Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 53-61
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.22010 Published Online April 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

The Recognition of Degenerate Critical Points of Smooth Functions*

Wei Wang[1], Yangcheng Li[2]

[1]College of Information Engineering, Tarim University, Alar
[2]School of Mathematical Science and Computing Technology, Central South University, Changsha
Email: wangwei.math@gmail.com, liyangcheng@sohu.com

Received: Feb. 12th, 2012; revised: Feb. 24th, 2012; accepted: Mar. 6th, 2012

Abstract: By some methods and techniques developed from bifurcation theory, this paper investigates the recognition problem of degenerate critical points of smooth functions. Each one of such critical points lies on a sub-manifold included in domain of function. The so-called $\Re_H$-equivalence theory is established, including a theorem to insure $\Re_H$-equivalence between two function-germs, an exact formula for higher-order terms, a characterization of low-order terms, and so on.

Keywords: Recognition Problems; Intrinsic Ideals; Higher-Order Terms

光滑函数的退化临界点的识别*

王　伟[1]，李养成[2]

[1]塔里木大学信息工程学院，阿拉尔
[2]中南大学数学科学与计算技术学院，长沙
Email: wangwei.math@gmail.com, liyangcheng@sohu.com

收稿日期：2012 年 2 月 12 日；修回日期：2012 年 2 月 24 日；录用日期：2012 年 3 月 6 日

摘　要：本文应用分歧理论所发展的一些方法与技巧，研究位于子流形上的光滑函数的退化临界点的识别问题，建立了$\Re_H$-等价理论，包括两函数芽$\Re_H$-等价的判别定理，识别问题高阶项的精确表达形式及低阶项的刻画等。

关键词：识别问题；内蕴理想；高阶项

1. 引言

V. I. Arnold 在文献[1]中利用单李群为研究工具，对位于子流形上的光滑函数的退化临界点进行了深入探讨，得到了称之为简单临界点的分类，它就是文中定理 1。而文中定理 7 则给出了函数在子流形上的退化临界点的更一般的分类结果。我们感兴趣的一个问题是所谓识别问题，即光滑函数位于子流形上的退化临界点附近在什么条件下等价于给定的标准形式？为解上述识别问题，本文将利用奇点理论与分歧理论之间的密切联系。M. Golubitsky 和 D. G. Schaeffer 在文献[2,3]中引入了应用奇点理论方法研究分歧问题的思想，使得分歧理论得到迅猛发展。我们试图应用分歧理论中所发展的一些方法与技巧(见文献[4])来考虑上述识别问题的解。本文在引入群$\Re_H$、轨道切空间以及$\Re_H$-内蕴理想等概念后，建立起$\Re_H$-等价理论并给出识别的例子。定理 3.1 利用轨道切空间给出两函数芽$\Re_H$-等价的判别方法，定理 3.2 刻画了关于$f \in \mu^2$的识别问题的低阶项并提供了关于中间项的有用信息，定理 3.5 精确描述了函数芽f在群$\Re_H$作用下的识别问题的高阶项。

*资助信息：国家自然科学基金资助(10971060)。

参照文献[1]，本文讨论的对象限制为光滑的二元函数芽。文中出现的概念与记号如未解释，请参看文献[4]或[5]。

2. 预备知识

设 $(H,0)$ 是 R^2 中包含原点的一维光滑子流形芽，不失一般性，取 $H=\{(x,y)\in R^2 \mid y=0\}$。设 $\varphi:(R^2,0)\to(R^2,0)$ 为微分同胚芽，它保持子流形芽 $(H,0)$ 不变，因而有 $\varphi(H)\subset H$。记

$$\Re_H=\left\{\varphi:(R^2,0)\to(R^2,0)\text{为微分同胚芽}\,\middle|\,\varphi(H)\subset H\right\},$$

它是 J. Mather 所引入的右等价群 $\Re$ (见文献[5])的正规子群。

定义 2.1 设 $f,g:(R^2,0)\to(R,0)$ 为两个光滑函数芽。如果存在 $\varphi\in\Re_H$ 使得 $g=f\circ\varphi$，我们说函数芽 f 与 g 是 $\Re_H$-等价的，记为 $f\sim g$。它表示存在保原点的局部微分同胚 $\varphi(x,y)=(X(x,y),Y(x,y))$，满足 $Y(x,0)\equiv 0$，$x\in(R,0)$，使得 $g(x,y)=f(X(x,y),Y(x,y))$。

解关于 $f\in\mu_{x,y}$ 的识别问题实际上就是刻画 f 在等价群 $\Re_H$ 作用下的轨道特征。

定义 2.2 设 $f\in\mu_{x,y}$。在群 $\Re_H$ 作用下于 f 处的轨道切空间 $T\Re_H(f)$ 定义为由所有可表示为下列形式的 $p(x,y)$ 组成的集合，

$$p(x,y)=a(x,y)f_x(x,y)+b(x,y)f_y(x,y),\quad a,b\in\varepsilon_{x,y},a(0,0)=0,b(x,0)=0,$$

因此 $T\Re_H(f)$ 是 $\varepsilon_{x,y}$ 中的一个理想，它由 xf_x,yf_x 及 yf_y 所生成，即

$$T\Re_H(f)=\left\langle xf_x,yf_x,yf_y\right\rangle_{\varepsilon_{x,y}}. \tag{2.1}$$

考虑坐标变换 $\Phi(x,y)=(X(x,y),Y(x,y))$，其中 $\Phi(0,0)=(0,0)$。定义 Φ 的拉回映射 $\Phi^*:\varepsilon_{x,y}\to\varepsilon_{x,y}$ 为 $\Phi^*(f)(x,y)=f(\Phi(x,y))$。$\Phi^*$ 具有下列性质：$\Phi^*(f+g)=\Phi^*(f)+\Phi^*(g)$, $\Phi^*(f\bullet g)=\Phi^*(f)\bullet\Phi^*(g)$，即 Φ^* 是一个环同态。若 Φ 是一个可逆坐标变换，则 Φ^* 是一个环同构。事实上，不难验证 $(\Phi^*)^{-1}=(\Phi^{-1})^*$。假设 Ω 是 $\varepsilon_{x,y}$ 的一个向量子空间，那么 $\Phi^*(\Omega)=\{\Phi^*(f)\mid f\in\Omega\}$ 也是 $\varepsilon_{x,y}$ 的一个向量子空间。倘若 Ω 是 $\varepsilon_{x,y}$ 中的一个理想，那么 $\Phi^*(\Omega)$ 也是。

参照[4]中第 2 章，引理 12.2 的证明方法，可以证明：若 $g\sim f$，因而存在 $\varphi\in\Re_H$ 使得 $g=\varphi^*(f)$，则

$$T\Re_H(g)=\varphi^*(T\Re_H(f)). \tag{2.2}$$

定义 2.3 设 Ω 为 $\varepsilon_{x,y}$ 中的理想。若 Ω 在群 $\Re_H$ 作用下不变，则称其为 $\Re_H$-内蕴理想，简说 Ω 是内蕴理想。等价地，下面的蕴含关系成立：对于 $f,g\in\varepsilon_{x,y}$，$f\in\Omega$, 且 $g\sim f\Rightarrow g\in\Omega$。

设 Ω 是 $\varepsilon_{x,y}$ 中具有有限余维的理想，我们把包含在 Ω 中的最大内蕴理想称为理想 Ω 的内蕴部分，记为 $\operatorname{Itr}\Omega$。易见，$\operatorname{Itr}\Omega=\bigcap_{\varphi\in\Re_H}\varphi^*(\Omega)$。另外，用 $\Omega^\perp$ 表示 $\varepsilon_{x,y}$ 的一个有限维向量子空间，它是由不属于 Ω 的诸单项式所组成。对于 $f\in\varepsilon_{x,y}$，用 $S(f)$ 表示含有 f 的最小内蕴理想，它可视为所有含有 f 的内蕴理想的交。

利用文献[4]，第 2 章中相关命题的证明方法与技巧，可以得到下面三个命题。

命题 2.4 设 Ω 是 $\varepsilon_{x,y}$ 中具有有限余维的内蕴理想。若 $f\in\Omega$，则 $xf_x,yf_x\ yf_y$ 均属于 Ω。

命题 2.5 设 Ω 是 $\varepsilon_{x,y}$ 中具有有限余维的内蕴理想，则 Ω 可表示为

$$\Omega=\mu^k+\mu^{k_1}\left\langle y^{l_1}\right\rangle+\cdots+\mu^{k_s}\left\langle y^{l_s}\right\rangle, \tag{2.3}$$

其中 k,k_i,l_i 为非负整数，且合于

$$0<l_1<\cdots<l_s\le k_s+l_s<\cdots<k_1+l_1<k. \tag{2.4}$$

此时称 $x^k,x^{k_1}y^{l_1},\cdots,x^{k_s}y^{l_s}$ 为 Ω 的内蕴生成元。

命题 2.6 设 $f\in\varepsilon_{x,y}$ 具有有限余维，即假定 $T\Re_H(f)$ 在 $\varepsilon_{x,y}$ 中具有有限余维，那么

1) $S(f)$ 在 $\varepsilon_{x,y}$ 中的余维数有限，并且当 $g\sim f$ 时，$S(g)=S(f)$,

2) $S(f)=\sum\limits_{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)}\left\{\mu^{\alpha_1}\left\langle y^{\alpha_2}\right\rangle \middle| D^{\alpha}f(0,0)\neq 0\right\}$. (2.5)

定义 2.7 设 $f\in\mu^2$ 具有有限余维。把满足下列条件的 $p\in\varepsilon_{x,y}$ 所成之集记为 $P(f)$，该条件是

1) $p\in \mathrm{Itr}\, T\Re_H(f)$,

2) 任取 $g\in\varepsilon_{x,y}$。若 $g\sim f$，则对任意 $t\in R$，有 $T\Re_H(g+tp)=T\Re_H(g)$。

$P(f)$ 的成员叫做 f 关于群 $\Re_H$ 作用而言的高阶项。读者不难证明下列

命题 2.8 设 $f\in\mu^2$ 具有有限余维，则 $P(f)$ 是内蕴理想，并且当 $g\sim f$ 时，$P(g)=P(f)$。

引理 2.9[6] 设 $f,g\in\varepsilon_{x,y}$ 且理想 $\langle f,g\rangle$ 在 $\varepsilon_{x,y}$ 中具有有限余维。假定存在 $\alpha,\beta\in\varepsilon_{x,y}$ 使得

$$\alpha(x,y)f(x,y)+\beta(x,y)g(x,y)=0 \text{ 对所有 } (x,y)\in\left(R^2,0\right),$$

那么对任意正整数 k，存在 $Q(x,y)\in\varepsilon_{x,y}$ 使得下面二式成立：

$$\alpha(x,y)\equiv -Q(x,y)g(x,y)\qquad \mathrm{mod}\,\mu^{k+1},$$
$$\beta(x,y)\equiv +Q(x,y)f(x,y)\qquad \mathrm{mod}\,\mu^{k+1}.$$

3. 主要结果

定理 3.1 设 $f\in\varepsilon_{x,y}$。若 $p\in T\Re_H(f)$，且 $T\Re_H(f+tp)=T\Re_H(f)$ 对所有 $t\in[0,1]$ 皆成立，则 $f+tp$ 与 f 是 $\Re_H$-等价的。

证明 我们将证明分成以下几步来作。

1) 若 $p\in T\Re_H(f)$，并且

$$T\Re_H(f+tp)=T\Re_H(f), \tag{3.1}$$

对充分接近于 0 的所有 t 值成立，则存在 $a,b\in\varepsilon_{x,y,t}$ 使得

$$p(x,y)=a(x,y,t)F_x(x,y,t)+b(x,y,t)F_y(x,y,t), \tag{3.2}$$

其中 $F(x,y,t)=f(x,y)+tp(x,y)$，并且 $a(0,0,t)\equiv 0, b(x,0,t)\equiv 0$。

事实上，由 $p\in T\Re_H(f)$ 知，存在 $A_1,B_1,C_1\in\varepsilon_{x,y}$ 使得

$$p=A_1xf_x+B_1yf_x+C_1yf_y. \tag{3.3}$$

又据假设条件，存在足够小的 $t_0\neq 0$ 使得(3.1)式成立，因而 $T\Re_H(f+t_0p)$ 的生成元可写成 $T\Re_H(f)$ 的生成元的线性组合，于是存在 $A_i,B_i,C_i\in\varepsilon_{x,y}(i=2,3,4)$，使得

$$\begin{aligned} xf_x+t_0xp_x&=A_2xf_x+B_2yf_x+C_2yf_y,\\ yf_x+t_0yp_x&=A_3xf_x+B_3yf_x+C_3yf_y,\\ yf_y+t_0yp_y&=A_4xf_x+B_4yf_x+C_4yf_y.\end{aligned} \tag{3.4}$$

引入记号：对任意 $h\in\varepsilon_{x,y}$，令 $v(h)=\begin{pmatrix}h & xh_x & yh_x & yh_y\end{pmatrix}^T$，其中“$T$”表转置，则(3.3)式与(3.4)式可以用矩阵方程表示为 $v(p)=\boldsymbol{Q}v(f)$，其中 $\boldsymbol{Q}$ 是 4×4 矩阵，其元素均为 $\varepsilon_{x,y}$ 中的光滑函数芽，并且 $\boldsymbol{Q}$ 的第一列元素全为零。因 $F=f+tp$，故 $v(f)=v(F)-tv(p)$，从而有 $(\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{Q})v(p)=\boldsymbol{Q}v(F)$，其中 $\boldsymbol{I}$ 是 4×4 单位矩阵。当 t 充分小时，$I+t\boldsymbol{Q}$ 是一个可逆 4×4 矩阵，其元素为 $\varepsilon_{x,y,t}$ 中的芽，于是有 $v(p)=(\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{Q}v(F)$。注意到 $\boldsymbol{Q}$ 的第一列的元素全为零，所以

$$p=\alpha xF_x+\beta yF_x+\gamma yF_y,\qquad \alpha,\beta,\gamma\in\varepsilon_{x,y,t}.$$

令 $a=\alpha x+\beta y, b=\gamma y$，这样便得到(3.2)式。

2) 同样在 1)的假设条件下，即 $p \in T\Re_H(f)$，且(3.1)式对接近于 0 的 t 值成立，则对充分接近于 0 的所有 t，$f+tp$ 必 $\Re_H$-等价于 f。理由如下：

因为(3.2)式对函数芽成立，因此这一关系式对于点 $(0,0,0)$ 在 $xyt-$ 空间中的某一邻域内成立。选取区间 K,L,M 使得(3.2)式在 $K\times L\times M$ 上成立，我们需证对充分接近于 0 的每一 t，$F(\cdot,\cdot,t)$ 是 $\Re_H$-等价于 f，因而需构作光滑映射 $X(x,y,t),Y(x,y,t)$ 使得

$$
\begin{aligned}
&(1) F\left(X(x,y,t),Y(x,y,t),t\right)=f(x,y),\\
&(2) X(0,0,t)\equiv 0, X(x,y,0)\equiv x,\\
&(3) Y(x,0,t)\equiv 0, Y(x,y,0)\equiv y.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[F\left(X(x,y,t),Y(x,y,t),t\right)\right]=&F_x\left(X(x,y,t),Y(x,y,t),t\right)\cdot X_t(x,y,t)\\
&+F_y\left(X(x,y,t),Y(x,y,t),t\right)\cdot Y_t(x,y,t)\\
&+F_t\left(X(x,y,t),Y(x,y,t),t\right),
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

现考虑下列常微分方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(x,y,t)=-a\left(X(x,y,t),Y(x,y,t),t\right),\\
\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(x,y,t)=-b\left(X(x,y,t),Y(x,y,t),t\right),\\
X(x,y,0)=x,\quad Y(x,y,0)=y.
\end{cases}
\tag{3.7}
$$

根据常微分方程组的基本定理(见文献[7])，存在区间 K_0,L_0 及正实数 ε，使得 $(0,0)\in K_0\times L_0\subset K\times L$，$(-\varepsilon,\varepsilon)\subset M$，并且在 $K_0\times L_0\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上，方程组(3.7)有唯一光滑解 $\left(X(x,y,t),Y(x,y,t)\right)$。特别，$X(0,0,t)\equiv 0$，$Y(0,0,t)\equiv 0$ 是方程组(3.7)的解，$Y(x,0,t)\equiv 0$ 满足方程组(3.7)中的第 2 个方程。

将方程组(3.7)的解 X,Y 代入(3.6)式并利用 $F=f+tp$，我们得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[F\left(X(x,y,t),Y(x,y,t),t\right)\right]=&-a\left(X(x,y,t),Y(x,y,t),t\right)\cdot F_x\left(X(x,y,t),Y(x,y,t),t\right)\\
&-b\left(X(x,y,t),Y(x,y,t),t\right)\cdot F_y\left(X(x,y,t),Y(x,y,t),t\right)+p\left(X(x,y,t),Y(x,y,t)\right).
\end{aligned}
$$

由(3.2)式立即有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[F\left(X(x,y,t),Y(x,y,t),t\right)\right]\equiv 0$，于是有

$$
F\left(X(x,y,t),Y(x,y,t),t\right)=F\left(X(x,y,0),Y(x,y,0),0\right)=f(x,y),
$$

从而(3.5)式成立。

3) 由 2)知，本定理的局部形式已成立。利用区间[0,1]的连通性或紧致性容易导出本定理，细节留给读者或参看文献[4]，p. 98。

由命题 2.6 立即可证明下列。

定理 3.2 设 $f\in\mu^2$ 具有有限余维，且 $g\sim f$，则

1) 对每一个单项式 $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}\in S(f)^{\perp}$，有 $D^{\alpha}g(0,0)=0,\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$，

2) 对于 $S(f)$ 的每一个内蕴生成元 $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}$，有 $D^{\alpha}g(0,0)\neq 0,\quad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$。

该定理刻画了关于 $f\in\mu^2$ 的识别问题的低阶项并提供了关于中间项的有用信息。下面讨论高阶项，为此需作如下准备。

引理 3.3 设 $f\in\mu^2$ 具有有限余维，Ω 是 $\varepsilon_{x,y}$ 中的一个内蕴理想且 $\Omega\subset T\Re_H(f)$。假定对于每一 $p\in\Omega$，有 $T\Re_H(f+p)=T\Re_H(f)$，那么 $\Omega\subset \mathrm{P}(f)$。

证明 因 Ω 是 $\varepsilon_{x,y}$ 中的一个内蕴理想且 $\Omega\subset T\Re_H(f)$，故 $\Omega\subset \mathrm{Itr}\,T\Re_H(f)$，这说明 Ω 中的成员满足定义 2.7 中条件 1)，以下验证条件 2)。

设 $p\in\Omega$，且 $g\sim f$ 因而存在 $\varphi\in\Re_H$ 使得 $g=\varphi^*(f)$，需证对任意 $t\in R$，$T\Re_H(g+tp)=T\Re_H(g)$。事实上，

$$T\Re_H(g+tp)=T\Re_H\left(\varphi^*\left(f+\left(\varphi^{-1}\right)^*(tp)\right)\right)=\varphi^*T\Re_H\left(f+\left(\varphi^{-1}\right)^*(tp)\right). \tag{3.8}$$

其中最后一个等式是由于(2.2)式。

注意到 Ω 是内蕴理想，故 $\left(\varphi^{-1}\right)^*(tp)\in\Omega$。依假设条件，

$$T\Re_H\left(f+\left(\varphi^{-1}\right)^*(tp)\right)=T\Re_H(f). \tag{3.9}$$

由(3.8)，(3.9)两式，再利用(2.2)式便得到 $T\Re_H(g+tp)=T\Re_H(g)$，故 $p\in\mathrm{P}(f)$，从而 $\Omega\subset\mathrm{P}(f)$。

设 $f\in\varepsilon_{x,y}$，令 $\varepsilon_{x,y}$ 中的理想

$$\Theta(f)=\left\langle x^2f_x,yf_x,xyf_y,y^2f_y\right\rangle=\mu\cdot T\Re_H(f)+R\{yf_x\}.$$

不难证明：假若 $\varphi\in\Re_H$ 满足 $g=\varphi^*(f)$，那么 $\Theta(g)=\varphi^*(\Theta(f))$。

引理 3.4 设 $f\in\mu^2$ 具有有限余维，则

1) $\mathrm{Itr}\,\mu\cdot T\Re_H(f)\subset P(f)$，

2) 由 $p\in\mathrm{Itr}\,\Theta(f)$ 可推得 $yp_x\in\mu\cdot T\Re_H(f)$。

证明 1) 令 $\Omega=\mathrm{Itr}\,\mu\cdot T\Re_H(f)$。依引理 3.3，只需证明：对每一 $p\in\Omega$，有 $T\Re_H(f+p)=T\Re_H(f)$ 即可。因为 Ω 是一个内蕴理想并且具有有限余维，据命题 2.4，若 $p\in\Omega$，则 xp_x,yp_x,yp_y 均属于 Ω。而 $\Omega\subset\mu\cdot T\Re_H(f)$，因此 xp_x,yp_x,yp_y 均属于 $\mu\cdot T\Re_H(f)$。应用 Nakayama 引理的一个推论(见[4])可以导出

$$T\Re_H(f+p)=\left\langle xf_x+xp_x,yf_x+yp_x,yf_y+yp_y\right\rangle=\left\langle xf_x,yf_x,yf_y\right\rangle=T\Re_H(f),$$

因此据引理 3.3，有 $\mathrm{Itr}\,\mu\cdot T\Re_H(f)\subset\mathrm{P}(f)$。

2) 因为 $T\Re_H(f)$ 具有有限余维，易见 $\Theta(f)$ 也具有有限余维，因此 $\mathrm{Itr}\,\Theta(f)$ 是一个具有有限余维的内蕴理想。据命题 2.4，若 $p\in\mathrm{Itr}\,\Theta(f)$，则

$$xp_x,yp_x\in\mathrm{Itr}\,\Theta(f)\subset\Theta(f)=\left\langle x^2f_x,yf_x,xyf_y,y^2f_y\right\rangle,$$

从而存在 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\varepsilon_{x,y}$ 使得

$$\begin{aligned}xp_x&=\alpha f_x+\beta yf_y,\\ yp_x&=\gamma f_x+\delta yf_y,\end{aligned} \tag{3.10}$$

其中 $\alpha(0,0)=\alpha_x(0,0)=\beta(0,0)=0,\gamma(0,0)=\gamma_x(0,0)=\delta(0,0)=0$。若能证明 $\gamma_y(0,0)=0$，则从(3.10)的第二式可见 $yp_x\in\mu\cdot T\Re_H(f)$。

将(3.10)式中的第一式乘以 y，第二式乘以 x，然后相减得

$$(y\alpha-x\gamma)f_x+(y\beta-x\delta)yf_y=0.$$

注意到理想 $\left\langle f_x,yf_y\right\rangle\supset T\Re_H(f)$ 因而在 $\varepsilon_{x,y}$ 中具有有限余维，由引理 2.9 可知，存在 $Q(x,y)\in\varepsilon_{x,y}$ 使得

$$\begin{aligned} y\alpha - x\gamma &\equiv -Qyf_y \qquad \bmod \mu^k, \\ y\beta - x\delta &\equiv Qf_x \qquad \bmod \mu^k, \end{aligned} \tag{3.11}$$

其中正整数 k 可取足够大。

对(3.11)的第一式两边求关于 x, y 的二阶混合偏导数并在原点取值，得

$$-\gamma_y(0,0) = -Q(0,0) f_{xy}(0,0).$$

再对(3.11)的第二式两边求关于 y 的一阶偏导数并在原点取值，注意到 $\beta(0,0)=0, f_x(0,0)=0$，得 $Q(0,0) f_{xy}(0,0)=0$，从而 $\gamma_y(0,0)=0$，2)得证。

定理 3.5 设 $f \in \mu^2$ 具有有限余维，则 $\mathrm{Itr}\,\Theta(f) = \mathrm{P}(f)$。

证明 1) 首先证明 $\mathrm{Itr}\,\Theta(f) \subset P(f)$。因为 $\mathrm{Itr}\,\Theta(f)$ 是一个具有有限余维的内蕴理想，显然有 $\mathrm{Itr}\,\Theta(f) \subset T\Re_H(f)$。依引理 3.3 需证明：对于任意 $p \in \mathrm{Itr}\,\Theta(f)$，$T\Re_H(f+p) = T\Re_H(f)$。

据命题 2.4，当 $p \in \mathrm{Itr}\,\Theta(f)$ 时，$xp_x, yp_x, yp_y \in \mathrm{Itr}\,\Theta(f) \subset \Theta(f)$，因而存在 $A_i, B_i, C_i \in \varepsilon_{x,y}\ (i=1,2,3)$，合于

$$\begin{aligned} yp_y &= A_1 yf_y + B_1 xf_x + C_1 yf_x, \\ xp_x &= A_2 yf_y + B_2 xf_x + C_2 yf_x, \\ yp_x &= A_3 yf_y + B_3 xf_x + C_3 yf_x, \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中 $A_i(0,0) = B_i(0,0) = 0 (i=1,2,3)$。此外，由引理 3.4，2)知，$C_3(0,0)=0$。我们可以将(3.12)式写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} yp_y \\ xp_x \\ yp_x \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}(x,y) \begin{pmatrix} yf_y \\ xf_x \\ yf_x \end{pmatrix},$$

其中 3×3 矩阵 $\boldsymbol{Q}(0,0)$ 是一个上三角矩阵，其对角线上的元素全为零。进而有

$$\begin{pmatrix} y(f+p)_y \\ x(f+p)_x \\ y(f+p)_x \end{pmatrix} = (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}) \begin{pmatrix} yf_y \\ xf_x \\ yf_x \end{pmatrix},$$

这里 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}$ 在点 $(0,0)$ 的某一邻域内是可逆的。上式表明 $T\Re_H(f+p)$ 及 $T\Re_H(f)$ 的生成元是由一个可逆的线性变换相关联，因此 $T\Re_H(f+p) = T\Re_H(f)$。据引理 3.3，$\mathrm{Itr}\,\Theta(f) \subset \mathrm{P}(f)$。

2) 其次证明 $\mathrm{P}(f) \subset \mathrm{Itr}\,\Theta(f)$。任取 $p \in P(f)$，由高阶项的定义知 p 满足定理 3.1 的条件，故存在一个光滑依赖于 t 的 $\Re_H-$等价变换，使得

$$f(x,y) + tp(x,y) = f\big(X(x,y,t), Y(x,y,t)\big), \tag{3.13}$$

$$X(x,y,0) \equiv x, Y(x,y,0) \equiv y, \tag{3.14}$$

$$X(0,0,t) \equiv 0, Y(x,0,t) \equiv 0, \tag{3.15}$$

将(3.13)关于 t 求导并在 $t=0$ 处取值，借助于(3.14)得

$$p(x,y) = f_x(x,y)\dot{X}(x,y,0) + f_y(x,y)\dot{Y}(x,y,0),$$

其中 $\dot{X}$ 表示 X 关于 t 求导。由(3.15)式知，在环 $\varepsilon_{x,y}$ 中，$\dot{X}(x,y,0) \in \langle x,y \rangle,\ \dot{Y}(x,y,0) \in \langle y \rangle$。

如果可以证得 $\dot{X}_x(0,0,0) = \dot{Y}_y(0,0,0) = 0$，那么这说明 $\dot{X}(x,y,0) \in \langle x^2, y \rangle,\ \dot{Y}(x,y,0) \in \langle xy, y^2 \rangle$, 从而有 $p(x,y) \in \langle x^2 f_x, yf_x, xyf_y, y^2 f_y \rangle$。由 p 的任意性知，$P(f) \subset \Theta(f)$。而 $P(f)$ 是内蕴理想，因此有 $P(f) \subset \mathrm{Itr}\,\Theta(f)$。实际上，我们将证明

$$X_x(0,0,t)\equiv 1,\ Y_y(0,0,t)\equiv 1. \tag{3.16}$$

设包含 f 的最小内蕴理想具有如下分解

$$S(f)=\mu^k+\mu^{k_1}\langle y^{l_1}\rangle+\cdots+\mu^{k_s}\langle y^{l_s}\rangle. \tag{3.17}$$

且其中的指数满足(2.4)式。定理 3.2 表明

$$f(x,0)\equiv ax^k \bmod \mu^{k+1},$$

此处 $a\neq 0$。因 x^k 是 $S(f)$ 的内蕴生成元，故 $x^k\notin \mathrm{P}(f)$，从而有 $p(x,0)\in\mu^{k+1}$。

现计算(3.13)式左右两端中 x^k 的系数。用 *LHS*，*RHS* 分别表示左端与右端函数(为简单起见，以下省略其中变量 *t*)，我们有

$$LHS(x,0)\equiv ax^k \bmod \mu^{k+1},$$

$$RHS(x,0)\equiv aX^k(x,0)\ \bmod \mu^{k+1}\equiv aX_x^k(0,0)x^k \bmod \mu^{k+1},$$

故得关系式

$$X_x^k(0,0)=1, \tag{3.18}$$

即 $X_x^k(0,0,t)=1$。而由(3.14)式知，当 $t=0$ 时，$X_x(0,0,0)=1$。由连续性知，当 t 充分小时，亦有 $X_x(0,0,t)=1$。

为了得到(3.16)的后一等式,针对 $S(f)$ 的分解式，分两种情形讨论。

情形 1： $s>0$。取 $H=\mu^{k_1+l_1+1}+\langle y\rangle^{l_1+1}$，则 H 是不含 $x^{k_1}y^{l_1}$ 的最大内蕴理想。由于 $x^{k_1}y^{l_1}$ 是 $S(f)$ 的内蕴生成元，故 $x^{k_1}y^{l_1}\notin P(f)$。又由于 $S(f)$ 的其它内蕴生成元都属于 H，且 $P(f)$ 是内蕴理想，故 $P(f)\subset H$。考虑(3.13)式，得到

$$LHS\equiv bx^{k_1}y^{l_1} \bmod H,$$

此处 $b\neq 0$。又

$$RHS\equiv bX^{k_1}Y^{l_1} \bmod H\equiv bX_x^{k_1}(0,0)Y_y^{l_1}(0,0)x^{k_1}y^{l_1} \bmod H,$$

故得关系式

$$X_x^{k_1}(0,0)Y_y^{l_1}(0,0)=1. \tag{3.19}$$

由于已证得 $X_x(0,0)=1$，因此 $Y_y^{l_1}(0,0)=1$。类似于(3.18)式的讨论，可得 $Y_y(0,0,t)=1$。

情形 2： $s=0$。将 μ^k 中的单项式按下述方式“从小到大”进行排列

$$x^k,x^{k-1}y,\cdots,y^k,x^{k+1},x^ky,\cdots,y^{k+1},x^{k+2},\cdots. \tag{3.20}$$

设 $g\sim f$，则 $S(g)=S(f)=\mu^k$。按照上述排列，可将 g 按“从小到大”顺序展开成如下形式

$$g=ax^k+bx^{k_1}y^{l_1}+\cdots. \tag{3.21}$$

此处 $a\neq 0,b\neq 0$。在所有与 f 等价的函数芽中，选取这样的 g，使得(3.21)式中项 $x^{k_1}y^{l_1}$ 在排列(3.20)的意义下“最大”。我们将证明 $\mathrm{Itr}\,\Theta(g)\supset P(g)$。注意到 $g\sim f$ 蕴含 $\mathrm{Itr}\,\Theta(g)=\mathrm{Itr}\,\Theta(f),P(g)=P(f)$，故结论成立。

由 g 的构造知 $x^{k_1}y^{l_1}\notin P(g)$。取 $H=\mu^{k_1+l_1+1}+<y>^{l_1+1}$，这是不含 $x^{k_1}y^{l_1}$ 的最大内蕴理想，故 $P(g)\subset H$。考虑(3.13)式(其中的 f 换为 g)，有

$$LHS\equiv ax^k+bx^{k_1}y^{l_1} \bmod H. \tag{3.22}$$

$$RHS\equiv aX^k+bX^{k_1}Y^{l_1} \bmod H\equiv aX^k+bX_x^{k_1}(0,0)Y_y^{l_1}(0,0)x^{k_1}y^{l_1} \bmod H. \tag{3.23}$$

若能证得 X^k 中 $x^{k_1}y^{l_1}$ 的系数为零，则比较 $x^{k_1}y^{l_1}$ 的系数，可得关系式(3.19)。若还有 $l_1>0$，则 $Y_y(0,0)=1$。于是

归结为证明下列

引理 3.6 在(3.23)式中 $l_1 > 0$，且 X^k 中 $x^{k_1}y^{l_1}$ 的系数为零。

证明 用反证法不难证明 $k_1 \le k-2$。而 $k_1 + l_1 \ge k$，因此 $l_1 \ge 2$。其次用归纳法证明：对于任意的不超过 $k_1 + l_1 - k + 2$ 的正整数 j，存在二元函数芽 Z，使得 $X(x,y) \equiv xZ(x,y) \bmod \mu^j$。

事实上，当 $j=1$ 时，结论显然成立(因 $X \in \mu$)。假设 $j < k_1 + l_1 - k + 2$ 时，结论成立。如有必要，适当地修改 Z，可使

$$X \equiv xZ + cy^j \bmod \mu^{j+1}, \tag{3.24}$$

其中 $c \in R$，从而有 $X^k \equiv \left(xZ + cy^j\right)^k \bmod \mu^{j+k}$。

另一方面，借助于二项式定理可知 $\left(xZ + cy^j\right)^k \equiv (xZ)^k + k(xZ)^{k-1}cy^j \bmod \left\langle y^{2j} \right\rangle$，故有

$$X^k \equiv (xZ)^k + k(xZ)^{k-1}cy^j \bmod \left(\mu^{j+k} + \left\langle y^{2j} \right\rangle\right). \tag{3.25}$$

由于 $k_1 \le k-2$ 及 $j < k_1 + l_1 - k + 2$，可得 $j < l_1$ 并且 $(k-1) + j \le k_1 + l_1$。而 $H = \mu^{k_1+l_1+1} + < y >^{l_1+1}$ 因而 $x^{k-1}y^j \notin H$，(3.22)式表明 LHS 中 $x^{k-1}y^j$ 项的系数为零。现考虑(3.23)式 RHS 中 $x^{k-1}y^j$ 项的系数。因 $j < l_1$，由(3.25)式可知 RHS 中 $x^{k-1}y^j$ 的系数为 $ak\left(Z(0,0)\right)^{k-1}c = ak\left(X_x(0,0)\right)^{k-1}c$。比较 LHS 及 RHS 中 $x^{k-1}y^j$ 项的系数，立得 $c=0$。于是(3.24)式变为 $X \equiv xZ \bmod \mu^{j+1}$，表明结论对 $j+1$ 也成立。

现取 $j = k_1 + l_1 - k + 2$，则存在二元函数芽 Z，使得 $X(x,y) \equiv xZ(x,y) \bmod \mu^{k_1+l_1-k+2}$，因而有 $X^k \equiv x^k Z^k \bmod \mu^{k_1+l_1+1}$，它说明 X^k 中 $x^{k_1}y^{l_1}$ 的系数为零。

综上所述，$P(f) \subset \mathrm{Itr}\,\Theta(f)$ 得证。

例 1 关于 $h(x,y) = x^4 + xy^2 + y^3$ 的识别问题，这里的 h 属于文献[1]中的标准形式 K_8^*。由(2.5)式知，$S(h) = \mu^4 + \mu\left\langle y^2 \right\rangle$。又

$$T\Re_H(h) = \left\langle xh_x, yh_x, yh_y \right\rangle = \left\langle x\left(4x^3 + y^2\right), y\left(4x^3 + y^2\right), y\left(2xy + 3y^2\right) \right\rangle,$$

$$\Theta(h) = \left\langle x^2h_x, yh_x, xyh_y, y^2h_y \right\rangle = \left\langle 4x^5 + x^2y^2, 4x^3y + y^3, 2x^2y^2 + 3xy^3, 2xy^3 + 3y^4 \right\rangle.$$

经计算，可知 $\Theta(h) = \mu^5 + \mu^2\left\langle y^2 \right\rangle + \mathbb{R}\left\{4x^3y + y^3\right\}$。由此可见，$\Theta(h)$ 具有有限余维，从而 $T\Re_H(h)$ 也具有有限余维，并且 $P(h) = \mu^5 + \mu^2\left\langle y^2 \right\rangle$。若 $g \sim h$，则 $S(g) = S(h)$，并且

$$g(x,y) = Ax^4 + Bxy^2 + Cy^3 + Dx^3y + p(x,y),$$

其中 $A,B,C,D \in R$，$A \ne 0$，$B \ne 0$，$p \in P(h)$，并且在点 $(0,0)$ 处，

$$g = g_x = g_{xx} = g_{xxx} = g_y = g_{xy} = g_{yy} = g_{xxy} = 0.$$

作变换 $X(x,y) = x - \dfrac{D}{4A}y, Y(x,y) = y$ 得到 $g\left(x - \dfrac{D}{4A}y, y\right) \equiv Ax^4 + Bxy^2 + \left(C - \dfrac{BD}{4A}\right)y^3 \bmod P(h)$，因此 $g \sim h$ 当且仅当 $\bar{g}(x,y) = Ax^4 + Bxy^2 + \left(C - \dfrac{BD}{4A}\right)y^3$ 等价于 h。再作变换 $X(x,y) = \alpha x, Y(x,y) = \beta y\ (\alpha \ne 0, \beta \ne 0)$，则有 $\bar{g}(\alpha x, \beta y) = A\alpha^4x^4 + B\alpha\beta^2xy^2 + \left(C - \dfrac{BD}{4A}\right)\beta^3y^3$。将上式的三个系数与 h 的相应系数比较，我们得到

$$A > 0, B \ne 0, 4AC - BD \ne 0, \quad (4AC - BD)^8 = 4^8A^5B^{12},$$

是 g 与 h 等价的充分条件。另一方面，任取局部微分同胚

$$X(x,y) = \alpha x + \delta y + \gamma_1(x,y), Y(x,y) = \left(\beta + \gamma_2(x,y)\right)y, \gamma_1 \in \mu^2, \gamma_2 \in \mu,$$

假如 $\bar{g}\left(X(x,y), Y(x,y)\right) \equiv h(x,y) \bmod \mathrm{P}(h)$，那么比较 x^3y 的系数，立得 $A\alpha^3\delta = 0$，故 $\delta = 0$。进而可以验证

$$\overline{g}\left(X\left(x,y\right),Y\left(x,y\right)\right)\equiv\overline{g}\left(\alpha x,\beta y\right)\qquad \operatorname{mod}\mathrm{P}\left(h\right).$$

综上所述，$g\left(x,y\right)\in\mu^2$ 等价于 $x^4+xy^2+y^3$ 当且仅当在点 $\left(0,0\right)$ 处，

$$g=g_x=g_{xx}=g_{xxx}=g_y=g_{xy}=g_{yy}=g_{xxy}=0,$$

$$\left(4\frac{g_{xxxx}}{4!}\frac{g_{yyy}}{3!}-\frac{g_{xyy}}{2!}\frac{g_{xxxy}}{3!}\right)^8=4^8\left(\frac{g_{xxxx}}{4!}\right)^5\left(\frac{g_{xyy}}{2!}\right)^{12},$$

$$g_{xxxx}>0,g_{xyy}\neq0,g_{xxxx}g_{yyy}-3g_{xyy}g_{xxxy}\neq0.$$

有兴趣的读者可进一步考虑文献[1]中其它标准形式的识别问题的解。

参考文献 (References)

[1] V. I. Arnold. Critical points of functions on a manifold with boundary, the simple lie groups B_k,C_k and F_4 and singularities of evolutes. Russian Mathematical Surveys, 1978, 33(5): 99-116.

[2] M. Golubitsky, D. G. Schaeffer. A theory for imperfect bifurcation via singularity theory. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1979, 32(1): 21-98.

[3] M. Golubitsky, D. G. Schaeffer. Imperfect bifurcation in the presence of symmetry. Communications in Mathematical Physics, 1979, 67(3): 205-232.

[4] M. Golubitsky, D. G. Schaeffer. Singularities and groups in bifurcation theory. New York: Springer-Verlag, 1985.

[5] 李养成. 光滑映射的奇点理论[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

[6] O. Zariski, P. Samuel. Commutative algebra. Princeton: Van Nostrand, 1960.

[7] 李养成, 郭瑞芝, 崔登兰. 微分流形基础[M]. 北京: 科学出版社, 2011.

