. 小学阶段要进行代数推理教学[J]. 南方论刊, 2008(2): 109-109.