Pure Mathematics 理论数学, 2011, 1, 208-214
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2011.13040 Published Online October 2011 (http://www.hanspub.org/journal/pm/)

Existence and Nonexistence of Global Solutions of Higher-Order Parobolic System with Slow Decay Initial Data*

Fuqin Sun, Sujuan Hu
School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin
Email: sfqwell@163.com; husujuan8@sina.com
Received: Feb. 21st, 2011; revised: Apr. 20th, 2011; accepted: Apr. 21st, 2011.

Abstract: This paper concerns with the Cauchy problem of a higher-order parobolic system. By constructing a so called “comparison principle”of the higher-order parobolic system and utilizing Schauder fixed point theorem and the test function method, we prove the existence and nonexistence of global solutions to such a problem with slow decay initial data.

Keywords: Higher-Order Parobolic System; Comparison Principle; Slow Decay Initial Data; Global Solutions

半线性高阶抛物型方程组具慢衰减初值问题整体解的存在与不存在性*

孙福芹，胡素娟
天津职业技术师范大学理学院，天津
Email: sfqwell@163.com; husujuan8@sina.com
收稿日期：2011 年 2 月 21 日；修回日期：2011 年 4 月 20 日；录用日期：2011 年 4 月 21 日

摘　要：本文研究一类半线性高阶抛物型方程组的 Cauchy 问题。通过建立高阶抛物型方程组的所谓“比较原理”，利用 Schauder 不动点理论和试验函数等方法，证明了该问题在慢衰减初值条件下解的整体存在性与不存在性。

关键词：高阶抛物型方程组；比较原理；慢衰减初值；整体解

1. 引言

本文研究半线性高阶抛物型方程组的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_{1t}+(-\Delta)^m u_1=|u_2|^{p_1}, & x\in R^N, t>0,\\ u_{2t}+(-\Delta)^m u_2=|u_1|^{p_2}, & x\in R^N, t>0,\\ u_1(0,x)=u_{10}(x),\ u_2(0,x)=u_{20}(x), & x\in R^N, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $m\ge 1$ 为整数，$p_i>1,\ u_{i0}(x)\in X=L^1(R^N)\cap L^\infty(R^N),\quad i=1,2$。高阶半线性和拟线性热方程在许多领域，诸如薄胶片理论，火苗蔓延，双稳定系统，相位平移和高阶扩散，都有重要的应用，参看 Peletier 和 Troy 的专著[1]。关于高阶热方程的研究可见[2-13]及其所引文献。

*国家自然科学基金资助(10701024)，天津市高校科技发展基金资助(20081003)。

关于单个方程式的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^m u = |u|^p, & x \in R^N, t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in R^N, \end{cases} \tag{1.2}$$

的研究已经有很多结果，如文献[2-13]。Galaktionov 和 Phonzaev 在文献[7]中指出，$p = 1 + 2m/N$ 是问题(1.2)的 Fujita 临界指数，从而将文献[14]关于二阶抛物型方程$(m=1)$的 Fujita 型临界指数结果推广到高阶抛物型方程的情形。在文献[2]中，Caristi 和 Mitidieri 研究了问题(1.2)在 $p > 1 + 2m/N$ 和慢衰减初值条件下解的整体存在性与不存在性。在文献[5]中，Gazzola 与 Grunau 则讨论了(1.2)在$|u|^p$ 替换为$|u|^{p-1}u$ 时，初值为最优衰减条件下解的整体存在性。

目前对方程组(1.1)的研究则较少。在文献[10]中，本文作者研究了模型(1.1)的广义 Fujita 临界指数问题。证明了

1) 如果 $\frac{N}{2m} > \max\left\{\frac{1+p_1}{p_1p_2-1}, \frac{1+p_2}{p_1p_2-1}\right\}$，则对小初值，解整体存在且存在正常数 σ_1, σ_2 和 C 使得

$$\|u_i\|_\infty \le C(1+t)^{-\sigma_i}, i = 1,2;$$

2) 如果 $\frac{N}{2m} \le \max\left\{\frac{1+p_1}{p_1p_2-1}, \frac{1+p_2}{p_1p_2-1}\right\}$ 且初值 u_{10}, u_{20} 满足 $\int_{R^N} u_{10}(x)\mathrm{d}x > 0, \int_{R^N} u_{20}(x)\mathrm{d}x > 0,$

则解在有限时刻爆破。最近我们还分别在文献[12]和[11,13]中研究了问题(1.1)解的自相似行为和爆破解的生命跨度等问题。本文将利用 schauder 不动点定理与试验函数方法获得问题(1.1)在慢衰减初值条件下解的整体存在性与不存在性。本文关键之处在于建立了关于积分系统(2.1)的所谓“比较原理”(见命题 2.1)，它对我们证明解的整体存在性起着关键作用。

2. 一些记号和预备结论

利用半群理论，问题(1.1)可写成如下积分系统：

$$\begin{cases} u_{1t} = b(t) * u_{10} + \int_0^t b(t-s)|u_2(s)|^{p_1} \mathrm{d}s, \\ u_{2t} = b(t) * u_{20} + \int_0^t b(t-s)|u_1(s)|^{p_2} \mathrm{d}s, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $b = b(t,x)$ 表示抛物算子 $\partial_t + (-\Delta)^m$ 的核。已知 $b(t,x) = t^{-N/2m} f(\eta)$，$\eta = xt^{-1/2m}$ 以及

$f(\eta) = (2\pi)^{-N/2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^{2m}}(|\eta|s)^{N/2} J_{(N-2)/2}(|\eta|s)\mathrm{d}s$ 其中 J_v 表示 v 阶 Besel 函数。利用压缩映像原理可以证明存在 $T_0 > 0$，问题(2.1)存在唯一解 (u_1, u_2)，$u_i \in C([0,T_0); X)$，$i = 1,2,$ 见文献[15]。

如果 $m > 1$，则核 $b(t,x)$ 是变号的，因此相应的半群是不保序的。为此，我们引入控制核，见文献[7]：

$$\bar{b}(x,t) = \omega_1 t^{-N/2m} \exp\left(-\mathrm{d}|\eta|^\alpha\right),$$

其中 $\eta = xt^{-1/2m}, \alpha = \frac{2m}{2m-1}, \omega_1 = \int_{R^N} \exp(-\mathrm{d}|\eta|\mathrm{d}\eta)$，$d > 0$ 为常数。易知存在 $D > 1$ 使

$$|b(t,x)| \le D\bar{b}(t,x), (t,x) \in [0,\infty) \times R^N. \tag{2.2}$$

考虑如下积分系统：

$$\begin{cases} u_{1t} = \bar{b}(t) * u_{10} + \int_0^t \bar{b}(t-s)\left(Dv_2^{p_1}\right)(s)\mathrm{d}s, \\ u_{2t} = \bar{b}(t) * u_{20} + \int_0^t \bar{b}(t-s)\left(Dv_1^{p_1}\right)(s)\mathrm{d}s, \end{cases} \tag{2.3}$$

关于积分系统(2.1)和(2.3)，我们有如下比较结果：

命题 2.1 设 $u_{i0},v_{i0}\in X$ 满足：

$$D\left|u_{i0}\left(x\right)\right|\le v_{i0}\left(x\right),\ x\in R^N,i=1,2 \tag{2.4}$$

如果 (u_1,u_2) 与 v_1,v_2 分别为(2.1)和(2.3)在区间 $\left[0,T\right)$，$T>0$ 上的解，则

$\left|u_i\left(t,x\right)\right|\le v_i\left(t,x\right),\ x\in R^N,\ t\in\left[0,T\right),\ i=1,2$

证明：令 $w_i=v_i-u_i,i=1,2$ 利用(2.3)式易导出 w_i 和 w_i 分别满足积分不等式：

$$\begin{cases} w_1\ge\bar{b}\left(t\right)\left[v_{10}-D\left|u_{10}\right|\right]+\int_0^t D\bar{b}\left(t-s\right)\left[v_2^{p_1}\left(s\right)-\left|u_2\right|^{p_1}\left(s\right)\right]\mathrm{d}s \\ w_2\ge\bar{b}\left(t\right)\left[v_{20}-D\left|u_{20}\right|\right]+\int_0^t D\bar{b}\left(t-s\right)\left[v_1^{p_1}\left(s\right)-\left|u_2\right|^{p_2}\left(s\right)\right]\mathrm{d}s \end{cases} \tag{2.5}$$

因为 $v_i^{p_i+(-1)^{i-1}}-\left|u_i\right|^{p_1+(-1)^{i-1}}=p_{1+(-1)^{i-1}}\xi_i^{p_{i+(-1)^{i-1}}-1}w_i,\ \xi_i\in\left(\left|u_i\right|,v_i\right),\ i=1,2$

因此，利用(2.2)和 (2.5)式以及核 $\bar{b}(t,x)$ 的正性易知 $w_i\ge0$。即 $|u_i\left(t,x\right)|\le v_i\left(t,x\right),\ x\in R^N,\ t\in\left[0,t\right),\ i=1,2.$

给定 $a>0$，$v_0\in R^N$。引入记号：

$$\hbar_a^{v_0}\left(t,x\right)=w_1\int_{R^N}t^{-N/2m}\exp\left(-a\left|x-y\right|^{\alpha}/t^{1/(2m-1)}\right)v_0\left(y\right)\mathrm{d}y \qquad G_a\left(x,t,y,s\right)=w_1\left|t-s\right|^{-N/2m}\exp\left(-a\left|x-y\right|^{\alpha}/\left|t-s\right|^{1/(2m-1)}\right)$$

易知 $\hbar_a^{v_0}(t,x)=\bar{b}(t)*v_0$，且存在常数 $C>0$ 使得 $\int_{R^N}t^{-N/2m}\exp\left(-a|x-y|^{\alpha}/t^{1/(2m-1)}\right)\mathrm{d}y\le C$ 为证本文的主要结果，需要如下几个引理。它们的证明可见文献[3]。

引理 2.1 设 $v_0\in L^{\infty}(R^N),\ v_0\ge0$。给定 $p>1$，则存在常数 $C(p)>0$ 使得

$$\hbar_a^{v_0}(t,x)^p\le C(p)\left\|v_0\right\|_{\infty}^{p-1}\hbar_a^{v_0}(t,x),\ \forall(t,x)\in R^+\times R^N.$$

特别地，如果 $\lim\limits_{|x|\to\infty}v_0(x)=0$，则 $\lim\limits_{|x|\to\infty}\hbar_a^{v_0}(t,x)=0$ 且极限关于 t 是一致收敛的。

引理 2.2 设 $v_0\in L^1(R^N)$，且存在常数 $C>0$ 和 $\beta>0$ 使得 $0\le v_0\left(x\right)\le\dfrac{C}{1+\left|x\right|^{\bar{\beta}}},\ x\in R^N$ 则存在 $C_0>0$ 使得

$\hbar_a^{v_0}\left(t,x\right)\le\dfrac{C_0\left(1+\left\|v_0\right\|_{\infty}\right)}{1+\left|x\right|^{\beta}},\ x\in R^N,\ t>0,$ 其中 $\overline{\beta}=\min\left\{\beta,N\right\}$。

引理 2.3 设 $V\left(x\right)=\dfrac{1}{1+\left|x\right|^{\gamma}},\ \gamma>2m$，则对任意的 $c>0$，

$N_c\left(V\right)=\sup\limits_{x,t}\int_{-\infty}^t\int_{R^N}V\left(y\right)G_c\left(x,t,y,s\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}s+\sup\limits_{y,s}\int_s^{\infty}\int_{R^N}V\left(y\right)G_c\left(x,t,y,s\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t<+\infty.$

进一步，若 $0<a<d$，则存在正常数 $C_{a,d}$ 和 c 使得

$$\int_0^{\infty}\int_{R^N}G_d\left(x,t,z,\tau\right)V\left(z\right)G_a\left(z,\tau,y,0\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau\le C_{a,d}N_c\left(V\right)G_a\left(x,t,y,0\right).$$

3. 具慢衰减初值解的整体存在性

关于解的整体存在结果，有

定理 3.1 设 $m>1,\ p_i>1,\ i=1,2$，$\dfrac{N}{2m}>\max\left\{\dfrac{p_1+1}{p_1p_2-1},\dfrac{p_2+1}{p_1p_2-1}\right\}.$

如果 $u_{i0}(x)\in X$ 且满足 $u_{i0}(x)\ge0,\ u_{10}(x)+u_{20}(x)\le\dfrac{b_0}{1+|x|^{\beta}},\ x\in R^N$，其中 $b_0>0$ 为某个常数以及

$\beta > 2m \cdot \max\left\{\frac{p_1+1}{p_1p_2-1}, \frac{p_2+1}{p_1p_2-1}\right\}$, 则问题(1.1)存在整体解。

证明：令 $v_{i0}(x) = Du_{i0}(x),\ i=1,2$ 任意 $(v_1,v_2),\ v_i \in L^\infty(R^+ \times R^N)$, 定义算子 $T(v_1,v_2) = (T_1v_1, T_2v_2)$. T_iv_i 定义如下：

$$T_iv_i = \bar{b}(t) * v_{i0} + \int_0^t \bar{b}(t-s) * \left(Dv_{i+(-1)^{i-1}}^{p_i}\right)(s)\,\mathrm{d}s,\quad i=1,2 \tag{3.1}$$

给定 $\delta > 0, M > 1$ 和 $0 < a < d$ 。记 $S_\delta = \left\{(v_1,v_2) \mid v_i \in C\left([0,\delta]\times R^N\right), v_i \ge 0, v_1+v_2 \le M\hbar_a^{v_{10}+v_{20}}(t,x)\right\}$

我们将要利用 Schauder 不动点定理证明 T 在 S_δ 上有唯一不动点。为此需要验证：

1) S_δ 为非空,有界闭的凸集；

2) $TS_\delta \subset S_\delta$；

3) TS_δ 在 S_δ 上按 L^∞ 范数是紧集；

4) T 是连续算子。

容易验证条件(a)满足，下证(b)。假设 $(v_1,v_2)\in S_\delta$ 。首先由 $v_i > 0$ 以及核 $\bar{b}(t)$ 的正性易知 $Tv_i \ge 0$ 。另外条件

$$\frac{N}{2m} > \max\left\{\frac{p_1+1}{p_1p_2-1}, \frac{p_2+1}{p_1p_2-1}\right\}$$

蕴含 $\begin{cases} p_1 > 2m/N, p_2 > 2m/N, \\ p_1(p_2N-2m) > 2m+N, p_2(p_1N-2m) > 2m+N. \end{cases}$

因此可取

$$p_i^{(1)} > 1,\ \ p_i^{(2)} > \max\left\{0, \frac{2m+N}{p_{i+(-1)^{i-1}}N-2m} - 1\right\},\ \ p_i = p_i^{(1)} + p_i^{(2)},\ \ i=1,2.$$

由引理 2.1 知

$$v_{i+(-1)^{i-1}}^{p_i^{(1)}} \le M^{p_i^{(1)}}\left(\hbar_a^{v_{10}+v_{20}}\right)^{p_i^{(1)}} \le CM^{p_i^{(1)}} b_0^{p_i^{(1)}-1}\hbar_a^{v_{10}+v_{20}}(t,x), i=1,2 \tag{3.2}$$

由引理 2.2 得

$$v_{i+(-1)^{i-1}}^{p_i^{(2)}} \le M^{p_i^{(2)}}\left(\hbar_a^{v_{10}+v_{20}}\right)^{p_i^{(2)}} \le CM^{p_i^{(1)}} b_0^{p_i^{(2)}} \frac{1}{1+|x|^{\bar{\beta}p_i^{(2)}}}, i=1,2. \tag{3.3}$$

其中 $\bar{\beta} = \min\{\beta, N\}$ 。

令 $V(x) = \frac{1}{1+|x|^{\bar{\beta}p_i^{(2)}}}$ 结合(3.2)和(3.3)式得

$$T_iv_i(t,x) \le \hbar_d^{v_{i0}}(t,x) + CM^{p_i} b_0^{p_i^{(1)}-1}\int_{R^N}\int_0^t\int_{R^N} G_d(x,t,y,s)V(y)G_a(y,s,z,0)\left[v_{10}+v_{20}\right](z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s\mathrm{d}z, i=1,2. \tag{3.4}$$

进一步，可取 $p_i^{(2)} > \max\left\{0, \frac{2m+n}{p_{i+(-1)^{i-1}}N-2m} - 1, \min\left\{\frac{p_1p_2-1}{p_1+1}, \frac{p_1p_2-1}{p_2+1}\right\}\right\}$

由假设条件知 $\bar{\beta} = \min\{\beta, N\} > 2m \cdot \max\left\{\frac{p_1+1}{p_1p_2-1}, \frac{p_2+1}{p_1p_2-1}\right\}.$

从 $p_i^{(2)}$ 的取法可知 $\bar{\beta}p_i^{(2)} > 2m.$ 因此应用引理 2.3，由(3.4)导出

$$T_iv_i(t,x) \le \hbar_d^{v_{i0}} + CM^{p_i} b_0^{p_i^{(1)}-1} N_c(V)\int_{R^N} G_a(y,s,z,0)\left[v_{10}+v_{20}\right](z)\,\mathrm{d}z, i=1,2. \tag{3.5}$$

由 $a < d$ ，易知 $G_d(x,t,z,0) \le G_a(x,t,z,0)$ ，因此从(3.5)式得 $T_1v_1(t,x) + T_2v_2(t,x) \le \left[\sum_{i=1}^{2}\left(C + CM^{p_i} b_0^{p_i^{(1)}-1} N_c(V)\right)\right]\hbar_a^{v_{10}+v_{20}}.$

取 b_0 充分小以及 $M > 2C$，由上式得到 $T_1 v_1(t,x) + T_2 v_2(t,x) \le M \hbar_a^{v_{10}+v_{20}}$，因此条件(b)成立。

结合 TS_δ 的一致有界性和算子 T 的定义，利用与文献[16]类似的方法可证条件(c)成立。下证(d)成立。

给定函数 $(v_1^{(1)}, v_2^{(1)}), (v_1^{(2)}, v_2^{(2)}) \in S_\delta$。由(3.1)式得

$$T_i v_i^{(1)} - T_i v_i^{(2)} = D\int_0^t \int_{R^N} G_d(x,t,y,s)\left[\left(v_{i-(-1)^{i-1}}^{(1)}\right)^{p_i} - \left(v_{i-(-1)^{i-1}}^{(2)}\right)^{p_i}\right] \mathrm{d}y\mathrm{d}s, i = 1,2. \tag{3.6}$$

由引理 2.2，得

$$\begin{aligned}&\left|\left(v_{i-(-1)^{i-1}}^{(1)}\right)^{p_i} - \left(v_{i-(-1)^{i-1}}^{(2)}\right)^{p_i}\right| \le p_i \max\left\{\left(v_{i-(-1)^{i-1}}^{(1)}\right)^{p_i-1}, \left(v_{i-(-1)^{i-1}}^{(2)}\right)^{p_i-1}\right\}\left|\left(v_{i-(-1)^{i-1}}^{(1)}\right)^{p_i} - \left(v_{i-(-1)^{i-1}}^{(2)}\right)^{p_i}\right| \\ &\le \frac{p_i C M^{p_i-1}}{1+|y|^{\bar{\beta}(p_i-1)}}\left|\left(v_{i-(-1)^{i-1}}^{(1)}\right)^{p_i} - \left(v_{i-(-1)^{i-1}}^{(2)}\right)^{p_i}\right| \le C M^{p_i-1} V(y)^{p_i-1/p_i^{(2)}}\left|\left(v_{i-(-1)^{i-1}}^{(1)}\right)^{p_i} - \left(v_{i-(-1)^{i-1}}^{(2)}\right)^{p_i}\right|, \quad i = 1,2\end{aligned} \tag{3.7}$$

由 $\bar{\beta}$ 的取法，利用引理 2.3，由(3.7)式导出 $\left\|T_i v_i^{(1)} - T_i v_i^{(2)}\right\|_\infty \le C N_c(V)^{p_i-1/p_i^{(2)}} \left\|\left(v_{i-(-1)^{i-1}}^{(1)}\right)^{p_i} - \left(v_{i-(-1)^{i-1}}^{(2)}\right)\right\|, \ i = 1,2.$

因此条件(d)成立。进而利用 Schauder 不动点定理可知 T 在 S_δ 上有一个不动点 $(v_{1\delta}, v_{2\delta})$.

定义 $\begin{cases} v_{i\delta}(t,x), & t \le \delta, \\ v_{i\delta}(\delta,x), & t > \delta, \end{cases}$

由前面证明易知

$$\left(V_{1\delta}, V_{2\delta}\right) = T\left(V_{1\delta}, V_{2\delta}\right) = \left(T_1 V_{1\delta}, T_2 V_{2\delta}\right),\ T_i V_{i\delta} \ge 0,\ \sum_{i=1}^{2} T_i V_{i\delta} \le M \hbar_a^{v_{10}+v_{20}}, x \in R^N, t \in [0,\delta]$$

因此 $(V_{1\delta}, V_{2\delta})$ 是一致有界和等度连续的。利用修正的 Ascoli-Arzela 定理，可知

存在子列 $(V_{1\delta_n}, V_{2\delta_n})$ 在 $[0,\infty) \times R^N$ 的一个紧子集上一致收敛于函数 (v_1, v_2)，进一步，由

$$T_i V_{i\delta} = \bar{b}(t) * v_{i0} + \int_0^t \bar{b}(t-s) * \left(D V_{i+(-1)^{i-1}\delta_n}^{p_i}\right)(s)\,\mathrm{d}s, i = 1,2$$

和控制收敛定理，得 $(v_1, v_2) = T(v_1, v_2)$，即 (v_1, v_2) 是(3.1)的一个整体解。应用命题 2.1 可知问题(1.1)的解 $u = (u_1, u_2)$ 是整体存在的，且 $\left|u_i(t,x)\right| \le \hbar_a^{v_{10}+v_{20}}(t,x), i = 1,2$，定理 3.1 证毕。

4. 具慢衰减初值解的整体不存在性

先给出问题(1.1)一个弱解的定义:

定义 4.1 令 $Q = [0,\infty) \times R^N$。称 (u_1, u_2) 为问题(1.1)的弱解，如果

1) $u_i \in L_{loc}^{p_{i+(-1)^{i-1}}}(Q), \ i = 1,2,$

2) $u_{i0} \in L_{loc}^1(R^N), \ i = 1,2,$

且对于任意 $\phi(t,x) \in C^\infty(Q)$，下面积分等式成立：

$$\int_Q \left|u_{i+(-1)^{i-1}}\right|^{p_i} \phi(t,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{R^N} u_{i0}(x)\phi(x,0)\,\mathrm{d}x = \int_Q u_i\left(-\phi_t + (-\Delta)^m \phi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t, i = 1,2. \tag{4.1}$$

关于问题(1.1)弱解的不存在性，我们有：

定理 4.1 设 $m > 1, p_i > 1$。进一步假设下面条件成立:

1) $u_{i0} \ge 0$ 在 R^N 上几乎处处成立，$u_{i0} \in L_{loc}^1(R^N), i = 1,2$.

2) 存在常数 α，使得

$$\liminf_{|x|\to\infty}\left(1+|x|^\alpha\right)\left(u_{10} + u_{20}\right) \ge C > 0. \tag{4.2}$$

其中 $0<\alpha<2m\cdot\max\left\{\frac{p_1+1}{p_1p_2-1},\frac{p_2+1}{p_1p_2-1}\right\}$ 则问题(1.1)不存在弱解。

证明： 假设 (u_1,u_2) 是(1.1)的一个弱解。设 $\phi_i\in C_0^\infty(R)$ 满足 $1\le\phi_i\le1$ 以及 $\phi_i(s)\begin{cases}1, & 0<s\le1,\\ 0, & s\ge2.\end{cases}$ 给定 $R>0$。令 $\phi(t,x)=\phi_R(t,x)=\phi_1^\sigma\left(\frac{t}{R^{2m}}\right)\phi_2^\sigma\left(\frac{|x|}{R}\right)$，其中 $\sigma>0$ 充分大确保后面的积分是收敛的。

记 $Q_R=\left\{(t,x)\in Q:R^{2m}\le t\le2R^{2m},R\le|x|\le2R\right\}$，任意 $r>1$，r' 表示 r 的 *Hölder* 共轭指数。对(4.1)式使用 *Hölder* 不等式，得

$$\int_Q|u_2|^{p_1}\phi(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{R^N}u_{10}(x)\phi(x,0)\mathrm{d}x\le\left[\left(\int_{Q_R}|\phi_t|^{p_2'}\phi^{1-p_2'}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/p_2'}+\left(\int_{Q_R}|\Delta^m\phi|^{p_2'}\phi^{1-p_2'}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/p_2'}\right]\left(\int_Q|u_1|^{p_2}\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/p_2}, \tag{4.3}$$

$$\int_Q|u_1|^{p_2}\phi(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{R^N}u_{10}(x)\phi(x,0)\mathrm{d}x\le\left[\left(\int_{Q_R}|\phi_t|^{p_1'}\phi^{1-p_1'}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/p_1'}+\left(\int_{Q_R}|\Delta^m\phi|^{p_1'}\phi^{1-p_1'}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/p_1'}\right]\left(\int_Q|u_2|^{p_1}\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/p_1}. \tag{4.4}$$

作变换 $\xi=R^{-1}x,\ \tau=R^{-2m}t.$

易知

$$\begin{cases}\int_{Q_R}|\phi_t|^{p_1'}\phi^{1-p_1'}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le CR^{2m(1-p_1')+N},\\ \int_{Q_R}|\phi_t|^{p_2'}\phi^{1-p_2'}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le CR^{2m(1-p_2')+N}.\end{cases} \tag{4.5}$$

将(4.5)代入(4.3)和(4.3)，得

$$\int_Q|u_1|^{p_2}\phi(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{R^N}u_{10}(x)\phi(x,0)\mathrm{d}x\le CR^{\left[2m(1-p_1')+N\right]\left(1/p_2'+1/(p_1'p_2)\right)}\left(\int_Q|u_1|^{p_2}\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/(p_1'p_2)}, \tag{4.6}$$

$$\int_Q|u_2|^{p_1}\phi(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{R^N}u_{20}(x)\phi(x,0)\mathrm{d}x\le CR^{\left[2m(1-p_2')+N\right]\left(1/p_1'+1/(p_1'p_2)\right)}\left(\int_Q|u_1|^{p_2}\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/(p_1'p_2)}, \tag{4.7}$$

因此利用 Young 不等式，从(4.6)和(4.7)导出

$$\int_{R^N}u_{10}(x)\phi(x,0)\mathrm{d}x\le C\left\{R^{\left[2m(1-p_1')+N\right]\left(1/p_1'+1/(p_1'p_2)\right)}\right\}^{(p_1'p_2)}=CR^{N-2m\cdot\frac{p_1+1}{p_1p_2-1}} \tag{4.8}$$

$$\int_{R^N}u_{20}(x)\phi(x,0)\mathrm{d}x\le C\left\{R^{\left[2m(1-p_2')+N\right]\left(1/p_2'+1/(p_1p_2')\right)}\right\}^{(p_1p_2)'}=CR^{N-2m\cdot\frac{p_2+1}{p_1p_2-1}} \tag{4.9}$$

将(4.8)和(4.9)式相加，得

$$\int_{R^N}\left[u_{10}(x)+u_{20}(x)\right]\phi(x,0)\mathrm{d}x\le C\left[R^{N-2m\cdot\frac{p_1+1}{p_1p_2-1}}+R^{N-2m\cdot\frac{p_2+1}{p_1p_2-1}}\right] \tag{4.10}$$

由(4.2)式，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $R_0>0$ 使得

$$1+|x|^\alpha\left[u_{10}+u_{20}\right]\ge C-\varepsilon,\quad |x|>R_0 \tag{4.11}$$

因此从(4.10)和(4.11)式得，当 $R>R_0$ 时，

$$C\left[R^{N-2m\cdot\frac{p_1+1}{p_1p_2-1}}+R^{N-2m\cdot\frac{p_2+1}{p_1p_2-1}}\right]\geq\int_{R^N}\left[u_{10}(x)+u_{20}(x)\right]\phi(x,0)\mathrm{d}x\geq\int_{B_R}\left[u_{10}(x)+u_{20}(x)\right]\phi(x,0)\mathrm{d}x$$
$$\geq\int_{B_{R_0}}\left[u_{10}(x)+u_{20}(x)\right]\phi(x,0)\mathrm{d}x+\int_{B_R/B_{R_0}}\frac{C-\varepsilon}{1+|x|^{\alpha}}\mathrm{d}x\geq C\left(1+R^{N-\alpha}\right). \quad (4.12)$$

(4.12)式蕴含 $\alpha\geq 2m\cdot\max\left\{\frac{p_1+1}{p_1p_2-1},\frac{p_2+1}{p_1p_2-1}\right\}$ 这是一个矛盾。定理 4.1 证毕。

定理 4.2 设 $m>1, p_i>1$ 以及 $u_{i0}\in L^1_{loc}(R^N), i=1,2$ 。如果 $u_{i0}>0,\ u_{10}+u_{20}=\frac{\lambda}{1+|x|^{\alpha}},\ \lambda>0,\ x\in R^N$, 以及 $\alpha=2m\cdot\max\left\{\frac{p_1+1}{p_1p_2-1},\frac{p_2+1}{p_1p_2-1}\right\}$. 则存在常数 $\lambda_0>0$，使得如果问题(1.1)存在一个弱解，则必有 $\lambda<\lambda_0$。

证明：设定理中的条件成立。在(4.12)式中取 $R=\lambda$，得

$$C\left[\lambda^{N-2m\cdot\frac{p_1+1}{p_1p_2-1}}+\lambda^{N-2m\cdot\frac{p_2+1}{p_1p_2-1}}\right]\geq\int_{R^N}\left[u_{10}(x)+u_{20}(x)\right]\phi(x,0)\mathrm{d}x\geq\int_{B_\lambda}\left[u_{10}(x)+u_{20}(x)\right]\phi(x,0)\mathrm{d}x$$
$$=\lambda\int_{B_\lambda}\frac{1}{1+|x|^{\alpha}}\mathrm{d}x=C\left(1+\lambda^{1+N-\alpha}\right)$$

该不等式蕴含 $\lambda\leq C$ 。定理 4.2 证毕。

参考文献 (References)

[1] L. A. Peletier, W. C. Troy. Spacial patterns: Higher order models in physics and mechanics. Boston-Berlin: Birkhä Auser, 2001.
[2] C. J. Budd, V. A. Galaktionov and J. F. Williams. Self-similar blow-up in higher-order semilinear parabolic equations. SIAM Journal on Mathematics, 2004, 64(5): 1775-1809.
[3] G. Caristi, E. Mitidieri. Existence and nonexistence of global solutions of higher-order parobolic problems with slow decay initial data. Journal of Mathematics Analysis and Application, 2003, 279(2): 710-722.
[4] S. B. Cui. Local and global existence of solutions to semilinear parabolic initial value problems. Nonlinear Analysis, 2001, 43(3): 293-323.
[5] F. Gazzola, H-C. Grunau. Global solutions for superlinear parabolic equations involving the biharmonic operator for initial data with optimal slow decay. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2007, 30(3): 389-415.
[6] V. A. Galaktionov, P. J. Harwin. Non-uniqueness and global Similarity solutions for a higher-order semilinear parabolic equation. Nonlinearity, 2005, 18: 717-746.
[7] V. A. Galaktionov, S. I. Pohozaev. Existence and blow-up for higher-order semilinear parabolic equations: Majorizing order-preserving operators. Indiana University Mathematics Journal, 2002, 51: 1321-1338.
[8] V. A. Galaktionov. On a spectrum of blow-up patterns for a higher-order semilinear parabolic equations. Proceedings: Royal Society of London, A., 2001, 457: 1-21.
[9] V. A. Galaktionov, J. F. Williams. On very singular sililarity solutions of a higher-order semilinear parabolic equation. Nonlinearity, 2004, 17: 1075-1099.
[10] P. Y. H. Pang, F. Q. Sun and M. X. Wang. Existence and Non-existence of global solutions for a higher-order semilinear paraboic system. Indiana University Mathematics Journal, 2006, 55(3): 1113-1134.
[11] F. Q. Sun. Life span of blow-up solutions for a higher-order semilinear parabolic equation. Electronic Journal of Differential Equations, 2010, 17: 1-9.
[12] F.Q. Sun, F. Li and X. Q. Jia. Asymptotically self-similar global solutions for a higher-order semilinear parabolic system. Journal of Partial Differential Equations, 2009, 22(3): 282-298.
[13] 孙福芹, 王明新. 高阶半线性抛物型方程组的生命跨度[J]. 数学年刊, 2006, 27(1): 27-38.
[14] H. Fujita. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t=\Delta u+u^{1+\alpha}$. Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo, 1966, 13(2): 105-113.
[15] M. E. Taylor. Partial differential Equations III: Nonlinear equations. New York: Springer-Verlag, 1996: 272-276.
[16] Q. S. Zhang. Global existence and local continuity of solutions for semilinear parabolic equations. Communications in Partial Differential Equations, 1997, 22: 1529-1557.