

H^1 -Galerkin Mixed Element Method for the Coupling Nonlinear Parabolic Partial Equations*

Jinfeng Wang¹, Yang Liu², Hong Li², Xiaoyu Li³

¹School of Statistics and Mathematics, Inner Mongolia Finance and Economics College, Hohhot

²School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot

³College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot

Email: w45j85f@163.com; mathliuyang@yahoo.cn; smslh@imu.edu.cn

Received: Apr. 1st, 2011; revised: Apr. 13th, 2011; accepted: Apr. 15th, 2011.

Abstract: An H^1 -Galerkin mixed finite element method is discussed for the coupling nonlinear parabolic partial equations. Semidiscrete and fully discrete schemes and optimal error estimates of the scalar unknown and its gradient are derived for problems in one space dimension, and it does not require the *LBB* consistency condition. Finally, a numerical example is presented to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords: Coupling Nonlinear Parabolic Partial Equations; H^1 -Galerkin Mixed Element Method; Backward Euler's Method; Optimal Error Estimates

耦合非线性抛物方程组的 H^1 -Galerkin 混合元方法*

王金凤¹, 刘洋², 李宏², 李晓瑜³

¹内蒙古财经学院统计与数学学院, 呼和浩特

²内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特

³内蒙古工业大学理学院, 呼和浩特

Email: w45j85f@163.com; mathliuyang@yahoo.cn; smslh@imu.edu.cn

收稿日期: 2011年4月1日; 修回日期: 2011年4月13日; 录用日期: 2011年4月15日

摘要: 利用 H^1 -Galerkin 混合有限元方法讨论耦合非线性抛物方程组, 得到一维情形的半离散和全离散格式和未知存量函数和它的梯度的最优收敛阶误差估计, 而且不用验证 *LBB* 相容性条件。最后, 通过数值例子验证了该算法的可行性。

关键词: 耦合非线性抛物方程组; H^1 -Galerkin 混合元方法; 向后欧拉方法; 最优阶误差估计

1. 引言

考虑耦合非线性抛物方程组的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - B_1 \Delta u - k_1 u + k_2 uv = f(x, t), (x, t) \in \Omega \times J \\ v_t - B_2 \Delta v - k_2 uv + k_3 v = g(x, t), (x, t) \in \Omega \times J \\ u(x, t) = 0, v(x, t) = 0, (x, t) \in \partial\Omega \times \bar{J} \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), x \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

这里常数 k_1, k_2, k_3 表示变量 u, v 之间的相互作用, $f(x, t), g(x, t), u_0(x), v_0(x)$ 是已知函数, $\Omega \subset R^n$, ($n=1, 2, 3$) 是具有 Lipschitz 连续边界 $\partial\Omega$ 的凸有界区域, $J = (0, T]$ 为时间区域, $B_1, B_2 > 0$ 表示热传导系数 (或反应扩散系数)。

*基金项目: 国家自然科学基金(11061021); 内蒙古自治区高校科学研究基金(NJ10006); 内蒙古大学青年科学基金(ND0702)资助。

耦合非线性抛物型方程组(1)描述了两类物质的反应扩散过程及相互作用。在环境污染源扩散, 液体渗透, 生物群体繁殖扩散等领域有广泛的应用。因此对此类方程的数值研究是非常有价值的。对于发展方程的数值方法的研究主要有差分方法、有限体积方法、连续有限元方法、间断有限元方法、传统的混合元方法等。其中传统混合元方法一直以来备受关注, 得到了很好的发展, 如[1,2]中分别利用了混合有限元方法研究了正则长波方程和双曲方程等。但传统的混合元方法需要满足 *LBB* 相容性条件, 限制了有限元逼近空间的选取。为了克服这些不利因素, Pani^[3]于 1998 年提出了 H^1 -Galerkin 混合有限元方法, 该方法不同于传统的混合元方法, 该方法可以使逼近有限元空间 V_h 和 W_h 具有不同次数的多项式, 而且 H^1 -Galerkin 混合有

限元方法不需验证 LBB 相容性条件。随后 Pani 等人将此方法进一步推广到了一些发展型积分微分方程^[4-6]、双曲型和伪双曲型方程^[7,8]和 Sobolev 方程^[9]等。但是对于耦合非线性抛物型方程组的研究还没有见到, 本文给出该非线性问题的 H^1 -Galerkin 混合有限元方法的半离散和全离散格式的最优收敛阶误差估计, 并通过数值算例验证了算法的可行性。注意在本文中作估计时所有的 C 都是与空间网格参数 h 和时间步长 Δt 无关的正常数。

2. H^1 -Galerkin 混合有限元格式

本文考虑问题(1)的一维情形

$$\begin{cases} u_t - B_1 u_{xx} - k_1 u + k_2 uv = f(x, t), (x, t) \in \Omega \times J \\ v_t - B_2 v_{xx} - k_2 uv + k_3 v = g(x, t), (x, t) \in \Omega \times J \\ u(0, t) = u(1, t) = v(0, t) = v(1, t) = 0, t \in \bar{J} \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), x \in \Omega \end{cases} \quad (2)$$

这里 $\Omega = (0, 1), J = (0, T)$ 。

$$\begin{cases} (u_x, \chi_x) = (q, \chi_x), \forall \chi \in H_0^1, (a) \\ (v_x, \omega_x) = (\sigma, \omega_x), \forall \omega \in H_0^1, (b) \\ (q_t, \phi) + B_1(q_x, \phi_x) - k_1(q, \phi) + k_2(qv + u\sigma, \phi) = -(f, \phi_x), \forall \phi \in H^1, (c) \\ (\sigma_t, \psi) + B_2(\sigma_x, \psi_x) - k_2(qv + u\sigma, \psi) + k_3(\sigma, \psi) = -(g, \psi_x), \forall \psi \in H^1, (d) \end{cases} \quad (5)$$

对于(5c)和(5d)是通过分部积分并由 Dirichlet 边界条件 $u_t(0, t) = u_t(1, t) = 0$ 和 $v_t(0, t) = v_t(1, t) = 0$ 而得。

设 V_h 和 W_h 分别是 H_0^1 和 H^1 的有限维子空间, 对

$$\begin{cases} (u_x^h, \chi_x^h) = (q^h, \chi_x^h), \forall \chi^h \in V_h, (a) \\ (v_x^h, \omega_x^h) = (\sigma^h, \omega_x^h), \forall \omega^h \in W_h, (b) \\ (q_t^h, \phi^h) + B_1(q_x^h, \phi_x^h) - k_1(q^h, \phi^h) + k_2(q^h v^h + u^h \sigma^h, \phi^h) = -(f, \phi_x^h), \forall \phi^h \in W_h, (c) \\ (\sigma_t^h, \psi^h) + B_2(\sigma_x^h, \psi_x^h) - k_2(q^h v^h + u^h \sigma^h, \psi^h) + k_3(\sigma^h, \psi^h) = -(g, \psi_x^h), \forall \psi^h \in W_h, (d) \end{cases} \quad (6)$$

为了得到误差估计首先定义 u, v 的投影, 求 $\tilde{u}^h, \tilde{v}^h \in V_h$ 满足

$$(u_x - \tilde{u}_x^h, \chi_x^h) = 0, (v_x - \tilde{v}_x^h, \omega_x^h) = 0, \forall \chi^h, \omega^h \in V_h \quad (7)$$

定义 q, σ 的椭圆投影, 求 $\tilde{q}^h, \tilde{\sigma}^h \in W_h$ 满足

$$A(q - \tilde{q}^h, \phi^h) = 0, A(\sigma - \tilde{\sigma}^h, \psi^h) = 0, \phi^h, \psi^h \in W_h \quad (8)$$

其中 $A(\varphi, w) = (\varphi_x, w_x) + \lambda(\varphi, w)$, λ 是保证 A 的 H^1 -正定, 即 $A(w, w) \geq \mu_0 \|w\|^2, w \in H^1$ 。且易知 $A(\cdot, \cdot)$ 是有界的, 且 $\mu_0 > 0$ 为常数。

首先给出定义记号及引理, $L^2(\Omega)$ 内积用 (\cdot, \cdot) 表示, $H_0^1 = \{v \in H^1 \mid v(0) = v(1) = 0\}$, 传统的 Sobolev 空间记作 $W^{m,p}$, $1 \leq p \leq +\infty$, 相应的范数为 $\|\cdot\|_{m,p}$, 特别当 $p=2$ 时, 把 $W^{m,2}$ 记作 H^2 , 其范数简记为 $\|\cdot\|_m$ 。

引理^[4] 若 ψ 于 $[0, t], t \in [0, T]$ 定义的可积函数, 则有积分不等式

$$\int_0^t \int_0^\tau |\psi(s)|^2 ds d\tau \leq C \int_0^t |\psi(s)|^2 ds \quad (3)$$

下面对问题(2)应用 H^1 -Galerkin 混合有限元方法。

令 $q = u_x, \sigma = v_x$ 可将原问题(2)化为一阶系统:

$$\begin{cases} u_x = q, v_x = \sigma \\ u_t - B_1 q_x - k_1 u + k_2 uv = f(x, t) \\ v_t - B_2 \sigma_x - k_2 uv + k_3 v = g(x, t) \end{cases} \quad (4)$$

为了对系统(4)应用 H^1 -Galerkin 混合有限元方法, 考虑如下弱形式: 求 $\{u, v; q, \sigma\} : [0, T] \rightarrow H_0^1 \times H^1$ 使得:

$1 \leq p \leq +\infty$ 及正整数 k, r 有文献[7]中的逼近性质。

则半离散 H^1 -Galerkin 混合有限元格式为: 求 $\{u^h, v^h; q^h, \sigma^h\} : [0, T] \rightarrow V_h \times W_h$ 使得:

设 $\eta = u - \tilde{u}^h, \tau = v - \tilde{v}^h, \rho = q - \tilde{q}^h, \delta = \sigma - \tilde{\sigma}^h$, 参见文献[10]有: 对于 $j=0, 1$

$$\|\eta\|_j + \|\eta_t\|_j \leq Ch^{k+1-j} [\|u\|_{k+1} + \|u_t\|_{k+1}], \quad \|\tilde{u}^h\|_{0,\infty} \leq C(u) \quad (9)$$

$$\|\tau\|_j + \|\tau_t\|_j \leq Ch^{k+1-j} [\|v\|_{k+1} + \|v_t\|_{k+1}], \quad \|\tilde{v}^h\|_{0,\infty} \leq C(v) \quad (10)$$

$$\|\rho\|_j \leq Ch^{r+1-j} \|q\|_{r+1}, \|\rho_t\|_j \leq Ch^{r+1-j} \|q_t\|_{r+1} \quad (11)$$

$$\|\delta\|_j \leq Ch^{r+1-j} \|\sigma\|_{r+1}, \|\delta_t\|_j \leq Ch^{r+1-j} \|\sigma_t\|_{r+1} \quad (12)$$

3. 半离散格式误差估计

$$\text{令 } u - u^h = u - \tilde{u}^h + \tilde{u}^h - u^h = \eta + \zeta ;$$

$$v - v^h = v - \tilde{v}^h + \tilde{v}^h - v^h = \tau + \theta ;$$

$$q - q^h = q - \tilde{q}^h + \tilde{q}^h - q^h = \rho + \xi ;$$

$$\sigma - \sigma^h = \sigma - \tilde{\sigma}^h + \tilde{\sigma}^h - \sigma^h = \delta + \gamma$$

由式(5)~(8)可以得到误差方程为:

$$\begin{cases} (\zeta_x, \chi_x^h) = (\rho, \chi_x^h) + (\xi, \chi_x^h), \forall \chi_x^h \in V_h, (a) \\ (\theta_x, \omega_x^h) = (\delta, \omega_x^h) + (\gamma, \omega_x^h), \forall \omega_x^h \in V_h, (b) \\ (\xi_t, \phi^h) + B_1(\xi_x, \phi_x^h) - k_1(\rho + \xi, \phi^h) + k_2(qv - q^h v^h + u\sigma - u^h \sigma^h, \phi^h) \\ = -(\rho_t, \phi^h) + B_1\lambda(\rho, \phi^h), \forall \phi^h \in W_h, (c) \\ (\gamma_t, \psi^h) + B_2(\gamma_x, \psi_x^h) - k_2(qv - q^h v^h + u\sigma - u^h \sigma^h, \psi^h) + k_3(\delta + \gamma, \psi^h) \\ = -(\delta_t, \psi^h) + B_2\lambda(\delta, \psi^h), \forall \psi^h \in W_h, (d) \end{cases} \quad (13)$$

定理 1 若 $u^h(0) = \tilde{u}^h(0)$, $v^h(0) = \tilde{v}^h(0)$, $q^h(0) = \tilde{q}^h(0)$, $\sigma^h(0) = \tilde{\sigma}^h(0)$, 则

$$\begin{aligned} \|u - u^h\|^2 + h^2 \|u - u^h\|_1^2 &\leq Ch^{2\min(k+1, r+1)} \left[\|u\|_{k+1}^2 + \|u_t\|_{k+1}^2 + \|q\|_{r+1}^2 + \int_0^t \|*\| \, ds \right] \\ \|v - v^h\|^2 + h^2 \|v - v^h\|_1^2 &\leq Ch^{2\min(k+1, r+1)} \left[\|v\|_{k+1}^2 + \|v_t\|_{k+1}^2 + \|\sigma\|_{r+1}^2 + \int_0^t \|*\| \, ds \right] \\ \|q - q^h\|^2 + h^2 \|q - q^h\|_1^2 &\leq Ch^{2\min(r+1, k+1)} \left[\|q\|_{r+1}^2 + \|\sigma\|_{r+1}^2 + \int_0^t \|*\| \, ds \right] \\ \|\sigma - \sigma^h\|^2 + h^2 \|\sigma - \sigma^h\|_1^2 &\leq Ch^{2\min(r+1, k+1)} \left[\|q\|_{r+1}^2 + \|\sigma\|_{r+1}^2 + \int_0^t \|*\| \, ds \right] \\ \int_0^t \left[\|\sigma - \sigma^h\|^2 + \|q - q^h\|^2 + h^2 \left(\|q - q^h\|_1^2 + \|\sigma - \sigma^h\|_1^2 \right) \right] ds &\leq Ch^{2\min(r+1, k+1)} \int_0^t \|*\| \, ds \end{aligned}$$

其中

$$\|*\| = \|u\|_{k+1}^2 + \|u_t\|_{k+1}^2 + \|v\|_{k+1}^2 + \|v_t\|_{k+1}^2 + \|q\|_{r+1}^2 + \|q_t\|_{r+1}^2 + \|\sigma\|_{r+1}^2 + \|\sigma_t\|_{r+1}^2$$

证明: 因为 ρ, δ, η 和 τ 已知, 故只需估计 ξ, γ, ζ 和 θ 。在(13a)和(13b)中分别取 $\chi^h = \zeta$ 和 $\omega^h = \theta$, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 我们有

$$\|\zeta_x\| \leq C(\|\rho\| + \|\xi\|), \|\theta_x\| \leq C(\|\delta\| + \|\gamma\|) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (\xi_t, \xi) + B_1 A(\xi, \xi) &\leq C(\|\rho\|^2 + \|\rho_t\|^2 + \|\xi\|^2) + C\|q\|_{0,\infty} \|v - v^h\| \|\xi\| \\ &+ C\|v^h\|_{0,\infty} \|q - q^h\| \|\xi\| + C\|\sigma\|_{0,\infty} \|u - u^h\| \|\xi\| + C\|u^h\|_{0,\infty} \|\sigma - \sigma^h\| \|\xi\| \\ &\leq C(\|\rho\|^2 + \|\rho_t\|^2 + \|\xi\|^2) + C\|q\|_{0,\infty} (\|\tau\| + \|\delta\| + \|\gamma\|) \|\xi\| + C\|v^h\|_{0,\infty} (\|\rho\| + \|\xi\|) \|\xi\| \\ &+ C\|u^h\|_{0,\infty} (\|\delta\| + \|\gamma\|) \|\xi\| + C\|\sigma\|_{0,\infty} (\|\eta\| + \|\rho\| + \|\xi\|) \|\xi\| \end{aligned} \quad (16)$$

在(13d)中令 $\psi^h = \gamma$, 并使用(15), 同理有

$$\begin{aligned} (\gamma_t, \gamma) + B_2 A(\gamma, \gamma) &\leq C(\|\delta\|^2 + \|\delta_t\|^2 + \|\gamma\|^2) + C\|q\|_{0,\infty} (\|\tau\| + \|\delta\| + \|\gamma\|) \|\gamma\| \\ &+ C\|v^h\|_{0,\infty} (\|\rho\| + \|\xi\|) \|\gamma\| + C\|u^h\|_{0,\infty} (\|\delta\| + \|\gamma\|) \|\gamma\| + C\|\sigma\|_{0,\infty} (\|\eta\| + \|\rho\| + \|\xi\|) \|\gamma\| \end{aligned} \quad (17)$$

将(16)和(17)两式相加, 得

$$\frac{d}{dt} \left[\|\xi\|^2 + \|\gamma\|^2 \right] + B_1 A(\xi, \xi) + B_2 A(\gamma, \gamma) \leq C(\|\xi\|^2 + \|\gamma\|^2) + C(\|\rho\|^2 + \|\rho_t\|^2 + \|\delta\|^2 + \|\delta_t\|^2 + \|\eta\|^2 + \|\tau\|^2) \quad (18)$$

对上式两端关于时间从 0 到 t 积分, 即得

$$\|\xi\|^2 + \|\gamma\|^2 + \int_0^t B_1 A(\xi, \xi) + B_2 A(\gamma, \gamma) ds \leq C \int_0^t (\|\rho\|^2 + \|\rho_t\|^2 + \|\delta\|^2 + \|\delta_t\|^2 + \|\eta\|^2 + \|\tau\|^2) ds + C \int_0^t (\|\xi\|^2 + \|\gamma\|^2) ds \quad (19)$$

对上式应用 Gronwall 引理及积分不等式(3), 可得

$$\|\xi\|^2 + \|\gamma\|^2 + \int_0^t (\|\xi_t\|^2 + \|\gamma_t\|^2) ds \leq C \int_0^t (\|\rho\|^2 + \|\rho_t\|^2 + \|\delta\|^2 + \|\delta_t\|^2 + \|\eta\|^2 + \|\tau\|^2) ds \quad (20)$$

在(13c, d)中分别令 $\phi^h = \xi_t, \psi^h = \gamma_t$, 并使用(15), 类似于上面的推导过程, 有

$$\varepsilon_0 \left[\|\xi_t\|^2 + \|\gamma_t\|^2 \right] + \frac{d}{dt} [B_1 A(\xi, \xi) + B_2 A(\gamma, \gamma)] \leq C \left(\|\xi\|^2 + \|\gamma\|^2 \right) + C \left(\|\rho\|^2 + \|\rho_t\|^2 + \|\delta\|^2 + \|\delta_t\|^2 + \|\eta\|^2 + \|\tau\|^2 \right) \quad (21)$$

对上式两端关于时间从 0 到 t 积分, 利用 Gronwall 引理, 可得

$$\varepsilon_0 \int_0^t \left[\|\xi_t\|^2 + \|\gamma_t\|^2 \right] ds + [B_1 A(\xi, \xi) + B_2 A(\gamma, \gamma)] \leq C \int_0^t (\|\rho\|^2 + \|\rho_t\|^2 + \|\delta\|^2 + \|\delta_t\|^2 + \|\eta\|^2 + \|\tau\|^2) ds \quad (22)$$

联合(14), (15), (20)和(22), 有

$$\|\xi\|^2 \leq \|\xi_t\|^2 \leq C \|\rho\|^2 + C \int_0^t (\|\rho\|^2 + \|\rho_t\|^2 + \|\delta\|^2 + \|\delta_t\|^2 + \|\eta\|^2 + \|\tau\|^2) ds \quad (23)$$

和

$$\|\theta\|^2 \leq \|\theta_t\|^2 \leq C \|\delta\|^2 + C \int_0^t (\|\rho\|^2 + \|\rho_t\|^2 + \|\delta\|^2 + \|\delta_t\|^2 + \|\eta\|^2 + \|\tau\|^2) ds \quad (24)$$

联合(20), (22)~(24), (9)~(12)和三角不等式, 即得定理结论。

式, 记 $t_n = n\Delta t, \Delta t = T/M$, 其中 M 为任意的正整数。进一步令 $\phi^n = \phi(t_n)$ 和 $\bar{\partial}_t \phi^n = (\phi^n - \phi^{n-1})/\Delta t$, 其中 $\phi \in C^1[0, T]$ 。则得到系统(5)的全离散向后欧拉格式为: 存在一系列 $\{U^n, V^n, Q^n, Z^n\}_{n=0}^M$ 使得

4. 全离散格式误差估计

对时间区间 $[0, T]$ 进行剖分, 为了使用向后欧拉公

$$\begin{cases} (U_x^n, \chi_x^h) = (Q^n, \chi_x^h), \forall \chi^h \in V_h, (a) \\ (V_x^n, \omega_x^h) = (Z^n, \omega_x^h), \forall \omega^h \in V_h, (b) \\ (\bar{\partial}_t Q^n, \phi^h) + B_1(Q_x^n, \phi_x^h) - k_1(Q^n, \phi^h) + k_2(Q^n V^n + U^n Z^n, \phi^h) = -(f^n, \phi_x^h), \forall \phi^h \in W_h, (c) \\ (\bar{\partial}_t Z^n, \psi^h) + B_2(Z_x^n, \psi_x^h) - k_2(Q^n V^n + U^n Z^n, \psi^h) + k_3(Z^n, \psi^h) = -(g^n, \psi_x^h), \forall \psi^h \in W_h, (d) \end{cases} \quad (25)$$

为了得到误差估计, 令

$$\begin{aligned} u(t_n) - U^n &= (u(t_n) - \tilde{u}^h(t_n)) + (\tilde{u}^h(t_n) - U^n) = \eta^n + \zeta^n; & v(t_n) - V^n &= (v(t_n) - \tilde{v}^h(t_n)) + (\tilde{v}^h(t_n) - V^n) = \tau^n + \theta^n; \\ q(t_n) - Q^n &= (q(t_n) - \tilde{q}^h(t_n)) + (\tilde{q}^h(t_n) - Q^n) = \rho^n + \xi^n; & \sigma(t_n) - Z^n &= (\sigma(t_n) - \tilde{\sigma}^h(t_n)) + (\tilde{\sigma}^h(t_n) - Z^n) = \delta^n + \gamma^n \end{aligned}$$

在 $t = t_n$ 处使用(5), (7)~(8), (25)可以得到误差方程为:

$$\begin{cases} (\zeta_x^n, \chi_x^h) = (\rho^n + \xi^n, \chi_x^h), \forall \chi^h \in V_h, (a) \\ (\theta_x^n, \omega_x^h) = (\delta^n + \gamma^n, \omega_x^h), \forall \omega^h \in V_h, (b) \\ (\bar{\partial}_t \zeta^n, \phi^h) + B_1(\zeta_x^n, \phi_x^h) - k_1(\rho^n + \xi^n, \phi^h) + k_2(q^n v^n - Q^n V^n + u^n \sigma^n - U^n Z^n, \phi^h) \\ = -(\bar{\partial}_t \rho^n + \pi^n, \phi^h) + B_1 \lambda(\rho^n, \phi^h), \forall \phi^h \in W_h, (c) \\ (\bar{\partial}_t \gamma^n, \psi^h) + B_2(\gamma_x^n, \psi_x^h) - k_2(q^n v^n - Q^n V^n + u^n \sigma^n - U^n Z^n, \psi^h) + k_3(\delta^n + \gamma^n, \psi^h) \\ = -(\bar{\partial}_t \delta^n + \varepsilon^n, \psi^h) + B_2 \lambda(\delta^n, \psi^h), \forall \psi^h \in W_h, (d) \end{cases} \quad (26)$$

这里 $\pi^n = q_t(t_n) - \bar{\partial}_t q(t_n), \varepsilon^n = \sigma_t(t_n) - \bar{\partial}_t \sigma(t_n)$ 。

定理 2 设 $Q^0(0) = \tilde{q}^h(0), Z^0(0) = \tilde{\sigma}^h(0)$, 则对于 $1 \leq J \leq M$, 有

$$\begin{aligned} & \|q^J - Q^J\| + \|\sigma^J - Z^J\| + \|u^J - U^J\| + \|v^J - V^J\| + h\|u^J - U^J\|_1 + h\|v^J - V^J\|_1 \\ & Ch^{\min(r+1, k+1)} \left(\|u\|_{L^\infty(H^{k+1})} + \|u_t\|_{L^\infty(H^{k+1})} + \|v\|_{L^\infty(H^{k+1})} + \|v_t\|_{L^\infty(H^{k+1})} + \|q\|_{L^\infty(H^{r+1})} + \|\sigma\|_{L^\infty(H^{r+1})} + \|q_t\|_{L^2(H^{r+1})} + \|\sigma_t\|_{L^2(H^{r+1})} \right) \\ & + \Delta t \left(\|q_u\|_{L^2(L^2)} + \|\sigma_\tau\|_{L^2(L^2)} \right) \end{aligned}$$

证明: 在(26a, b)中分别取 $\chi^h = \zeta^n$ 和 $\omega^h = \theta^n$, 易得

$$\|\zeta_x^n\| \leq C(\|\rho^n\| + \|\xi^n\|), \|\theta_x^n\| \leq C(\|\delta^n\| + \|\gamma^n\|) \quad (27)$$

再由 $\zeta^n, \theta^n \in H_0^1$, 所以由 Poincare 不等式, 得

$$\|\zeta^n\| \leq C(\|\rho^n\| + \|\xi^n\|), \|\theta^n\| \leq C(\|\delta^n\| + \|\gamma^n\|) \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \bar{\partial}_t \|\xi^n\|^2 + \frac{1}{2} \bar{\partial}_t \|\gamma^n\|^2 + B_1 \|\xi^n\|_1^2 + B_2 \|\gamma^n\|_1^2 \\ & \leq C \left(\|\bar{\partial}_t \rho^n\|^2 + \|\bar{\partial}_t \delta^n\|^2 + \|\delta^n\|^2 + \|\rho^n\|^2 + \|\tau^n\|^2 + \|\eta^n\|^2 + \|\pi^n\|^2 + \|\varepsilon^n\|^2 + \|\xi^n\|^2 + \|\gamma^n\|^2 \right) \end{aligned} \quad (29)$$

这里

$$\|\bar{\partial}_t \rho^n\|^2 \leq \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|q_t\|_{r+1}^2 ds, \|\pi^n\|^2 \leq C \Delta t \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|q_u\|^2 ds, \|\bar{\partial}_t \delta^n\|^2 \leq \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\sigma_\tau\|_{r+1}^2 ds, \|\varepsilon^n\|^2 \leq C \Delta t \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\sigma_u\|^2 ds$$

上式两端关于 $n = 1$ 到 J , ($1 \leq J \leq M$) 求和, 可得

$$\begin{aligned} & (1 - C \Delta t) \left(\|\xi^J\|^2 + \|\gamma^J\|^2 \right) + 2B_1 \Delta t \sum_{n=1}^J \left(\|\xi^n\|_1^2 + \|\gamma^n\|_1^2 \right) \leq C \left(\|\xi^0\|^2 + \|\gamma^0\|^2 + \Delta t \sum_{n=1}^J \left(\|\rho^n\|^2 + \|\delta^n\|^2 + \|\tau^n\|^2 + \|\eta^n\|^2 \right) \right) \\ & + h^{2(r+1)} \int_0^{t_J} \left(\|q_t\|^2 + \|\sigma_\tau\|^2 \right) ds + (\Delta t)^2 \int_0^{t_J} \left(\|q_u\|^2 + \|\sigma_u\|^2 \right) ds + \Delta t \sum_{n=0}^{J-1} \left(\|\xi^n\|^2 + \|\gamma^n\|^2 \right) \end{aligned} \quad (30)$$

选择 Δt_0 , 当 $0 < \Delta t < \Delta t_0$ 时 $1 - C \Delta t > 0$, 使用离散 Gronwall 引理, 并注意到 $\xi^0 = 0, \gamma^0 = 0$, 应用三角不等式得定理结论。

5. 数值算例

为了验证所提出算法的可行性, 时空区域都取为 $[0, 1]$, 对(2)中参数 k_1, k_2, k_3, B_1, B_2 取值为 1, 初值 $u(x, 0) = \sin(\pi x)$, $v(x, 0) = \sin(\pi x)$, 此时 $f(x, t) = e^{-t} \sin(\pi x) (\pi^2 - 2 + e^{-t} \sin(\pi x))$ 和 $g(x, t) = e^{-t} \sin(\pi x) (\pi^2 - e^{-t} \sin(\pi x))$, 容易验证精确解 $u(x, t) = v(x, t) = e^{-t} \sin(\pi x)$. 采用分片线性基函数, 时间离散采用欧拉向后差分. 表 1 中分别给出了变量 $u - u^h$ 和 $v - v^h$ 的空间 L^2 时间最大模的误差估计结果和收敛阶. 表 2 分别给出了变量 $q - q^h$ 和 $\sigma - \sigma^h$ 的空间 L^2 时间最大模的误差估计结果和收敛阶. 从数据上可以看出, 该数值方法对非线性耦合方程组问题是有效的. 图 1~4 中分别给出了在时间和空间步长分别 $\Delta t =$

在(31c, d)中分别令 $\phi^h = \xi^n, \psi^h = \gamma^n$, 并将两式相加, 同时使用

$$(\bar{\partial}_t \xi^n, \xi^n) \geq \frac{1}{2} \bar{\partial}_t \|\xi^n\|^2, (\bar{\partial}_t \gamma^n, \gamma^n) \geq \frac{1}{2} \bar{\partial}_t \|\gamma^n\|^2$$

和 Young-不等式, 可得

0.0125 和 $h = 0.025$ 时的四个数值变量 u^h, v^h, q^h 和 σ^h 的表面图像, 并且在图 5~8 中分别给出了在同样剖分下的真解 u, v, q, σ 和数值解 u^h, v^h, q^h, σ^h 的对比图像. 从图像上直观的看到了该数值算法的可行性。

Table 1. $L^\infty(L^2)$ -errors and order of convergence

表1. $L^\infty(L^2)$ -误差和收敛阶

$h = 2\Delta t$	$\ u - u^h\ _{L^\infty(L^2)}$	Order	$\ v - v^h\ _{L^\infty(L^2)}$	Order
$\frac{1}{40}$	1.03422E-03	-	9.12765E-04	-
$\frac{1}{80}$	4.48740E-04	1.20459	5.48770E-04	0.73404
$\frac{1}{160}$	2.07280E-04	1.11430	2.97770E-04	0.88200
$\frac{1}{320}$	9.93750E-05	1.06063	1.54770E-04	0.94407
$\frac{1}{640}$	4.86210E-05	1.03130	7.88600E-05	0.97276

Table 2. $L^\infty(L^2)$ -errors and order of convergence

表2. $L^\infty(L^2)$ -误差和收敛阶

$h = 2\Delta t$	$\ q - q^h\ _{L^\infty(L^2)}$	Order	$\ \sigma - \sigma^h\ _{L^\infty(L^2)}$	Order
$\frac{1}{40}$	2.37388E-03	-	3.87404E-03	-
$\frac{1}{80}$	1.19331E-03	0.99228	1.97945E-03	0.96874
$\frac{1}{160}$	5.98310E-04	0.99600	1.00032E-03	0.98464
$\frac{1}{320}$	2.99580E-04	0.99795	5.02810E-04	0.99238
$\frac{1}{640}$	1.49900E-04	0.99894	2.52070E-04	0.99619

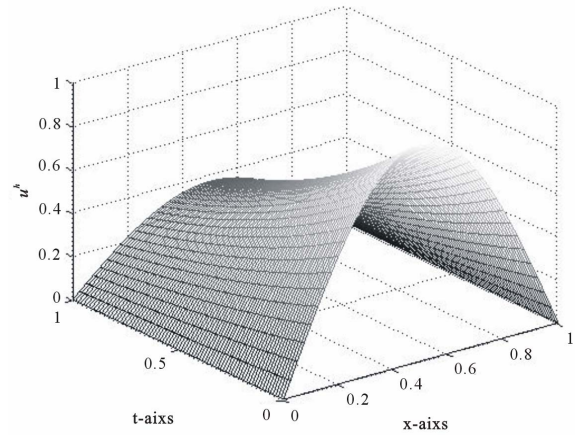


Figure 1. The surface shows the value of u^h
图1. 数值解 u^h 的表面图

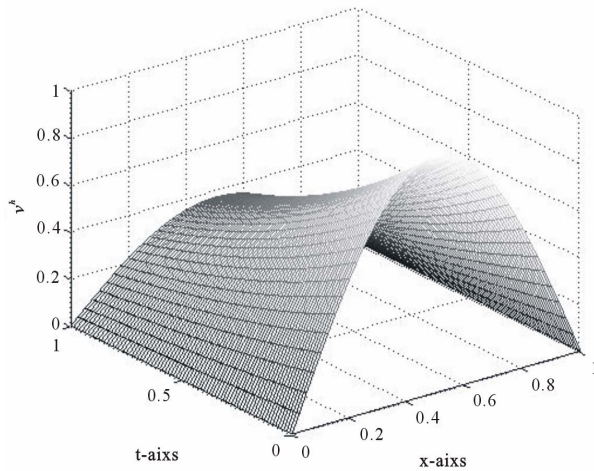


Figure 2. The surface shows the value of v^h
图2. 数值解 v^h 的表面图

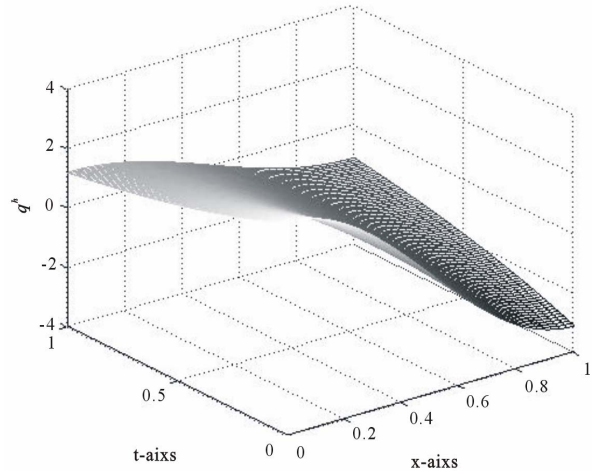


Figure 3. The surface shows the value of q^h
图3. 数值解 q^h 的表面图

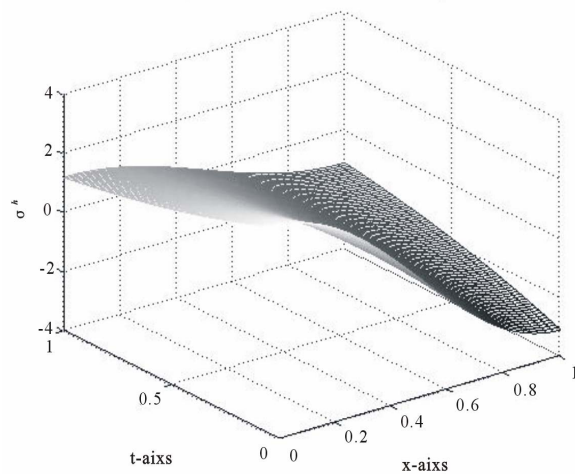


Figure 4. The surface shows the value of σ^h
图4. 数值解 σ^h 的表面图

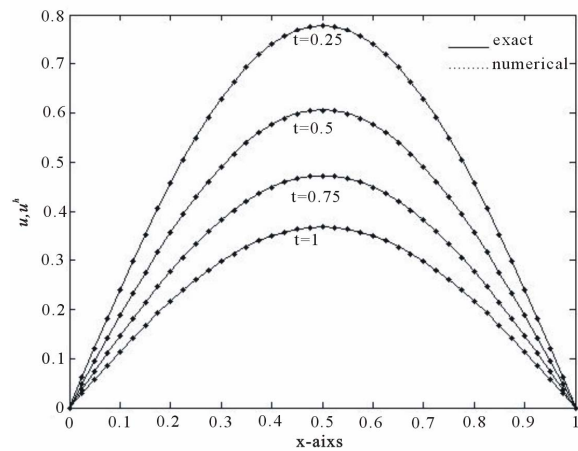


Figure 5. Comparison between u^h and u
图5. 数值解 u^h 和真解 u 的对比单线图

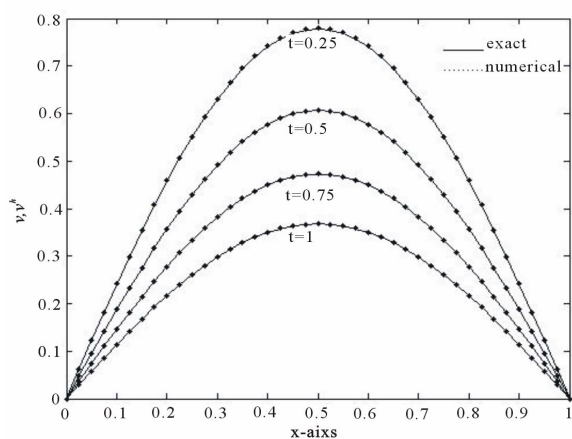


Figure 6. Comparison between v^h and v
图 6. 数值解 v^h 和真解 v 的对比单线图

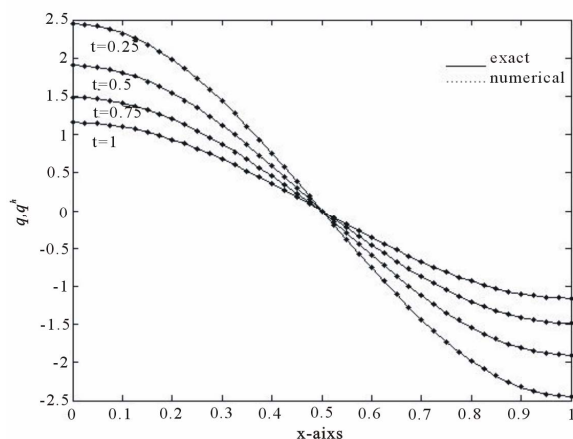


Figure 7. Comparison between q^h and q
图 7. 数值解 q^h 和真解 q 的对比单线图

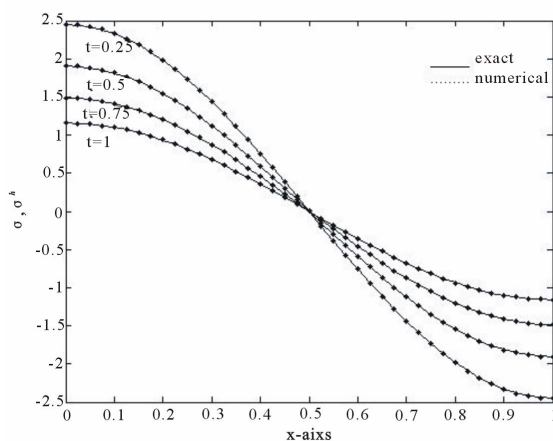


Figure 8. Comparison between σ^h and σ
图 8. 数值解 σ^h 和真解 σ 的对比单线图

参考文献 (References)

- [1] Z. D. Luo, R. X. Liu. Mixed finite element analysis and numerical solitary solution for the RLW equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1998, 36(1): 89-104.
- [2] Y. P. Chen, Y. Q. Huang. The superconvergence of mixed finite element methods for nonlinear hyperbolic equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 1998, 3(3): 155-158.
- [3] A. K. Pani. An H^1 -Galerkin mixed finite element method for parabolic partial differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1998, 35(2): 712-727.
- [4] A. K. Pani, G. Fairweather. H^1 -Galerkin mixed finite element methods for parabolic partial integro-differential equations. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2002, 22(2): 231-252.
- [5] D. Y. Shi, H. H. Wang. An H^1 -Galerkin nonconforming mixed finite element method for integro-differential equation of parabolic type. *Journal of Mathematical Research and Exposition*, 2009, 29(5): 871-881.
- [6] 王瑞文. 双曲型积分微分方程的 H^1 -Galerkin 混合有限元方法误差估计[J]. *计算数学*, 2006, 28(1): 19-30.
- [7] A. K. Pani, R. K. Sinha, and A. K. Otta. An H^1 -Galerkin mixed method for second order hyperbolic equations. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 2004, 1(2): 111-129.
- [8] Y. Liu, H. Li. H^1 -Galerkin mixed finite element methods for pseudo-hyperbolic equations. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, 212(2): 446-457.
- [9] 郭玲, 陈焕贞. Sobolev 方程的 H^1 -Galerkin 混合有限元方法[J]. *系统科学与数学*, 2006, 26(3): 301-314.
- [10] M. F. Wheeler. A priori L^2 -error estimates for Galerkin approximations to parabolic differential equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1973, 10(4): 723-749.