Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 73-77
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.22012 Published Online April 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

Eigenvalue Inequality for a Weighted Biharmonic Elliptic Problem*

Hui Xiong

Department of Mathematics, Dongguan University of Technology, Dongguan
Email: 375610596@qq.com

Received: Dec. 29th, 2011; revised: Jan. 9th, 2012; accepted: Jan. 17th, 2012

Abstract: In this paper, we study the relation between the first and the second eigenvalue of a weighted biharmonic elliptic problem with Dirichlet boundary. By some variational technique we obtain the corresponding inequality, and some evaluations are put forward in low dimension space.

Keywords: Biharmonic; Singularity; Eigenvalue Inequality

含权双调和椭圆型问题的特征值不等式*

熊　辉

东莞理工学院数学教研室，东莞
Email: 375610596@qq.com

收稿日期：2011 年 12 月 29 日；修回日期：2012 年 1 月 9 日；录用日期：2012 年 1 月 17 日

摘　要：本文主要讨论了一类含权的双调和椭圆型 Dirichlet 边值问题的第一和第二特征值之间的关系，通过一些变分技巧得到了相关的不等式，并在低维数空间给出了一些估计。

关键词：双调和；奇性；特征值不等式

1. 引言

本文讨论如下含奇性的双调和 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u + \lambda a(x)\Delta u = 0, & x \in \Omega; \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial v} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\lambda > 0, a(x) \in L^\infty$ 且 $a(x) > 0$，Ω 是 R^n 里的一个有界区域，且边界充分光滑。空间维数 $N \geq 2$。

早在 1956 年，L. E. Payne，G. Poya 和 H. F. Weinberger[1]就分别考虑如下的三类 Dirichlet 边界问题

$$\begin{aligned} &\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega, \quad u = 0, \quad x \in \partial\Omega; \\ &\Delta^2 u - \mu u = 0, \quad x \in \Omega, \quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega; \\ &\Delta^2 u + v\Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \quad u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2}$$

令以上问题的对应的特征值列分别为

*资助信息：国家自然科学基金资助项目(10371116)，广东省千百十工程。

$$\begin{aligned}&0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots\le\lambda_m\cdots;\\&0<\mu_1<\mu_2<\mu_3<\cdots\le\mu_m\cdots;\\&0<v_1<v_2<v_3<\cdots\le v_m\cdots,\end{aligned}\tag{3}$$

文[1]在二维平面上得出

$$\begin{aligned}&\lambda_{m+1}\le\lambda_m+\frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\le 3\lambda_m,\quad m=1,2,\cdots;\\&\lambda_{m+1}\le\mu_m+\frac{8}{m}\sum_{i=1}^{m}\mu_i\le 9\mu_m,\quad m=1,2,\cdots;\\&v_2\le 3v_1.\end{aligned}\tag{4}$$

其中，(4)中的第一个不等式被 G. N. Hile 和 M. H. Protter[2]推广到更高维的空间，即

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{\lambda_{m+1}-\lambda_i}\ge\frac{mN}{4}.\tag{5}$$

显然，在式(5)的左边，用 λ_n 去取代每个 λ_i，这样就可以得到(4)的第一式。

在文[3]中，H. C. Yang 则证明了

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\lambda_{m+1}-\lambda_i\right)^2\le\frac{4}{N}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(\lambda_{m+1}-\lambda_i\right).\tag{6}$$

之后 E. M. Harrell II 和 J. Stubbe[4]又把不等式(6)推广到

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\left(\lambda_{m+1}-\lambda_i\right)^p\le\frac{2p}{N}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(\lambda_{m+1}-\lambda_i\right)^{p-1},\quad p\ge 2;\\&\sum_{i=1}^{m}\left(\lambda_{m+1}-\lambda_i\right)^p\le\frac{4}{N}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(\lambda_{m+1}-\lambda_i\right)^{p-1},\quad p\ge 2,\end{aligned}\tag{7}$$

对于双调和问题，G. N. Hile 和 R. Z. Yeh[5]也做了一些很好的工作，本文正是借助于他们所提供的方法来完成的。G. N. Hile 和 R. Z. Yeh[5]先研究了双调和算子的共振问题

$$\begin{cases}\Delta^2u=\mu u, & x\in\Omega;\\ u=\dfrac{\partial u}{\partial v}=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

得出了前 $m+1$ 个特征值的隐式不等式

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\sqrt{\mu_i}}{\mu_{m+1}-\mu_i}\ge\frac{N^2m^{3/2}}{8\left(N+2\right)}\left(\sum_{i=1}^{m}\mu_i\right)^{-1/2},$$

和显式不等式

$$\mu_{m+1}\le\mu_m+\frac{8\left(N+2\right)}{N^2m^{3/2}}\left(\sum_{i=1}^{m}u_i\right)^{1/2}\sum_{i=1}^{m}\sqrt{u_i}.$$

关于低指标的特征值，他们还得出更优的估计，即对任意 $\sigma>0$，有

$$\mu_{m+1}\le\left(1+\sigma\right)\mu_m+q\left(\sigma\right)\frac{M\left(N\right)}{m}\sum_{i=1}^{m}\mu_i,\tag{8}$$

其中

$$q\left(\sigma\right)=\left[\frac{\left(1+\sigma\right)^3}{\sigma}\right]^{1/2},\quad M\left(N\right)=\frac{32}{3N}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(N+2\right)^{-1/2}.$$

并以此计算出最初三个特征值得如下关系

$$\mu_2 \le 7.103\mu_1, \qquad \Omega \in R^2;$$
$$\mu_2 \le 4.792\mu_1, \qquad \Omega \in R^3;$$
$$\mu_3 \le 2.897\mu_1 + 4.237\mu_2, \quad \Omega \in R^2,$$

至于式(2)的第三个问题，G. N. Hile 和 R. Z. Yeh[5]得出

$$v_2 \le \frac{N^2+8N+20}{(N+2)^2} v_1, \quad \forall N \ge 2 . \tag{9}$$

本文主要采用文献[5]的方法，对于一般的空间维数 $N \ge 2$ 探讨类似于(8)的问题(1)的特征值不等式。有关特征值的其他不等式，读者们还可参看文献[6-8]。

2. 特征值不等式

众所周知，问题(1)的特征值可以如下排列

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_m \le \cdots, \tag{10}$$

并假定它们对应的特征函数分别为 $u_1, u_2, \cdots, u_m, \cdots$。根据特征值的定义可知，对任意充分光滑的函数 φ 都满足

$$\lambda_2 \le \frac{\int_\Omega \varphi \Delta^2 \varphi \mathrm{d}x}{\int_\Omega a(x)|\varphi|^2 \mathrm{d}x}, \tag{11}$$

且 φ 满足边界条件和正交条件

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \ x \in \partial\Omega, \ \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla u = 0. \tag{12}$$

由于 $a(x) \in L^\infty$ 且 $a(x) > 0$，则可以假定存在两个正数 $A, B > 0$，使得

$$A = \min_{x\in\Omega} a(x), \ B = \max_{x\in\Omega} a(x). \tag{13}$$

令 $u = u_1$ 为问题(1)的第一特征值 $\lambda = \lambda_1$ 对应的特征函数，则标准化后可得

$$\int_\Omega a(x)|\nabla u|^2 \mathrm{d}x = 1. \tag{14}$$

其中 $a(x)$ 为某些特定的函数。

引理 2.1 假定只基于 x_1 选取 $\varphi = x_1 u$，则 $\varphi = x_1 u$ 满足(10)式。

证明：根据(13)式，有

$$\frac{A}{|a(x)|_{L\infty}} \le \int_\Omega |\nabla u|^2 \le \frac{B}{|a(x)|_{L\infty}}. \tag{15}$$

因此可以通过坐标平移使得

$$\int_\Omega x_k |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = 0, \ k = 1, 2, \cdots, N. \tag{16}$$

显然，$\varphi = x_1 u$ 满足(12)式的边界条件，且根据分部积分与(14)式，有

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla u \mathrm{d}x = \int_\Omega x_1 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega u u_{x1} \mathrm{d}x = 0 + \int_\Omega u \mathrm{d}x = 0 .$$

可见 $\varphi = x_1 u$ 也满足(12)式的正交条件。

通过旋转 R^n 空间的坐标，可得到

$$\int_\Omega a x_{xk}^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{N} \int_\Omega |a\nabla u|^2 \mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \cdots, N. \tag{17}$$

假定上式不成立，则取其中的两个坐标方向 x_p 和 x_q，并使得

$$\int_\Omega a x_{xk}^2 \mathrm{d}x \le \frac{1}{N}\int_\Omega |a\nabla u|^2 \mathrm{d}x \le \int_\Omega a u_{xp}^2 \mathrm{d}x,$$

接着可以把 x_p 和 x_q 旋转交换，则可知上书非严格不等式中等号会成立。这种方法可以重复使用，直到将所有的 $k=1,2,\cdots,N$ 验证完。

引理 2.2 假定

$$I=\int_\Omega a\varphi\Delta u_{x1}\mathrm{d}x,$$

则以下等式或不等式成立：

$$(a)\, I=\frac{N+2}{2N};\quad (b)\, I^2 \le \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \int_\Omega a^2 u_{x1x1}\cdot\Delta u \mathrm{d}x\,.$$

证明： 1) 根据分部积分和(17)式，因为 $\varphi = x_1 u$，则

$$I=-\int_\Omega a\nabla\varphi\cdot\nabla u\mathrm{d}x=-\int_\Omega a\left(x_1\nabla u\cdot\nabla u_{x1}+uu_{x1x1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_\Omega a|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega a u_{x1}^2\mathrm{d}x=\frac{N+2}{2N}\int_\Omega a|\nabla u|^2\mathrm{d}x=\frac{N+2}{2N}\,.$$

其中最后一个不等式是根据(14)式得到的。

2) 根据 Hö lder 不等式有

$$I^2 \le \int_\Omega |\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x\int_\Omega a^2 |\nabla u_{x1}|^2\mathrm{d}x=\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x\int_\Omega a^2 u_{x1x1}\cdot\Delta u\mathrm{d}x.$$

定理 2.3 对于问题(1)，对任意的 $N\ge 2$，有

$$\lambda_2 \le \left[1+\frac{4(N+4)B^2}{(N+2)^2}\right]\lambda_1. \tag{18}$$

证明： 取引理 2.1 中的 $\varphi = x_1 u$，由于

$$\int_\Omega x_1 u u_{x1}\mathrm{d}x=-\int_\Omega (x_1u)_{x1} u\mathrm{d}x=-\int_\Omega u^2-\int_\Omega x_1 u u_{x1}\mathrm{d}x,$$

因此

$$\int_\Omega x_1 u u_{x1}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x,$$

则

$$\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x=\int_\Omega x_1^2\,|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+2\int_\Omega x_1 u u_{x1}\mathrm{d}x+\int_\Omega u^2\mathrm{d}x=\int_\Omega x_1^2\,|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\,. \tag{19}$$

直接计算又可得

$$\int_\Omega \varphi\Delta^2\varphi\mathrm{d}x=\int_\Omega \varphi\left(x_1\Delta^2 u+4\Delta u_{x1}\right)\mathrm{d}x=-\lambda\int_\Omega \varphi x_1(\Delta u)\mathrm{d}x+4\int_\Omega \varphi\Delta u_{x1}\mathrm{d}x\,.$$

则根据分部积分和式(19)，有

$$\int_\Omega \varphi x_1(\Delta u)\mathrm{d}x=-\int_\Omega \nabla(\varphi x_1)\nabla u\mathrm{d}x=-\int_\Omega x_1^2\,|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x-2\int_\Omega x_1 u u_{x1}\mathrm{d}x=-\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega u^2\mathrm{d}x,$$

因此，有

$$\int_\Omega \varphi\Delta^2\varphi\mathrm{d}x=\lambda\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega u^2\mathrm{d}x+4\int_\Omega \varphi\Delta u_{x1}\mathrm{d}x\,. \tag{20}$$

根据式(11)、(20)和引理 2.2 的(a)，可得

$$\lambda_2\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x \le \int_\Omega \varphi\Delta^2\varphi\mathrm{d}x \le \lambda\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x+4I=\lambda\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x+\frac{2N+4}{N}. \tag{21}$$

再根据引理 2.2 的(*a*)和(*b*)，可得

$$I=\left(I^{-1}\cdot I\right)^2=\left(\frac{2N}{N+2}\right)^2 I^2\le\frac{4N^2}{\left(N+2\right)^2}\int_\Omega\left|\nabla\varphi\right|^2\mathrm{d}x\int_\Omega a^2u_{x1x1}\cdot\Delta u\mathrm{d}x. \tag{22}$$

结合式(21)和(22)，则可得

$$\lambda_2\le\lambda+\frac{8N}{N+2}\int_\Omega a^2u_{x1x1}\cdot\Delta u\mathrm{d}x. \tag{23}$$

同理，取 $\varphi=x_k u\left(k=1,2,\cdots,N\right)$，则可得

$$\lambda_2\le\lambda+\frac{8N}{N+2}\int_\Omega a^2u_{xkxk}\cdot\Delta u\mathrm{d}x,\qquad\left(k=1,2,\cdots,N\right).$$

如此，对上式两边关于下标 k 求和，则可得

$$\lambda_2\le\lambda+\frac{8N}{N+2}\int_\Omega a^2\left(\Delta u\right)^2\mathrm{d}x\,.$$

再根据奇性项 $a\left(x\right)$ 的有界性即(13)式，有

$$\lambda_2\le\lambda+\frac{8NB^2}{N+2}\int_\Omega\left(\Delta u\right)^2\mathrm{d}x\,. \tag{24}$$

由问题(1)本身和式(14)，有

$$\int_\Omega\left(\Delta u\right)^2\mathrm{d}x=\lambda\int_\Omega a\left|\Delta u\right|^2\mathrm{d}x=\lambda_1\,. \tag{25}$$

由于 λ_1 是第一特征值，则将式(25)代入式(24)，可得

$$\lambda_2\le\lambda_1+\frac{8NB^2}{N+2}\lambda_1=\left[1+\frac{8NB^2}{N+2}\right]\lambda_1\,.$$

参考文献 (References)

[1] L. E. Payne, G. Polya and H. F. Weinberger. On the ratio of consecutive eigenvalues. Journal of Math and Physics, 1956, 35: 289-298.
[2] G. N. Hile, M. H. Protter. Inequalities for eigenvalues of the Laplacian. Indiana University Mathematic Journal, 1980, 29: 523-538.
[3] H. C. Yang. Estimates of the difference between consecutive eigenvalues. International Centre for Theoretical Physics, 1995, (3): 47-63.
[4] E. M. Harrell II, J. Stubbe. On trace identities and universal eigenvalue estimates for some partial differential operators. Transactions of the American Mathematical Society, 1997, 349(5): 1797-1809.
[5] G. N. Hile, R. Z. Yeh. Inequalities for eigenvalues of the Biharmonic operator. Pacific Journal of Mathematics, 1984, 112(1): 115-133.
[6] M. S. Ashbaugh, L. Hermi. A unified approach to universal inequalities for eigenvalues of elliptic operators. Pacific Journal of Mathematics, 2004, 217(2): 201-219.
[7] P. Li. Eigenvalue estimates on homogeneous manifolds. Comment Mathematic Helvetic, 1980, 55(1): 347-363.
[8] 屈长征, 崔尚斌. 复 Monge-Ampere 方程的特征值问题[J]. 纯粹数学与应用数学, 1995, 11(2): 37-40.

