*Pure Mathematics* 理论数学, 2012, 2, 97-102
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.22016 Published Online April 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

# Metrical Geometry Classification of Conic Section in Hyperbolic Space Form*

**Youning Wang**

Laboratory of Mathematics and Complex Systems of Ministry of Education, School of Mathematical Science, Beijing Normal University, Beijing
Email: wangyouning@163.com

Received: Dec. 29th, 2011; revised: Jan. 12th, 2011; accepted: Jan. 23rd, 2012

**Abstract:** The paper defines a metric invariant system of parabola in hyperbolic plane. The equation and the figures of parabola are discussed in Beltrami-Klein coordinates. Limit ellipse and limit hyperbola are limiting case of parabola in this way. The classification of conic section in hyperbolic space will be given, which is different with that immersed in Euclid space.

**Keywords:** Conic Section; Hyperbolic Space; Type (*a*, *b*) Parabola; Beltrami-Klein Coordinates

# 双曲空间型中圆锥截线的度量几何分类*

**王幼宁**

北京师范大学数学科学学院，数学与复杂系统教育部重点实验室，北京
Email: wangyouning@163.com

收稿日期：2011 年 12 月 29 日；修回日期：2012 年 1 月 12 日；录用日期：2012 年 1 月 23 日

**摘　要：**本文定义了双曲平面中的抛物线的一个度量不变量系统。在 Beltrami-Klein 坐标系下讨论了抛物线的方程和直观，并引入极限椭圆和极限双曲线作为抛物线的极限情形。给出了双曲空间中的圆锥截线的分类，该分类不同于欧氏空间中的相应情形。

**关键词：**圆锥截线；双曲空间；(*a*, *b*)型抛物线；Beltrami-Klein 坐标系

## 1. 引言

作为自然科学和数学理解空间形式及其子体的途径之一，在不同的空间型[1]中讨论圆锥截线的几何分类是有趣的，但不是平凡的——其计算方式的选取和繁杂程度制约着几何不变量系统的发现和相应的几何分类的实现。欧氏空间圆锥截线的几何分类是熟知的，其各子类实体可分为非蜕化的椭圆、双曲线、抛物线以及蜕化的直线、相交直线和点(不考虑作为经典二次曲线分类时的平行直线、虚椭圆和虚平行直线)，其中各子类的完全几何不变量系统所具有的不变量个数不尽相同。双曲平面上的椭圆[2,3]和双曲线[4]的几何定义方式、方程形态和几何性质曾被详细考察过，作为双曲几何[5,6]子流形的具体实例。本文所关心的中心目标是实现双曲空间圆锥截线实体的度量几何分类。为此，本文将通过以合理的方式定义双曲平面上的抛物线并考虑其双曲运动不变量，讨论所衍生的极限情形——双曲平面上的极限椭圆、极限双曲线，揭示圆锥截线在 Beltrami-Klein 坐标系[7](以下简称 B-K 坐标系)下的良好外在直观，最终证明下列定理。

**定理 1.1** 双曲空间中的圆锥面若与双曲平面相交，则截面不过锥顶时的截线按不变量及其几何意义分类为椭圆、极限椭圆、抛物线、极限双曲线和双曲线，截面过锥顶时的截线实体分类为相交测地线、测地线和点。

*资助信息：受国家自然科学基金(11171025)资助。

 

**注记 1.2** 不仅与欧氏情形分类数不同，而且下文可见，双曲平面上的抛物线有两个不变量决定其内在几何形态，这与欧氏平面上的抛物线由焦距确定内在几何形态的情形也不同。

为简便起见，以下不妨在截面曲率为–1 的双曲平面 $\mathbf{H}^2(-1)$ 或双曲空间 $\mathbf{H}^3(-1)$ 之中讨论。

## 2. $\mathbf{H}^2(-1)$ 上的抛物线及其在 B-K 坐标系下的方程

在实平面 $\mathbf{R}^2=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 上，取欧氏度量 $\mathrm{d}s^{*2}=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2$，则 $(\mathbf{R}^2,\mathrm{d}s^{*2})$ 是以$(x, y)$为 Descartes 直角坐标系的 $\mathbf{E}^2$；记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，在 $\mathbf{B}^2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|r<1\}$ 上取 Cayley-Klein-Hilbert 度量[7]

$$\mathrm{d}s^2=\frac{(1-y^2)\mathrm{d}x^2+2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(1-x^2)\mathrm{d}y^2}{(1-r^2)^2},\tag{1}$$

则 $(\mathbf{B}^2,\mathrm{d}s^2)$ 是以$(x, y)$为 B-K 坐标系的 $\mathbf{H}^2(-1)$。熟知[8]从点 $p_1(x_1,y_1)$ 到点 $p_2(x_2,y_2)$ 的双曲距离

$$d_{\mathbf{H}}(p_1,p_2)=\operatorname{Arcth}\frac{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-(x_1y_2-x_2y_1)^2}}{1-x_1x_2-y_1y_2},\tag{2}$$

满足

$$\cosh d_{\mathbf{H}}(p_1,p_2)=\frac{1-x_1x_2-y_1y_2}{\sqrt{(1-x_1^2-y_1^2)(1-x_2^2-y_2^2)}}.\tag{3}$$

### 2.1. $\mathbf{H}^2(-1)$ 上抛物线的定义

在该双曲平面 $\mathbf{H}^2(-1)$ 上，对于具有正法向的定直线 $L_0$，给定距其有向距离为 $a$ 的定点 $A$ 以及有向距离为 $b$ 的等距线 $C_b$，其中常数 $b\neq a$，称到 $A$ 的距离与到 $C_b$ 的距离保持相等的动点 $p$ 的轨迹 $C_{a,b}$ 为 $\mathbf{H}^2(-1)$ 上的一条由定点 $A$ 以及定直线 $L_0$ 所确定的$(a, b)$型抛物线，并称定点 $A$、定直线 $L_0$、常数 $a$、常数 $b$ 和定曲线 $C_b$ 分别对应为 $C_{a,b}$ 的焦点、基线、有向基焦距、有向基准距和准线。

显然，$C_{a,b}$ 与 $C_{-a,-b}$ 合同。

上述定义是欧氏情形的自然推广。事实上，如果类似考虑该欧氏平面 $\mathbf{E}^2$ 上的动点 $p^*(x,y)$ 的轨迹 $C^*_{a,b}$ 的方程，其中点 $p^*$ 到定点 $A^*(a,0)$ 的距离等于点 $p^*$ 到定直线 $L^*_0:x=0$ 的等距平行线 $L^*_b:x=b$ 的距离，则当 $b=a$ 时，轨迹 $C^*_{a,b}$ 蜕化为 $\mathbf{E}^2$ 上的直线 $y=0$；当 $b\neq a$ 时，轨迹 $C^*_{a,b}$ 是 $\mathbf{E}^2$ 上的抛物线；$C^*_{a,b}$ 与 $C^*_{b,a}$ 关于定直线 $L^*_{\frac{a+b}{2}}:x=\frac{a+b}{2}$ 是反射对称的。$a-b$ 决定了欧氏平面上抛物线 $C^*_{a,b}$ 确定几何形态的唯一不变量——焦距；而由下文(15)式可知，双曲平面上抛物线 $C_{a,b}$ 确定几何形态的不变量是两个——有向基焦距、有向基准距。

### 2.2. $\mathbf{H}^2(-1)$ 上抛物线在 B-K 坐标系下的典型方程

现给定该双曲平面 $\mathbf{H}^2(-1)$ 上的定点 $A(\tanh a, 0)$和具有以 $x$ 轴正向为法向的定直线 $L_0:x=0$ 及其等距线 $C_b:x=\sqrt{1-y^2}\tanh b$，考虑以 $A$ 为焦点、以 $L_0$ 为基线并以 $C_b$ 为准线的$(a, b)$型抛物线 $C_{a,b}$ 的方程及其性质，其中常数 $b\neq a$。现在由(3)和(2)式以及测地线夹角性质[8]可知，$C_{a,b}$ 上的点 $p(x, y)$到焦点的距离 $d_{\mathbf{H}}(p, A)$以及到基线的距离 $d_{\mathbf{H}}(p, L_0)$分别满足

$$\cosh d_H(p,A)=\frac{1-x\tanh a}{\sqrt{(1-x^2-y^2)(1-\tanh^2 a)}}=\frac{\cosh a-x\sinh a}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\tag{4}$$

$$d_{\mathbf{H}}(p,L_0)=d_{\mathbf{H}}(p,(0,y))=\operatorname{Arcth}\frac{|x|}{\sqrt{1-y^2}},\tag{5}$$

$$\cosh d_{\mathbf{H}}\left(p,L_0\right)=\cosh d_{\mathbf{H}}\left(p,\left(0,y\right)\right)=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}. \tag{6}$$

此时点 $p$ 到 $L_0$ 的沿 $x$ 轴正向的有向距离为

$$d_{\mathbf{H}}\left(p,L_0\right)\operatorname{sgn}x=\operatorname{Arcth}\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}. \tag{7}$$

注意到点 $p$ 到 $C_b$ 的距离 $d_{\mathbf{H}}(p, C_b)$满足

$$d_{\mathbf{H}}\left(p,C_b\right)=\begin{cases}d_{\mathbf{H}}\left(p,L_0\right)\operatorname{sgn}x-b, b<a,\\ b-d_{\mathbf{H}}\left(p,L_0\right)\operatorname{sgn}x, b>a,\end{cases} \tag{8}$$

于是两端取双曲余弦并注意到 $d_{\mathbf{H}}(p, A) = d_{\mathbf{H}}(p, C_b)$，利用式(4)~(7)整理，得知 $C_{a,b}$ 的方程为

$$\cosh a-x\left(\sinh a-\sinh b\right)=\sqrt{1-y^2}\cosh b. \tag{9}$$

可等价形变为

$$\frac{\left[x-\dfrac{\cosh a}{\sinh a-\sinh b}\right]^2}{\dfrac{\cosh^2 b}{(\sinh a-\sinh b)^2}}+y^2=1, x^2+y^2<1. \tag{10}$$

特别当 $b = 0 \neq a$ 时，抛物线 $C_{a,0}$ 的方程为

$$\left(x-\coth a\right)^2\sinh^2 a+y^2=1, x^2+y^2<1. \tag{11}$$

另一个值得注意的特殊情形是当 $a = 0 \neq b$ 时，$C_{0,b}$ 的方程为

$$\left(x+\frac{1}{\sinh b}\right)^2\tanh^2 b+y^2=1, x^2+y^2<1. \tag{12}$$

当 $\left(a,b\right)\to\left(0,0\right)$ 时，易知 $C_{a,b}$ 的极限落在 $\mathbf{H}^2\left(-1\right)$ 上的直线 $y = 0$ 之上。

由(10)式和度量的对称性可知，此时的 $C_{a,b}$ 以 $x$ 轴为对称轴，与 $x$ 轴的交点具有坐标 $\left(x,y\right)=\left(\tanh\frac{a+b}{2},0\right)$。对应的欧氏平面 $\mathbf{E}^2$ 上的具有同样方程(10)式的椭圆弧段(下文类似地位的欧氏曲线简称为 $\mathbf{H}^2$ 上 B-K 坐标系下相应曲线的欧氏外观)与 $x$ 轴的另外一个交点是 $\mathbf{B}^2$ 闭包的外点，具有坐标 $\left(x,y\right)=\left(\coth\frac{a-b}{2},0\right)$。此时，$C_{a,b}$ 的欧氏外观即为欧氏椭圆限制在参数区域 $\mathbf{B}^2$ 中的对应部分；其中的欧氏椭圆中心为 $\left(\dfrac{\cosh a}{\sinh a-\sinh b},0\right)$、半轴长分别为 $\dfrac{\cosh a}{\left|\sinh a-\sinh b\right|}$ 和 1，另外两个顶点是 $\mathbf{B}^2$ 闭包的外点。

注意到几何不变属性，事实上已经得到下列性质。

**性质 2.2.1** 双曲空间中的($a$, $b$)型抛物线 $C_{a,b}$ 具有对称轴，并且对称轴是过焦点、垂直于基线和准线的测地线。

仿照欧氏情形，以下称抛物线 $C_{a,b}$ 与其对称轴的交点为抛物线 $C_{a,b}$ 的顶点。

### 2.3. $\mathbf{H}^2\left(-1\right)$ 上抛物线在 B-K 坐标系下的标准方程及其欧氏外观

抛物线在以顶点为原点、以对称轴为坐标轴之一的 B-K 坐标系下的方程具有讨论的便利，称之为抛物线的标准方程。熟知沿直线 $y = 0$ 的从点$(x, y) = (0, 0)$到点$(x, y) = (x_0, 0)$作平移而形成的点 $p$ 的 B-K 坐标变换[8]$p(x, y) \to p(u, v)$的逆变换即为

 

$$x=\frac{u+x_0}{1+x_0u}, y=\frac{v\sqrt{1-x_0^2}}{1+x_0u}. \tag{13}$$

为得到由(10)式给定的 $C_{a,b}$ 的标准方程，考虑所对应的 B-K 坐标变换，使 $C_{a,b}$ 的顶点 $(x,y)=\left(\tanh\frac{a+b}{2},0\right)$ 沿直线 $y=0$ 平移到与原点$(x,y)=(0,0)$重合，此时(13)式即为平移变换

$$x=\frac{u\cosh\frac{a+b}{2}+\sinh\frac{a+b}{2}}{\cosh\frac{a+b}{2}+u\sinh\frac{a+b}{2}}, y=\frac{v}{\cosh\frac{a+b}{2}+u\sinh\frac{a+b}{2}}. \tag{14}$$

代入(10)式并整理，可知 $C_{a,b}$ 具有标准方程

$$v^2\cosh b=2u\left(u\tanh b+1\right)\left(\sinh a-\sinh b\right), u^2+v^2<1. \tag{15}$$

对于 $b=0$ 的情形，由(15)式可知 $C_{a,0}$ 的标准方程

$$v^2=2u\sinh a, u^2+v^2<1. \tag{16}$$

即：当取顶点为原点、取顶点处的切线为坐标轴之一时，抛物线 $C_{a,0}$ 的在 B-K 坐标系下的欧氏外观即为欧氏抛物线限制在参数区域 $\mathbf{B}^2$ 中的对应部分。

对于 $b\neq 0$ 的情形，等价变形改写(15)式，可知 $C_{a,b}$ 的标准方程

$$(2u\tanh b+1)^2-\frac{2\sinh b}{\sinh a-\sinh b}v^2=1, b\neq 0,\ u^2+v^2<1. \tag{17}$$

此时 $C_{a,b}$ 在 B-K 坐标系下的欧氏外观即为：欧氏双曲线(当$(a-b)b>0$ 时)或欧氏椭圆(当$(a-b)b<0$ 时)限制在参数区域 $\mathbf{B}^2$ 中的对应部分；其欧氏中心为 $\mathbf{R}^2$ 之上的点$(-\coth\frac{b}{2},\ 0)$，其欧氏半轴长分别为 $\coth\frac{|b|}{2}$ 和 $\sqrt{\left|\frac{\sinh a-\sinh b}{2\sinh b}\right|}$；对称轴 $u$ 轴上的两个欧氏顶点的 $u$ 坐标分别为 0 和$-\coth b$。数组$(a, b)$的容许取值将对应着欧氏中心、半轴长的容许取值。

## 2.4. $\mathbf{H}^2(-1)$ 上的极限椭圆和极限双曲线在 B-K 坐标系下的标准方程及其欧氏外观

特别地，$C_{0,b}$ 的标准方程简化为

$$(2u\tanh b+1)^2+2v^2=1, b\neq 0,\ u^2+v^2<1.$$

欧氏外观即为欧氏椭圆限制在 $\mathbf{B}^2$ 中的对应部分，对应的欧氏中心为$(-\coth\frac{b}{2},\ 0)$，欧氏半轴长分别为 $\coth\frac{|b|}{2}$ 和 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。因此，当 $b\to\pm\infty$时，$C_{0,b}$ 的欧氏外观以极限圆 $(2u\pm1)^2+2v^2=1$ 的欧氏外观为极限。容易看出，在(17)式中对任意指定的 $a$，当 $b\to\pm\infty$时 $C_{a,b}$ 的欧氏外观都以极限圆的欧氏外观为极限。

在(17)式中取定 $\frac{\sinh a}{\sinh b}=1-2\alpha^2, \alpha=\text{const.}\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$C_{a,b}$ 的欧氏外观当 $b\to\pm\infty$时分别以 $(2u\pm1)^2+\frac{v^2}{\alpha^2}=1$ 为极限，该极限在 $\mathbf{B}^2$ 中的对应部分可定义为 $\mathbf{H}^2$ 中的极限椭圆。

另一方面，当 $a>b\to+\infty$时或当 $a<b\to-\infty$时，$C_{a,b}$ 的欧氏外观即为欧氏双曲线限制在 $\mathbf{B}^2$ 中的对应部分，对应的欧氏半轴长分别为 $\coth\frac{|b|}{2}$ 和 $\sqrt{\left|\frac{\sinh a}{\sinh b}-1\right|\Big/2}$，欧氏中心为$(-\coth\frac{b}{2},\ 0)$。在(17)式中取定 $\frac{\sinh a}{\sinh b}=1+2\alpha^2$，$\alpha=\text{const.}>0$ 时欧氏外观有极限 $(2u\pm1)^2-\frac{v^2}{\alpha^2}=1$，该极限在 $\mathbf{B}^2$ 中的对应部分可定义为 $\mathbf{H}^2$ 中的极限双曲线。

 

在 $\mathbf{H}^2$ 中，极限椭圆不是椭圆[3]，极限双曲线也不是双曲线[4]，它们的拓扑形态不同。

## 3. $\mathbf{H}^3(-1)$ 上的圆锥截线及其在 B-K 坐标系下的外观

类似地，在实空间 $\mathbf{R}^3=\{(x,y,z)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R},z\in\mathbf{R}\}$ 之中取欧氏度量 $\mathrm{d}s^{*2}=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2$，则 $(\mathbf{R}^3,\mathrm{d}s^{*2})$ 是以 $(x, y, z)$为 Descartes 直角坐标系的 $\mathbf{E}^3$；记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，在 $\mathbf{B}^3=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3|r<1\}$ 之中取 Cayley-Klein-Hilbert 度量[7] $\mathrm{d}s^2$，则 $(\mathbf{B}^3,\mathrm{d}s^2)$ 是以$(x, y, z)$为 B-K 坐标系的 $\mathbf{H}^3(-1)$。

注意到圆周在双曲空间 B-K 坐标系下的欧氏外观形态，取 $\mathbf{H}^3(-1)$ 上的圆锥面 $S$ 的锥顶为 B-K 坐标系的原点，则 $S$ 的相应欧氏外观 $S^*$ 即为 $\mathbf{E}^3$ 之中以原点为锥顶的欧氏圆锥面限制在 $\mathbf{B}^3$ 之中的部分。

### 3.1. $\mathbf{H}^3(-1)$ 中的圆锥截线在特定 B-K 坐标系下的欧氏外观

上述圆锥面 $S$ 若与双曲平面 $P_0$ 相交，则相应的欧氏外观即为 $S^*$ 与欧氏平面 $P_0^*$ 相交。

此时，相应截线 $S\cap P_0$ 的欧氏外观 $S^*\cap P_0^*$ 都是轴对称的，具有明显的欧氏几何分类。当截面 $P_0^*$ 不过 $S^*$ 的锥顶时，截线分类为：1) 椭圆；2) 去掉一个顶点的椭圆；3) 去掉一个连通闭弧段的椭圆开弧段；4) 抛物线的一个连通弧段；5) 双曲线的一个连通分支落在 $\mathbf{B}^3$ 之上的连通弧段，另一个连通分支落在 $\mathbf{B}^3$ 闭包之外；6) 双曲线的一个连通分支落在 $\mathbf{B}^3$ 之上的连通弧段，另一个连通分支落在 $\mathbf{B}^3$ 之外并切在 $\mathbf{B}^3$ 边界之上；7) 双曲线的落在 $\mathbf{B}^3$ 之上的两个连通弧段，分别位于双曲线的两个连通分支上。当截面 $P_0^*$ 过 $S^*$ 的锥顶时，截线分类为：8) 相交直线段；9) 直线段；10) 点。

注意到双曲空间中的 B-K 坐标系自然诱导出截面 $P_0$ 上的 B-K 坐标系，于是在 $P_0$ 上可取新的 B-K 坐标系使截线的对称轴为坐标轴之一，并使新的原点成为截线落于该轴上的一个顶点。由于 B-K 坐标变换不改变 B-K 坐标系下二次曲线的拓扑[3,4]，同时将边界点对应为边界点，故新的 B-K 坐标系下，相应截线 $S\cap P_0$ 的新的欧氏外观仍然都是轴对称的，上述的欧氏几何分类类型仍然具备。

### 3.2. $\mathbf{H}^3(-1)$ 中的圆锥截线的几何分类

已知双曲平面上的椭圆和双曲线的欧氏外观在 B-K 坐标变换下具有对应相同的欧氏几何分类[3,4]，于是当截线欧氏外观为上述类型 1)或 7)时，截线 $S\cap P_0$ 具有对应的双曲几何分类——椭圆和双曲线。类似地，由本文 2.4 可知，当截线欧氏外观为 2)，或是 6)时，截线 $S\cap P_0$ 对应分类为极限椭圆或是极限双曲线。同理，由本文 2.3 可知，当截线欧氏外观为 3)、4)或 5)时，截线 $S\cap P_0$ 对应分类为抛物线。当截面 $P_0$ 过 $S$ 的锥顶时，易见欧氏外观为 8)、9)、10)的截线实体分类为相交测地线、测地线和点。

由所讨论对象的几何不变性，这些分类不依赖于 B-K 坐标系的选取，至此定理 1.1 得证。

在欧氏空间中，椭圆锥面的平面截线与圆锥面的具有同样的几何分类。而在双曲空间中，椭圆锥面的双曲平面截线具有更多的几何类型，比如等距线等。确定双曲空间中的椭圆锥面截线的几何分类，找到相应截线合理的几何定义方式，是有趣的。

## 4. 致谢

感谢国家自然科学基金的资助！感谢长期以来同事和学生们的理解和帮助！

## 参考文献 (References)

[1] 伍鸿熙，沈纯理，虞言林. 黎曼几何初步[M]. 北京：北京大学出版社, 1989: 67-85.
[2] 王幼宁，吴英丽. 关于双曲空间中的椭圆[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2007, 43(1): 6-9.
[3] 王幼宁，吴英丽. 双曲空间中椭圆的凸性和运动[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2008, 44(5): 469-471.
[4] 王幼宁，连永欣. 关于双曲平面中的双曲线[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2011, 47(2): 115-121.

 

[5] J. Milnor. Hyperbolic geometry: The 1st 150 years. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 1982, 6(1): 9-24.
[6] A. D. 亚历山大洛夫等. 数学——它的内容, 方法和意义(第三卷)[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 93-185.
[7] 王幼宁, 李德龙. 双曲空间中的 B-K 坐标系[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2010, 46(1): 13-16.
[8] 王幼宁, 刘继志. 微分几何讲义(第二版)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2011: 167-179.

 