Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(3), 135-143
Published Online March 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.143092

数式的一致性和式的特殊性

王 璐

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2024年2月15日；录用日期：2024年3月22日；发布日期：2024年3月29日

摘 要

数与代数是基础教育阶段的主要对象并具有丰富的内容，是数学学习和研究的基础。在新课标实施过程中，不少专家学者特别强调了数与式的整体性学习。在数与代数的学习中，在研究策略上关注数与式的一致性是重要的，但在具体学习过程中还要关注到代数式的独特性，只有理解代数式相对于数来说其特殊性所在，才能深刻理解从数到式的思维飞跃。把代数式理解为可以按照任意规定的法则处理任意的符号及其关系的一个符号的体系，这是在算术中从未考虑也难以实现的方法。

关键词

数式一体，特殊性，研究策略，学习过程，数与式

The Consistency of “Number and Algebra” and the Particularity of Algebraic Expression

Lu Wang

College of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Feb. 15th, 2024; accepted: Mar. 22nd, 2024; published: Mar. 29th, 2024

Abstract

Number and algebra is the main object of basic education stage and has rich content, is the foundation of mathematics learning and research. In the process of implementing the new curriculum standard, many experts and scholars have emphasized the integral learning of number and formula. In the study of number and algebra, it is important to pay attention to the consistency of number and formula in the research strategy, but it is also important to pay attention to the uniqueness of algebraic expression in the concrete learning process. Only by understanding the par-

文章引用: 王璐. 数式的一致性和式的特殊性[J]. 理论数学, 2024, 14(3): 135-143.
DOI: 10.12677/pm.2024.143092

ticularity of algebraic expression relative to number can we deeply understand the thinking leap from number to formula. To understand an algebraic expression as a system of symbols that can deal with arbitrary symbols and their relations according to arbitrary rules is a method that has never been considered in arithmetic and is difficult to realize.

Keywords

Unity of Number and Expression, Particularity, Research Strategy, Learning Process, Numbers and Expressions

1. 引言

在我国，代数体现了初中数学与小学数学最主要的区别，小学数学主要学习数的运算，而初中代数除了进一步扩充数的范围外，还要研究式的运算以及和式有关的方程和函数等内容，从数到式是由特殊到一般，由具体到抽象的一次大飞跃。

也因此，代数式的学习对学生来说充满着挑战。为化解代数式学习的困难，我国一些专家学者在新一轮课程实施过程中特别呼吁在代数式的学习过程中要理解式与数的一致性[1] [2] [3] [4] [5]，从而达到整体性建构。

本文要探讨的是，在代数式的整体性教学策略上需要类比数的学习，但在代数式的更深入学习过程中，更需要关注其特殊性。

2. 数与式的一致性

综合现有文献，数式的一致性主要从数与式的概念、表达、运算、结构，以及思维五个方面开展类比分析[6] [7] [8]。具体如表 1：

Table 1. Consistency between numbers and expressions
表 1. 数与式的一致性

	数		代数式	
概念	“数与运算”是学习用计数单位的个数表示数的过程，体会数对数量的抽象，在此基础上进行各种计算，感悟整数、小数、分数、方根等概念本质的一致性。		代数式显然也可以看成从实际情景中的“量”抽象得到。并在此基础上讨论加、减、乘、除、乘方、开方运算及性质。	
表达	整数单位	1	整式单位	a^n，同类项
	小数单位	0.1^n	分式单位	最简分式
	分数单位	$\frac{1}{n}$	根式单位	最简根式
运算	整数、有理数、无理数、实数都可以进行加减乘除等运算并具有很好的运算性质。		整式、分数也可以进行加减乘除运算并具有较好的运算性质。类比数的运算可以导出代数式的运算，并得到分式和根式。	

续表

结构	两个整数进行加减乘运算所得的结果仍为整数，整数也可以分解成因数；两个整数不能整除导致分数；整数不能开方从而需要带根号的数。有理数、实数可以比较大小、求倒数、相反数、绝对值等；算术中写两个数相加的形式时，例如 $3+4=7$，通常就是要通过作加法运算计算求出 3 和 4 的和，即运算结果为 7，此时，$3+4$ 通常表示为一个过程，而 7 是 $3+4$ 的运算结果。	两个整式进行加减乘运算所得的结果也是整式，一个多项式分解成几个整式的乘积的形式，叫做因式分解；在代数中，结构简单的一个例子如 $a+b=c$，即将一个数 a 和另一个数 b 加到一起，就会得到数 c；代数式 $a+b$ 这个形式同样表示 a 和 b 这两个数作加法运算的过程，c 可以看作运算结果。
思维	等号“=”表示等式两边对称的等价关系，$a=b$ 即是说 a、b 是同一个对象。在算术中经常被用来表示一个结果，如 $2+3=$ ？，用“=”表示计算结果，用“=”表示算术恒等式 $6+3=2+7$。	方程可以被定义为带有隐藏数字的算术恒等式，可以较好地获得对方程意义的直观理解，然后将其转化为对代数方程形式的理解，这样代数就会逐渐根植于算术中，代数方程的右边不需要包含答案，而是可以是与左边值相同的表达式。

显然，类比学生已经具备的数的“现实”进行代数式的学习是一种非常节约的教学策略。比如类比分数的研究过程很方便学生确定分式的研究路径，学生通过类比分数是整数除法运算的不封闭性的必然需要，自然容易理解整式在不能整除的情况下有必要引入分式；回忆分数研究过程是从定义，到性质，再到运算，也就不难知道分式学习的相似过程。但同样显然的是，要真正深入理解代数式更需要弄清楚的是式的特殊性。

3. 式的特殊性

用字母表示数是代数学习的序曲。自此，一如开启了“潘多拉的魔盒”，随着字母可表达的多义性和灵活性使得字母的关系和运算，也就是代数结构被赋予了“魔力”，呈现出万千变化，再加上坐标系这一“引桥”，使得代数更可以“攻城略地”，“蔓延”于数学的众多领地。这也是当年笛卡尔在发明坐标系前所遐想的指导思维的方法论，“世界上的一切问题转化为数学问题，数学问题转化为代数方程问题”，求解方程，使世界问题得到解答。

也因此，学生在代数学习上有着巨大挑战性，代数式需要被不断赋予意义。尤西斯金认为至少可以从四个方面理解代数：1) 代数作为一般化的算术，2) 作为某种类型问题解决的过程的研究，3) 作为数量之间关系的研究，以及 4) 作为结构的研究[9]。卡帕特将代数思维概括为两个核心内容，一般化以及使用符号系统表示一般化的结果，并对这个结果进行合乎代数法则的推理与行动[10]。这意味着学生在代数学习中需要超越具体数字、案例、对象和情景，能使用字母(包括其它符合)进行概化。如，在算术学习中儿童会学习到 2、4、6、8、……等无数的“偶数”，到初中他知道这无穷多的数可以非常简洁地表示成“$2n$”，也可以是其它的结构；且可以以 $2n$ 表示偶数参与推理与运算。如 $2n+2k$ 可以表示任意两个偶数相加，并且其结果任然是偶数，因为其结果可以表示成 $2(n+k)$。在数学教育心理学领域，对于代数也有非常多的研究，主要分为三个阶段：一是研究算术到代数的转变、关注变量和未知数、方程和解方程以及代数应用题；二是研究技术工具的应用以及对多元表征和概括的关注；三是研究小学生的代数思维，对代数教师、代数教学、物理环境的动态模式和其他动态代数环境[11]。

以下具体从代数符号、变量、结构、运算、推理等方面对代数式的特殊性进行简单介绍。

(一) 代数中符号的特殊性

尽管算术和代数有很多相同的记号和符号，如等号、加减号，但算术中的基本对象是数，代数中的基本对象除了数，还出现了更具广泛意义的基本对象—符号，这是代数不同于算术的典型特征，同时，

由于字母在表示数字上的任意性和不确定性，具有“代”和“变”的抽象性，学生需要掌握符号的意义、进行符号之间的运算和转换、用符号进行表示和用符号解决问题，如题“两辆车同时从 A 地出发，开往 B 地，汽车甲的速度为 50 km/h，汽车乙的速度为 40 km/h，汽车甲比汽车乙提前一小时到达目的地，问 AB 两地间的距离”，学生在学习方程时首先应能够将字母看成所求未知量的直接取代物，即设 AB 两地间的距离为 x，此时 x 就是本题所求未知量的取代物；其次应能找寻等量关系从而列出代数式即 $\frac{x}{40}-\frac{x}{50}=1$，学会如何通过具体的计算求得未知量，因此理解并掌握字母在代数中的独特性是学生代数思维进步的一个重要体现。

数学符号大致可以分为四类：字母和数字、标识符、象征符和标点符号。在此，表 2 [9]围绕数学特点来讨论符号在代数式中特有的功能：

Table 2. Special functions of symbols in algebraic expressions
表 2. 符号在代数式中特有的功能

功能	阐述	举例
记录事实	符号最基本的功能	直线 l 与平面 β 垂直记作 $l\perp\beta$
概括结论	利用符号和符号串将数学模式化为形式化的原理、公式、法则等	概括得到 $\sin\alpha=-\sin(-\alpha)$
压缩信息	为了某些需求将所表示的内容浓缩为简洁的记号	将积分的一长段文字记录成 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i$
实现运算自动化	将从具体结论采用一般性的符号串将法则表示出来，在与公式相同的情景中将其中的数量关系或空间形式与公式结合起来，摆脱概念而仅在形式符号水平上，根据符号运算法则按部就班推到结果	平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
提供反省对象	根据皮亚杰的观点，逻辑数学知识的形成需要不同于经验抽象的人们对自己协调活动过程反省的抽象	反省 $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$ 及 $\log a+\log b=\log(a\cdot b)$ 得到 $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$ 的特殊结构

在数学的过程化概念向对象化概念脱胎的过程中，就是利用符号表达过程。数学中符号和符号串使用的基本目的是为了传递和交流数学知识，文字的语义多联想到日常语言，而数学符号的含义是由特定的数学情境确定的，需要专门的定义[9]。教师在教学中应重视学生在从算术到代数的学习转变过程中需要调整符号和记号的意义。关注学生如何解释代数符号、应用符号的困难以及括号的使用等，例如能够理解式子 $3(y-1)$ 的正确含义是 y 与 1 的差的 3 倍;关注在学生遇到代数符号和代数运算时的思维和方法，例如对于一次函数 $y=kx+b$，很多学生不理解 k 的意义，不能理解从数的角度来看 k 表示的是 x 每增加 1 时，对应的 y 所增加的值[10]。

(二) 代数式中变量的特殊性

理解变量符号在培养学生代数思维中起到重要作用，变量是形式化代数的产物，是代数式中变化的量，是方程中固定的未知数，是表示运算律的关系式中一个一般化了的数。小学算术中存在“凑整十”、“整十数”和“分整数”等准变量的使用数字的计算方式，其目的是得到正确答案，在本质上并未体现准变量的思想。又如 $68-37+37=68$ 这样的算术等式中 68 和 37 可以看作是准变量，体现了如果给一个数字减去一个数字再加上同一个数字，那么这个数字保持不变的准变量思维；其进而随着代数的学习可以理解 $68-a+a=68$ 这样的代数式的意义和变量的概念[11]。

实际上，三四年级的学生已经接触了用字母表示正方形、长方形、梯形等实际东西，五六年级也学习周长和面积的公式计算。梯形面积公式(上底 + 下底) × 高 ÷ 2 可用字母表示为 $S=(a+b)\times h\div 2$。那么，在学习梯形面积公式后，学生在遇到求梯形下底、上底或高等情况时，可以设所求量为 x，用 x 表示未知量，结合公式可以得到关于 x 的等式，通过化简得到 x 的表达式。

(三) 代数式中等号的特殊性

在数学的算术计算中理解等价这一概念是不可避免的重要环节。想要理解算术运算规律、运算基本性质以及其推广等都依赖于学生能够正确理解等号是等价关系的标记。学生对于等号的理解见表 3 [11]：

Table 3. Students' understanding of the equal sign
表 3. 学生对等号的理解

类型	概念	举例	意义
操作型	将等号理解为需要计算出答案的一个指示符号	$4+6=\square$	“=”用来指示要计算出答案
关系型	将等号理解为两个数量或表达式之间在数学上等价的指示符号	$5+8=\square+6$	“=”用来表示等式左右两端的等量关系

研究发现等号的关系型理解对学生掌握和理解代数式有重要影响，若学生对等号的理解停留在算数水平上，便会在理解和使用上产生问题。例如方程，其数学本质是为了寻求未知数，在已知数和未知数之间建立一种等量关系，必须找到一种平衡关系。学生在学习方程时首先就要理解等号的意义，理解代数中等号表达量的对称、平衡和传递关系，是一种显示相等的关系结构，一种相等、等价、同类和平衡的状态。在解方程时，部分学生没有建立等号的代数意义和代数变换原则，不理解去括号和去分母的原理，分不清“移项”和“系数化为 1”的运算差异。例如在代数学习中，近半数的学生对 $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^2=(3x-2y)^2$ 的计算过程认为是正确的，没有掌握方程中等号的结构性和对称性[12]。教师应引导学生从算术水平拓展等号的含义和提升对等号的理解，理解等号这个认知对象的意义和等号应有的平衡关系。

(四) 代数式运算的特殊性

代数式是数的进一步抽象化。代数式可以代替数字进行抽象运算，化简运算难度。算术运算和代数运算的根本区别在于算术运算是过程性的，目的是为了求出算式的结果；而代数运算是结构性的，具有过程和结果双重性。例如当我们说“一个数的二倍与另一个数的和”时，心理反应是一个算法过程，而看到 $2a+b$ 时，除了反应为一个算式，也同时反应为算式的结果，即表达式本身，一个实体[9]。

在解文字题或应用题时采用算术方法与采用代数方法所考虑的对象是不一样的，这是学生学习算术过渡到学习代数的一个关键问题。首先，思考的目的是不同的，在算术中，学生首先考虑的是用什么样的运算；而在代数中列方程时要先把问题情景和量的关系用符号表示出来，不是先考虑解法。其次，在选择什么样的运算时也有很大的差别。例如“4 加上一个数的 3 倍，和为 40，求这个数”，在算术中，学生选择逆运算，题中讲“3 倍”，则算法选择“除以 3”，题中讲“和”，算术中要用减法，由此得到 $(40-4)\div 3$；而在代数中设定 x 表示所求的数后，根据题意可得 $4+3x=40$，两种思考方式刚好不同，且列代数方程式的方法可能更直观[9]。其次，在代数运算中有一些独特的运算方法，如换元法，在求函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递增区间时，利用换元法令 $t=2x+\frac{\pi}{3}$，此时得到函数为 $f(t)=\frac{1}{2}\sin(t)$，学

生在学习过正弦函数的单调性的基础上可知 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le t\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，代入 $t=2x+\frac{\pi}{3}$ 可得 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，求出 x 的取值范围即为原函数的单调递增区间。通过换元的方式对于这种题目进行求解，可以轻而易举地将原本看似较为复杂的题目变得简单，答案也就更容易解出来。

(五) 代数式结构的特殊性

结构是代数最基本的方面之一，弗赖登塔尔指出“结构是从语言表达抽象出来的一种形式”。表 4 中凯伦(1989)把结构分为表面结构和系统结构两个层次：

Table 4. Students' understanding of the equal sign
表 4. 凯伦对结构的分类

层次	概念	举例	意义
表面结构	由不同的项、不同的运算构成的一种代数表达形式	$a+b$， $-3x+2(x+1)=5$	反映了不同的数量关系，涉及如何进行符号表示的问题
系统结构	源于数学系统内的运算性质	$-3x+2(x+1)$ 分配律 $-3x+2x+2$ 合并同类项 $-x+2$ 交换律 $2-x$	涉及如何进行符号运算的问题

方程集字母、代数式、等号于一身，集中体现了代数概念的过程和对象，程序与结构的二重性。方程的结构既包含了等量关系，又包含了代数式的运算结构和等式变形的结构[9]。在学习平方差公式后，学生看到 $(x-5)^2(x+5)^2$ 可以将 $(x-5)^2$ 和 $(x+5)^2$ 分别视为一个整体，识别出整体的平方差结构并利用平方差公式进行因式分解；再者，对于 $24x^6y^4-150x^8$，可先提取公因式得到 $6(4x^6y^4-25x^8)$，再将 $4x^6y^4$ 和 $25x^8$ 看作单一整体，易发现是 $2x^3y^2$ 的平方和 $5x^4$ 的平方之差，便可使用相应的平方差公式。例如求函数 $f(x)=\frac{\sin x-1}{\sqrt{3-2\cos x-2\sin x}}(0\le x\le 2\pi)$ 的值域，教师可引导学生利用代数式的结构将函数表达式变形为 $f(x)=\frac{\sin x-1}{\sqrt{(\sin x-1)^2+(\cos x-1)^2}}$，那么由三角函数定义可知该表达式表示终边过点 $P(\sin x-1,\cos x-1)$ 的角 α 的余弦值，该点轨迹方程为 $(X+1)^2+(Y+1)^2=1$，由图可知 $\alpha\in\left[2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$，$k\in Z$，因此，$\cos\alpha\in[-1,0]$，$f(x)$ 的值域为 $[-1,0]$。从算术到代数在一定程度上可以理解为从程序到结构，从程序到结构也是代数学习认知中不可或缺的过程。相对数的加减乘除二元运算的封闭性，代数式二元运算的封闭性相对较弱，但另一方面，代数式结构具有更多表现形式，在解题上相比于算术有更大的空间。

(六) 代数思维的特殊性

算术思维的核心是获取一个(正确的)答案，以及验证这个答案是否正确；而代数思维是关系的或结构的，目的是发现(一般化的)关系或结构，其核心是一般化的思想，并把它们联系起来建立模型，进行证明或交流[9]。因此，从算术思维向代数思维的过渡中，学生的思维层次要经历从逆向到顺向，从只允许已知数参与运算到把问题表示为含有未知数的等式，从个别到一般，从具体到抽象的飞跃。代数思维解决实际问题的过程是去情境的、形式化的，在某种程度上说是无法依赖直观的。

学生在学习平方差公式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 时，若没有整式、分式、多项式和单项式等知识的学习作为基础，学生理解该公式时易具有较大挑战性，大部分学生只能在形式符号水平上，根据死记硬背符号运算法则从而按部就班代入推导得到所求的结果。同样，学习基本不等式 $a^2+b^2\ge 2ab$ 时，如果学生

不能认识到代数可以表示整体，便很难考虑到$a^2-2ab+b^2\ge 0$，即$a^2-b^2\ge 0$，更不能理解和证明所学的基本不等式。

例如一个长方形的长为 a 尺，宽为 b 尺，问其周长是多少？很多学生通过运算得到答案$2(a+b)$，但是却并不认为自己得到所求长方形的周长，这是因为在代数学习初期，很多学生还停留在算术思维，认为含有运算符号的式子是一种运算，并非运算结果，学生较难从算术运算跳出来发现代数运算的特殊性。

又如解二元一次方程组$\begin{cases}\dfrac{2021}{3}(x-y)+2y=2\\ 3y-\dfrac{2021}{3}(x-y)=3\end{cases}$，本题在考察二元一次方程组的求解，需要学生能够观察二元一次方程组的算式结构，能够有代数思维并发现把$(x-y)$当作一个整体进行运算求解最简单。即把$(x-y)$当作整体，将两个方程进行加法运算求得$y=1$，把$y=1$代入任意一个方程可以得到$x=1$。代数思维有助于学生更加直观地观察题目，更加简便快速的作出答案，有助于发展学生思维能力。

(七) 代数推理的特殊性

推理能力是初中阶段应着力发展的核心素养之一。《义务教育数学课程标准(2022 年版)》在第四学段新增了“了解代数推理”的内容要求[13]。提出了数与代数领域也有推理或证明，阐释了代数问题与几何问题论证路径的一致性。

史宁中教授认为代数推理就是通过简单的归纳、类比得到初步的结论后，通过法则的运用，感悟从一般到特殊的推理过程[14]。例如，若 a、b 互为相反数，根据代数推理可得$\dfrac{a}{b}=-1$。因为$\dfrac{-1}{1}=-1$、$\dfrac{-2}{2}=-1$、$\dfrac{-3}{3}=-1$、……所以，$\dfrac{a}{b}=-1$ [15]。已知集合中元素个数为 n 个，该集合子集的个数为2^n-1。鲍建生教授认为代数推理是一种基于规则的推理，这些规则包括各种运算法则、公式、限制条件、判定条件等[16]。2021 年江苏高考题设x_1,x_2是关于 x 的方程$x^2-3x+k=0$的两个根，且$x_1=2x_2$，则$k=?$。本题与几何中三段式推理过程完全一致，是典型的演绎推理，即从一般性原理出发，推出某种特殊情况下的结论。学生能根据已知的根与系数的关系(大前提)，得到$x_1+x_2=3$，$x_1x_2=k$并结合题目已知条件$x_1=2x_2$ (小前提)，可得到$k=2$ (结论)。类比推理的关键是分析未知与已有的认知结构中具有的相似特征，然后猜想其解题方法和解题思维上的类似之处。已知实数x,y满足$3x-y=5$，$2x+3y=7$，求$x-4y$和$7x+5y$的值。利用代数整体的思想对已知的两个代数式进行加减，一式减二式可得$x-4y$的值，一式加二式可得$7x+5y$的值[17]。代数的整体性思想也体现了代数结构的独特性。

代数推理的存在使得数学具有丰富的逻辑和清晰的过程，代数思维具有培养学生推理能力的作用。已知函数$y=x^2-2bx+3$，$b\in R$，若当$x\in[-1,2]$时，函数有最小值为 2，求当$x\in[-1,2]$时，函数的最大值。本题要求给定的自变量 x 取值范围$[-1,2]$中的函数最大值，首先，教师可以引导学生根据已知可得函数图像开口向上，根据$x=-\dfrac{b}{2a}$可求出对称轴为$x=b$，且函数在对称轴$x=b$的左侧单调递减，在右侧单调递增。其次，要求给定区间最大值，学生应该首先要分析函数在区间上的单调性，又因为一元二次函数对称轴两部分的单调性相反，故能够想到要分析对称轴和给定区间的关系，分为对称轴在区间左侧、在区间右侧和在区间中三种情况，此处很多学生在分析单调性时会忽略分类讨论，教师要进行及时观察和必要的引导。第一种情况，当对称轴在区间左侧时，b 小于等于给定区间的左区间-1，此时区间$[-1,2]$在对称轴右侧，函数在$[-1,2]$上单调递增，当$x=-1$时函数有最小值，根据已知最小值为 2 代入代数式得$b=-1$，得到函数解析式，因此当$x=2$时函数有最大值且求得最大值为 11。第二种情况，当对称轴在

区间右侧时，b 大于等于给定区间的右区间 2，此时区间 $[-1,2]$ 在对称轴左侧，函数在 $[-1,2]$ 上单调递减，当 $x=2$ 时函数有最小值，根据已知最小值为 2 代入代数式得 $b=\frac{5}{4}<2$ 不合题意舍去。第三种情况，当对称轴在区间内时，b 大于给定区间的左区间−1，b 小于给定区间的右区间 2，此时对称轴子区间 $[-1,2]$ 内侧，函数在 $(-1,b)$ 上单调递减，在 $[b,2)$ 上单调递增，当 $x=b$ 时函数有最小值 2，解得 $b=1$ 或−1，经检验 $b=-1$ 不合题意故舍去，代入 $b=1$ 得到函数解析式，当 $x=-1$ 时函数值为 6，当 $x=2$ 时函数值为 11。结合上述三种情况可知当 $x\in[-1,2]$ 时，函数的最大值为 11。上述题目所体现的代数推理能力和代数思维是代数式相比于数的独特性的典型，代数推理体现出的数学逻辑性将源源不断地推动学生数学能力的提高。

(八) 代数意义的特殊性

内涵方面对于代数学习是至关重要的，因为相对于知觉而言，学生在掌握符号的不变性方面会遇到很多困难。代数意义生成的不同方法已经被再概念化了，拉特福德认为学校代数意义生成于“不同符号的数学系统和非数学系统的交叉处”。他提出学校代数意义源于三个主要源泉：① 源于数学内部的意义(源于代数结构本身的意义，涉及字母——符号形式；源于多元表征形式的意义)；② 源于问题情境的意义；③ 源于数学外部(问题情境)的意义(如语言活动、手势和身体语言、隐喻、生活经验、图形建立等) [11]。

4. 结语

早期研究中将代数看作是概括的算术，认为代数意义衍生于其数字基础。但随着代数本身的发展，或者说扩张，代数已经离数字基础日趋遥远，代数中解释记号和符号的方法与算术中的解释方法已是相当不同，更不要说在结构、运算、思维、推理以及意义等方面所表现出的灵活性与数的运算、思维、推理和意义的大不同。显然，字母表示数以后，数学获得了极大的自由。不仅可以用字母表示运算法则、运算律以及计算公式；也可以用字母表示现实世界和各门学科的各种数量关系，并且用字母表示数使得便于从具体情境中抽象出数量关系和变化规律并确切地表示出来。这种自由，一方面带来了极大便利，同时也对理解代数式带来极大挑战。正如前面所介绍，学生在从算术到代数的学习转变过程中要调整许多符号和记号等概念的意义，达到从具体到一般的思维飞跃，并在一般意义上通过推理研究对象的关系与结构，把握事物间的数量关系和变化规律，实现从数到代数的思维飞跃，获得代数意义，发展自身的代数应用意识及初步的代数应用能力。如果在教学中只将注意力放在数式一致性上，就会模糊数与代数的区别，使得学生难以真正掌握代数的特殊性。

在数与代数的教学中，教师应该结合具体的教学内容采用“问题情境－建立模型－解释、应用与拓展”的过程来进行。教师在“数与代数”教学中可以运用数与形的转化帮助学生理解和掌握知识，可以利用转化思维帮助学生实现数学知识由抽象、复杂向直观、简单的转化。在教学过程中可以提供充分的正反实例以帮助学生建构代数概念；提供多种学习经历和学习任务使学生体验从文字到符号的过程，有效掌握符号的代数意义。在解题时引导学生自主探索与合作交流，培养学生代数思维和代数推理能力；让学生在实际、具体的数学活动中体验和应用数与式，重视培养学生的应用意识和实践能力。

参考文献

[1] 章建跃. 核心素养导向的初中数学教学变革——以“数与式”为例[J]. 中学数学教学参考, 2023(2): 2-5+21.

[2] 浦叙德. 抓住数式通性学透二次根式[J]. 初中生世界, 2023(Z5): 83-84.

[3] 刘久成, 刘久胜. 代数思维及其教学[J]. 课程·教材·教法, 2015, 35(12): 76-81.

[4] 吴增生. 基于内容领域聚焦核心素养的专题复习教学研究[J]. 中国数学教育, 2021(7): 3-7.

[5] 吴增生, 郑燕红. 单元整体教学实验研究[J]. 中国数学教育, 2014(11): 2-11.

[6] 史炳星. 从算数到代数[J]. 数学教育学报, 2004(2): 79-81.
[7] 张宁. 数与式的区别与联系[J]. 考试周刊, 2008(5): 40.
[8] 郑毓信. 算术与代数的区别与联系[J]. 小学教学研究, 2011(19): 11-14.
[9] 李士锜, 吴颖康. 数学教学心理学[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2011.
[10] 季伟. 基于专题研究课, 发展代数推理能力——以"一次函数 $y = kx + b$ 中 k 的再认识"为例[J]. 知识文库, 2022(5): 187-189.
[11] 蔡金法. 数学教育研究手册(上册) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
[12] 杨翠丽. 初中生代数学习的认知建构研究[D]: [博士学位论文]. 上海: 华东师范大学, 2018.
[13] 刘志刚. 初中数学新课程中数与代数的教学研究[J]. 教育教学论坛, 2009(9): 57.
[14] 史宁中. 数学课程标准修订与核心素养[J]. 教育研究与评论, 2022(5): 18-27.
[15] 梁银华. 七年级学生代数推理能力培养的实践研究[D]: [硕士学位论文]. 广州: 广州大学, 2023.
[16] 鲍建生. 数学学习的心理基础与过程[M]. 上海: 上海教育出版社, 2009: 328.
[17] 吴琨. 例析中考代数推理题及其教学反思[J]. 中学数学, 2023(22): 14-15+97.