

事件触发控制的耦合系统的输入到状态稳定性

杨弘, 马楠

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2024年2月4日; 录用日期: 2024年3月22日; 发布日期: 2024年3月29日

摘要

本文研究了基于事件触发脉冲控制(ETIC)策略的网络上一般非线性脉冲耦合系统的输入到状态稳定性(ISS), 其中脉冲序列由一些预先设计的事件条件生产。与传统的事件触发控制不同, ETIC是指控制器仅在某些与状态相关的事件条件被触发时才被激活, 而且在两个连续的触发脉冲瞬间之间没有任何控制传输。事件触发脉冲通常被认为是一类与状态相关的脉冲, 其中事件触发机制(ETM)是一个脉冲发生器。利用ETIC策略和图论的方法, 建立基于Lyapunov的准则, 可以有效避免无限快的触发行为, 保证非线性耦合脉冲系统的ISS。为了证明理论结果, 我们给出了一个数值模拟的例子来证明理论结果的有效性。

关键词

事件触发脉冲控制(ETIC), 脉冲耦合系统, 图论, 无限快触发行为, 输入到状态稳定性(ISS)

Input-to-State Stability of Coupled Systems with Event-Triggered Control

Hong Yang, Nan Ma

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 4th, 2024; accepted: Mar. 22nd, 2024; published: Mar. 29th, 2024

Abstract

This paper investigates the input-to-state stability (ISS) of a nonlinear impulse coupled system on a network based on an event-triggered impulse control (ETIC) strategy, where the impulse sequence is produced by some pre-designed event conditions. In contrast to traditional event-triggered control, ETIC means that the controller is activated only when some state-dependent event condition

is triggered without any control transfer between two consecutive triggering pulse instants. Event-triggered impulses are generally considered to be a class of state-dependent impulses, where the event-triggered mechanism (ETM) is an impulse generator. Using the ETIC strategy and graph-theoretic methods, a Lyapunov-based criterion can be constructed to effectively avoid infinitely fast triggering behaviors and to guarantee ISS for nonlinearly coupled pulsed systems. In order to prove the theoretical results, an example of numerical simulation is given to demonstrate the validity of the theoretical results.

Keywords

Event-Triggered Impulse Control (ETIC), Impulse-Coupled Systems, Graph Theory, Infinitely Fast Triggering Behavior, Input-to-State Stability (ISS)

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在过去的几十年里, 网络上的耦合系统在生物系统[1] [2]、神经网络[3] [4]、化学系统[5]、流行病模型[6] [7]等领域的广泛应用受到了极大的关注。由于耦合系统的动力学不仅取决于单个顶点动力学, 而且取决于耦合拓扑结构, 因此网络上耦合系统的稳定性分析是一项艰巨的任务。通常图论的应用可以帮助我们处理许多关于耦合系统的难题。在[8] [9]中, Li 等人利用图论探讨了网络上常微分方程一般耦合系统的稳定性。利用 Kirchhoff 矩阵树定理, 构造了基于单个顶点系统的大型耦合系统的全局 Lyapunov 函数。此后, 利用该方法得到了一些新的耦合系统稳定性的充分条件, 如离散时间耦合系统[10]、脉冲耦合系统[11]、时滞耦合系统[12] [13]、随机耦合系统[14]等。

在现实世界中, 许多进化过程的特征是在某些时刻他们经历状态的突然变化。因此自然地假设这些扰动是瞬间发生的, 即以脉冲的形式发生作用。脉冲微分方程, 也就是涉及脉冲效应的方程, 是对几个现实世界问题的自然描述, 比如种群生物学、有节奏的跳动、化学物质的扩散、电磁波的辐射等等。因此, 研究具有脉冲效应的动力系统非常重要。但现有的很多结论是基于时间触发控制的, 其中脉冲序列是人工确定的, 也就是说, 脉冲控制输入是在一些预设的时刻传输的, 而不管输入是否必要, 这可能会导致实际应用中不必要的控制消耗。

而事件触发可以有效减少不必要的资源消耗。它描述了控制器只需要在一些离散的触发时间进行更新, 而这些触发时刻是由预先定义的与状态有关的标准决定的。由于脉冲控制策略结构简单, 只需要离散控制就可以达到预期的性能, 因此 ETIC 作为事件触发控制和脉冲控制的结合, 近年来受到越来越多的关注。实际上, 事件触发的脉冲是一类状态脉冲, 通过将 ETM 集成到脉冲控制中, 事件触发脉冲通过某些时刻瞬间调整状态来调节系统的状态, 这些状态由一些设计的 ETM 决定。但是, 在实际执行中, 这种控制策略需要排除无限快的触发行为作为前提条件。芝诺行为, 即存在无限多的收敛为正常数的触发时刻[15]。Borgers 和 Heemels [16]表明, 在存在外生扰动或测量噪声的情况下可能存在芝诺行为, 这为我们设计事件触发机制(ETM)增加了挑战。另一种情况是触发间隔收敛到 0, 而触发时刻却变成了无穷大。从应用的角度来看, 触发间隔应该以正数为最小下限。

近年来, 事件触发脉冲控制(ETIC)策略引起广泛关注, 因为它能有效地降低对传输信号的依赖。主

要说明脉冲信号只有在某些状态相关事件被触发时才被传递, 即脉冲控制器只能在触发瞬间被激活, 并且在两个连续的触发时刻之间没有任何其他控制传递[17]。在[18]中通过使用分布式 ETIC 策略研究了多智能体系的共识问题, 其中考虑了共识收敛率[19]。基于 ETIC 策略研究了连续动力系统的指数稳定性, 并将理论结果应用于忆阻神经网络, 其中所提出的控制策略涉及采样数据控制和脉冲控制。最近, 在[20]中通过 ETIC 策略研究了非线性脉冲系统的 Lyapunov 稳定性, 其中强制脉冲序列被认定为可以保证渐进性的特性。但[18] [19] [20]中的结果只能应用于某些特定的动力系统, 而且排除了外源扰动的影响, 导致一些应用受到限制。在[21]中, 通过使用 ETIC 策略考虑了连续动力系统的 ISS 性, 其中提出了涉及三个事件级别的 ETM。然而, 忽略了脉冲扰动输入的可能性, 并且引入了相对较大的数字来限制触发间隔, 这导致了保守结果。在[22]中, 通过 ETIC 策略研究了涉及外生扰动的一般非线性脉冲系统的 ISS 性。但还没有基于脉冲耦合系统的 ISS 结果。我们知道, 在现有的大多数关于脉冲耦合系统的 ISS 问题的结果中, 都提出了小增益定理, 如脉冲耦合系统[23] [24] [25]、具有时滞的脉冲耦合系统[26]。但在某些特殊的网络结构下, 即使小增益条件不满足, 耦合系统可能也具有 ISS 性。在某些特殊的网络结构下能否消除小增益条件是一个值得关注的问题。

受上述现有工作的启发, 本文利用 ETIC 策略研究了一般非线性脉冲耦合系统的 ISS 性。科学和工程领域的许多动力系统可以被描述为网络上的脉冲耦合系统。脉冲耦合系统的数学描述是一个有向图, 其中每个顶点上分布一个脉冲微分方程组, 有向弧将他们连接起来。本文的主要贡献如下:

- (i) 首次提出了在 ETIC 策略的框架下, 非线性脉冲耦合系统 ISS 的问题。
- (ii) 应用图论的知识, 从单个顶点系统的构建块构造了一个总网络 ISS 的 Lyapunov 函数。
- (iii) 得到了所处理的系统在 ETM 下具有 ISS 性的充分条件, 这些条件与小增益条件不同, 比小增益条件更容易验证。其中 ETM 包含强制脉冲。设计的 ETM, 排除了无限快触发行为, 建立了触发参数、脉冲强度和外生扰动之间的关系, 保证了脉冲耦合系统的 ISS。

本文的其余部分组织如下, 第 2 节介绍了一些基本定义和符号; 第 3 节给出了主要结果; 第 4 节给出一个例子来证明结果的有效性; 第 5 节给出了结论。

2. 预备知识

\mathbb{R}^n 为 n 维欧氏空间; $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$; \mathbb{N} 为正整数集; $|\cdot|$ 为 n 维空间欧氏范数; 对于任意 $x \in \mathbb{R}^+$, x^T 为它的转置。 $\|\cdot\|_\sigma$ 表示区间 σ 上的上确界范数, $a \vee b$ 和 $a \wedge b$ 分别表示 a 和 b 的最大值和最小值。 $C(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 表示连续映射的空间 \mathcal{X} 到 \mathcal{Y} 。

如果函数 $\alpha: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是连续的, 严格递增的函数且 $\alpha(0) = 0$ 则称函数 α 为 K 类函数。特别的, 如果 $\alpha \in K$ 且 α 是 \square 界的, 则称 α 是 K_∞ 类函数。如果 $\beta(\cdot, t)$ 对于任意固定的 $t > 0$ 是 K 类函数, 并且 $\beta(s, t)$ 随着 $t \rightarrow \infty$ 对于每个固定的 $s > 0$ 减少到 0, 则称函数 $\beta: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 为 KL 类函数。

下面回顾图论的一些知识, 这些知识将在本文的其余部分中使用。有向图 $\mathcal{G} = (\mathbb{L}, E)$ 包含一个由顶点组成的集合 \mathbb{L} 和从初始顶点 i 到终端顶点 j 的弧 (i, j) 组成的集合 E 。如果 \mathcal{G}' 和 \mathcal{G} 具有相同的顶点集, 则称 \mathcal{G}' 的子图 \mathcal{G}' 是生成子图。如果每个弧 (i, j) 被赋一个正权重 m_{ij} , 则有向图 \mathcal{G} 被加权。当且仅当 \mathcal{G} 中存在从顶点 j 到顶点 i 的弧时 $m_{ij} > 0$, 称 $M = (m_{ij})_{|\mathbb{L}| \times |\mathbb{L}|}$ 为权重矩阵。 \mathcal{G} 的权重 $W(\mathcal{G})$ 是其所有弧线上权重的乘积。 \mathcal{G} 中的有向路径 Q 是一个具有不同顶点 $\{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ 的子图, 使得它的弧集为 $\{(a_i, a_{i+1}) : i = 1, 2, \dots, s-1\}$ 。如果 $a_s = a_1$, 我们称 Q 为有向圈。如果连通子图 Γ 不包含圈, 则称其是树。如果 i 不是任何弧的顶点, 且其余每个顶点都正好是一条弧的终端顶点, 那么树 Γ 就以顶点 i 为根(称为根)。如果子图 Q 是有根树的不相交并, 其根部形成有向圈, 则它是无圈图。如果对于任何一对不同的顶

点, 存在从一个顶点到另一个顶点的有向路径, 则有向图 \mathcal{G} 是强连通的。将具有权重矩阵 M 的有向图记为 (\mathcal{G}, M) 。如果对于所有有向圈 F 有 $W(F) = W(-F)$, 则称加权有向图 (\mathcal{G}, M) 是平衡的。其中 $-F$ 表示 F 的逆向, 是通过反转 F 中所有弧的方向来构造。对于有向圈 F_Q 的无圈图 Q , 设 \tilde{Q} 为用 $-F_Q$ 代替 F_Q 得到的无圈图。假设 (\mathcal{G}, M) 是平衡的, 则 $W(Q) = W(\tilde{Q})$ 。 (\mathcal{G}, M) 的拉普拉斯矩阵定义为

$$L = \begin{pmatrix} \sum_{i \neq 1} m_{1i} & -m_{12} & \cdots & -m_{1l} \\ -m_{21} & \sum_{i \neq 2} m_{2i} & \cdots & -m_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{l1} & -m_{l2} & \cdots & \sum_{i \neq l} m_{li} \end{pmatrix}$$

以下引理是图论中有用的结论, 将用于证明。通常被称为广义基尔霍夫矩阵树定理。

引理 1 [9]: 假设 $l \geq 2$, c_i 为 (\mathcal{G}, M) 的拉普拉斯矩阵的第 i 个对角元素的余子式, 则下列恒等式成立:

$$\sum_{i,j=1}^l c_i m_{ij} T(x_i, x_j) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} W(Q) \sum_{(h,k) \in E(F_Q)} T_{kh}(x_k, x_h) \quad (1)$$

其中 $T(x_i, x_j)$ 是一个任意的连续函数, \mathcal{Q} 是 (\mathcal{G}, M) 的所有生成无圈图的集合, $W(Q)$ 是 Q 的权重, F_Q 表示 Q 的有向圈, $E(F_Q)$ 是 F_Q 中的弧合。特别地, 如果 (\mathcal{G}, M) 是强连接的, 那么 $c_i > 0, 1 \leq i \leq l$ 。

在本节的其余部分, 我们将给出模型的表示方法, 并阐述一些将在主要结果中使用的定义。

考虑以下具有外生扰动的一般非线性脉冲耦合系统。

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), \omega_{i1}(t)) + \sum_{j=1}^l F_{ij}(x_i(t), x_j(t)), i \in \mathbb{L}, t \neq t_k, k \in \mathbb{N}, \\ x_i(t) = I_{ik}(x_i(t^-), \omega_{i2}(t^-)), i \in \mathbb{L}, t = t_k, k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\mathbb{L} = \{1, 2, \dots, l\}$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ 是第 i 个动态节点的状态变量, $\dot{x}_i(t)$ 是 $x_i(t)$ 的右上导数, $\omega_{i1}(t) \in \mathbb{R}^{m_{i1}}$ 是局部有界的外口扰动输入, $\omega_{i2}(t) \in \mathbb{R}^{m_{i2}}$ 是脉冲扰动输入。设 $\omega_1 = (\omega_{11}^T, \omega_{21}^T, \dots, \omega_{l1}^T)^T$, $\omega_2 = (\omega_{12}^T, \omega_{22}^T, \dots, \omega_{l2}^T)^T$ 。耦合函数 $F_{ij}: \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_j} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i}$ 是连续的, 函数 $f_i \in C(\mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{m_{i1}}, \mathbb{R}^{n_i})$ 和函数 $I_{ik} \in C(\mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{m_{i2}}, \mathbb{R}^{n_i})$ 满足 f_i 是局部 Lipschitz 和 $\forall k \in \mathbb{N}, f_i(0, 0) = I_{ik}(0, 0) = 0$, 使得系统(2)存在唯一解 $x(t) = (x_1^T(t), x_2^T(t), \dots, x_l^T(t))^T$, 相应的非强制系统(即 $\omega_{i1} = 0, \omega_{i2} = 0$)有零解。序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 是一组脉冲序列。假设系统(2)的解在脉冲时刻 t_k 是右连续的, 即 $x_i(t_k) = x_i(t_k^+), k \in \mathbb{N}$ 且 $n = \sum_{i=1}^l n_i, m_1 = \sum_{i=1}^l m_{i1}, m_2 = \sum_{i=1}^l m_{i2}$ 。

在系统(2)中, 函数 f_i 描述系统第 i 个顶点的状态。函数 F_{ij} 表示第 j 个顶点对第 i 个顶点的影响。当且仅当系统中不存在第 j 个顶点对第 i 个顶点的影响时, $F_{ij} = 0$ 。

为了利用图论分析系统(2)的稳定性, 我们现在为系统(2)建立一个有向图 (\mathcal{G}, M) 。每个有向图中有 l 个顶点。第 i 个单独的子系统称为顶点系统。在有向图 (\mathcal{G}, M) 中, 从第 j 个顶点到第 i 个顶点的弧表示从第 j 个顶点系统到第 i 个顶点系统的扩散。将网络(2)上的非线性脉冲耦合系统描述为有向图 (\mathcal{G}, M) 上的 nl 维系统。

定义 1 [27]: 如果存在函数 $\beta \in KL$ 和 $\gamma_1, \gamma_2 \in K_\infty$, 使得对任意初始条件 $x(t_0)$ 和任意输入 (u_c, u_d) , 系统(2)的解 $x(t)$ 全局存在并满足以下条件,

$$|x(t)| \leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0) + \gamma_1(\|\omega_1\|_{[t_0, t]}) + \gamma_2\left(\max_{t_0 < t_k \leq t} \{\|\omega_2(t_k^-)\|\}\right), t \geq t_0$$

则称其是输入 - 状态稳定(ISS)的。

定义 2: 如果 $V_i \in C(\mathbb{R}^{n_i}, \mathbb{R}_+)$, 则相对于系统(2)的 Dini 导数定义为

$$D^+V_i(x_i(t)) = \frac{\partial V_i(x_i(t))}{\partial t} + \frac{\partial V_i(x_i(t))}{\partial x_i} \left[f_i(x_i(t), \omega_{i1}(t)) + \sum_{j=1}^l F_{ij}(x_i(t), x_j(t)) \right]$$

设 $D \subset \mathbb{R}^n$, $x(t) = (x_1^T(t), x_2^T(t), \dots, x_l^T(t))^T \in D$, 定义函数 $V: \mathbb{R}_+ \times D \rightarrow \mathbb{R}_+$ 满足 $V(x) = \sum_{i=1}^l c_i V_i(x_i)$, 其中 c_i 满足引理 1 中的定义, 则

$$D^+V(x(t)) = \frac{\partial V(x(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^l \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_i} \left[f_i(x_i(t), w_{i1}(t)) + \sum_{j=1}^l F_{ij}(x_i(t), x_j(t)) \right].$$

3. 理论结果

在本节中, 基于 ETIC 策略, 建立基于 Lyapunov 的准则, 以排除 Zeno 行为并保证系统(2)的 ISS, 为此, 我们考虑以下 ETM:

$$\begin{aligned} t_k &= \min \{t_k^*, \tau_k\}, k \in \mathbb{N}, \\ t_k^* &= \inf \{t > t_{k-1} : H(t) \geq 0\}, \end{aligned} \tag{3}$$

事件发生函数:

$$\begin{aligned} h_i(t) &= V_i(x_i(t)) - e^{a_k} V_i(x_i(t_{k-1})) - e^{b_k} \psi_i(\|\omega_{i1}\|_{[t_{k-1}, t]}), \\ H(t) &\triangleq \sum_{i=1}^l c_i h_i(t) = V(x(t)) - e^{a_k} V(x(t_{k-1})) - e^{b_k} \sum_{i=1}^l c_i \psi_i(\|\omega_{i1}\|_{[t_{k-1}, t]}), \end{aligned}$$

其中 $\psi_i \in K_\infty$, 触发参数 $a_k, b_k \in \mathbb{R}_+$ 有界, 且满足:

$$\sum_{k=1}^n (a_k \wedge b_k) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty \tag{4}$$

$V(x(t))$ 和 $V(x(t_{k-1}))$ 是 Lyapunov 函数, 分别取决于系统(2)的解 $x(t)$ 在 t 时刻和被触发的脉冲时刻 t_{k-1} 的值, 强制脉冲序列 $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 满足 $\tau_0 = t_0$ 和 $\inf_{k \in \mathbb{N}} \{\tau_k - \tau_{k-1}\} > 0$ 。

首先, 给出以下定理来排除系统(2)的芝诺行为。

定理 1: 假设加权有向图 (\mathcal{G}, M) 是强连通的且存在局部 Lipschitz 函数 $V_i: \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}_+$, 函数 $\psi_i \in K_\infty$, 以及常数 $a_k, b_k, \lambda_i \in \mathbb{R}_+, m_{ij} \geq 0, k \in \mathbb{N}$, 连续函数 $T_{ij}(x_i, x_j), i, j \in \mathbb{L}$ 使得

$$(i) \quad D^+V_i(x_i(t)) \leq \lambda_i V_i(x_i(t)) + \psi_i(\|\omega_{i1}\|) + \sum_{j=1}^l m_{ij} T_{ij}(x_i(t), x_j(t)), t \in [t_{k-1}, t_k),$$

(ii) 在加权有向图 (\mathcal{G}, M) 的每个有向圈 F_Q 上, 对任意 $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$ 有

$$\sum_{(j,i) \in E(F_Q)} T_{ij}(x_i, x_j) \leq 0,$$

其中 $M = (m_{ij})_{l \times l}$ 。

则在 ETM(3)下, 系统(2)没有芝诺行为。此外, 触发的脉冲序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 满足:

$$t_k - t_{k-1} \geq \frac{a_k \wedge b_k}{\lambda \vee 1}, k \in \mathbb{N} \tag{5}$$

其中 $\lambda = \max_{i \in \mathbb{L}} \{\lambda_i\}$ 。

证明: 由于 ETM(2)由两类脉冲序列组成, 于是考虑以下三种情况。

情况 1: 触发脉冲序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 完全由强制脉冲时刻组成, 即对任意 $k \in \mathbb{N}$, $t_k = \tau_k$ 。鉴于假设 $\inf_{k \in \mathbb{N}} \{\tau_k - \tau_{k-1}\} > 0$, 易知无芝诺行为。

情况 2: 触发脉冲序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 中同时存在强制脉冲时刻 τ_k 和事件触发时刻 t_k^* , 即 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \cap \{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}} \neq \emptyset$ 和 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \cap \{t_k^*\}_{k \in \mathbb{N}} \neq \emptyset$ 。

首先, 假设在触发的脉冲序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 中存在着无限的强制脉冲时刻。如果在 ETM(3)下存在芝诺行为, 那么在区间 $[t_0, T^*]$ 上存在无限的触发脉冲时刻, 其中 T^* 是触发脉冲序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 的累积时间。即触发脉冲序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 收敛于时间 T^* , 这就意味着强制脉冲序列 $\{\tau_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 也会收敛, 这与假设 $\inf_{k \in \mathbb{N}} \{\tau_k - \tau_{k-1}\} > 0$ 矛盾。因此在上述假设情况下无芝诺行为。

其次, 假设存在满足 $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{N+1}$ 的有限强制脉冲时刻。显然在最后一个强制脉冲时刻 τ_{N+1} 之后, 触发的脉冲时刻 t_k 完全由事件触发时刻 t_k^* 组成, 即 $t_{N+1+k} = t_{N+1+k}^*, k \in \mathbb{N}$ 。由条件(i)和(ii)结合引理 1 可得, $\forall k \in \mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq \lambda V(x(t)) + \sum_{i=1}^l c_i \psi_i(\|\omega_{i1}(t)\|) + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l c_i m_{ij} T_{ij}(x_i(t), x_j(t)) \\ &\leq \lambda V(x(t)) + \sum_{i=1}^l c_i \psi_i(\|\omega_{i1}(t)\|) + \sum_{Q \in \mathbb{Q}} W(Q) \sum_{(h,k) \in E(F_Q)} T_{hk}(x_h, x_k) \\ &\leq \tilde{\lambda} V(x(t)) + \sum_{i=1}^l c_i \psi_i(\|\omega_{i1}(t)\|), t \in [t_{k-1}, t_k] \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $V(x(t)) = \sum_{i=1}^l c_i V_i(x_i(t))$, $\lambda = \max_{i \in \mathbb{L}} \{\lambda_i\}$, $\tilde{\lambda} = \lambda \vee 1$ 。则, 由(6)可得

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq e^{\tilde{\lambda}(t-t_{N+k})} V(x(t_{N+k})) + \sum_{i=1}^l c_i \int_{t_{N+k}}^t \psi_i(\|\omega_{i1}(s)\|) e^{\tilde{\lambda}(t-s)} ds \\ &\leq e^{\tilde{\lambda}(t-t_{N+k})} V(x(t_{N+k})) + \frac{e^{\tilde{\lambda}\mu_N^k}}{\tilde{\lambda}} \sum_{i=1}^l c_i \psi_i(\|\omega_{i1}\|_{[t_{N+k}, t_{N+k+1}]}) \end{aligned}$$

其中 $\mu_N^k = t_{N+k+1} - t_{N+k}$ 。结合 ETM(2)可得

$$\begin{aligned} V(x(t_{N+k+1}^-)) &= e^{a_{N+k+1}} V(x(t_{N+k})) + e^{b_{N+k+1}} \sum_{i=1}^l c_i \psi_i(\|\omega_{i1}\|_{[t_{N+k}, t_{N+k+1}]}) \\ &\leq e^{\tilde{\lambda}\mu_N^k} V(x(t_{N+k})) + \frac{e^{\tilde{\lambda}\mu_N^k}}{\tilde{\lambda}} \sum_{i=1}^l c_i \psi_i(\|\omega_{i1}\|_{[t_{N+k}, t_{N+k+1}]}) \\ &\leq e^{\tilde{\lambda}\mu_N^k} \left[V(x(t_{N+k})) + \sum_{i=1}^l c_i \psi_i(\|\omega_{i1}\|_{[t_{N+k}, t_{N+k+1}]}) \right] \end{aligned} \tag{7}$$

由上式可得

$$e^{a_{N+k+1}} \wedge e^{b_{N+k+1}} \leq e^{\tilde{\lambda}\mu_N^k} \tag{8}$$

由此可得 $t_{N+k+1} - t_{N+k} \geq \frac{a_{N+k+1} \wedge b_{N+k+1}}{\tilde{\lambda}}$, 即 $t_{N+m+1} \geq \frac{1}{\tilde{\lambda}} \sum_{k=1}^m (a_{N+k+1} \wedge b_{N+k+1}) + t_{N+1}$ 。由(4)式可得 $t_{N+m+1} \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$ 。综上可知情况 2 无芝诺行为。

情况 3: 触发脉冲序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 完全由事件触发的时刻组成, 即 $\forall k \in \mathbb{N}, t_k = t_k^*$. 由(6), 有

$$V(x(t)) \leq e^{\tilde{\lambda}(t-t_{k-1})} V(x(t_{k-1})) + \sum_{i=1}^l c_i \int_{t_{k-1}}^t \psi_i(\|\omega_{i1}(s)\|) e^{\tilde{\lambda}(t-s)} ds, t \in [t_{k-1}, t_k]$$

与(7)式同理可得

$$\begin{aligned} V(x(t_k^-)) &= e^{a_k} V(x(t_{k-1})) + e^{b_k} \sum_{i=1}^l c_i \psi_i(\|\omega_{i1}\|_{[t_{k-1}, t_k]}) \\ &\leq e^{\tilde{\lambda} \mu_{k-1}} \left[V(x(t_{k-1})) + \sum_{i=1}^l c_i \psi_i(\|\omega_{i1}\|_{[t_{k-1}, t_k]}) \right] \end{aligned}$$

其中 $\mu_{k-1} = t_k - t_{k-1}$. 同(8)步骤, 可得无芝诺行为. 此外 $t_k - t_{k-1} \geq \frac{a_k \wedge b_k}{\tilde{\lambda}}, k \in \mathbb{N}$.

因此不管是哪种情况, 在 ETM (2)下都没有芝诺行为且 $t_k - t_{k-1} \geq \frac{a_k \wedge b_k}{\tilde{\lambda}}, k \in \mathbb{N}$, 其中 $\tilde{\lambda} = \lambda \vee 1$.

备注 1: 定理 1 提出了在涉及外部扰动时排除芝诺行为的充分条件, 其中(5)指出, 触发间隔触发以参数 a_k 和 b_k 为下限. ETM 中引入的触发参数 b_k 描述了外部扰动的影响, 对于排除芝诺行为非常重要. 事实上, 选择较大的触发参数 a_k 和 b_k 可以增加触发间隔的下限, 触发频率将下降. 反之, 选择较小的触发参数 a_k 和 b_k , 可以降低触发间隔的下限, 被触发的频率将增加.

备注 2: 定理 1 是为了排除芝诺行为, 对触发间隔下限的限制与触发参数 a_k 和 b_k 有关, 所以它们是时变. 从(5)中可以看出, 触发间隔 $t_k - t_{k-1}$ 可能会随着 k 的增长趋于 0, 即无限快的触发行为, 例如触发的脉冲序列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n+1} \right)$, 尽管触发时刻 t_k 将随着 k 的增长趋于无穷大, 但控制器需要无限快地操作. 因此对于 ETIC 策略的实际实施, 有必要 $\inf_{k \in \mathbb{N}} \{t_k - t_{k-1}\}$ 严格为正. 那么可以得到以下推论.

推论 2: 在定理 1 的条件下, 假设触发参数 a_k 和 b_k 满足 $\inf_{k \in \mathbb{N}} \{a_k \wedge b_k\} = \rho$, 其中 $\rho \in \mathbb{R}_+$, 则系统(2)在 ETM(3)下不存在无限快的触发行为. 此外触发区间 $t_k - t_{k-1}$ 有一致最小的下界,

$$t_k - t_{k-1} \geq \frac{\rho}{\lambda \vee 1}, k \in \mathbb{N}.$$

事实上, 如果在网络上添加其他条件可以得到更好的结果. 如果有向图 (\mathcal{G}, M) 是平衡的, 那么

$$\sum_{i,j=1}^l c_i m_{ij} T(x_i, x_j) = \frac{1}{2} \sum_{Q \in \mathcal{Q}} W(Q) \sum_{(h,k) \in E(F_Q)} (T_{kh}(x_k, x_h) + T_{hk}(x_h, x_k))$$

在这种情况下, 条件(ii)被以下不等式取代

$$\sum_{(h,k) \in E(F_Q)} (T_{kh}(x_k, x_h) + T_{hk}(x_h, x_k)) \leq 0 \tag{9}$$

因此可以得到以下推论:

推论 3: 假设 (\mathcal{G}, M) 是平衡的. 将(ii)替换为(9), 定理 1 的结论成立.

若 $\forall i, j \in \mathbb{L}$, 存在函数 $R_i(x_i)$, 使得

$$T_{ij}(x_i, x_j) \leq R_i(x_i) - R_j(x_j) \tag{10}$$

则(ii)成立. 因此可以得到以下推论.

推论 4: 如果将(ii)替换为(10), 则定理 1 的结论成立

接下来, 通过定理 1 提出系统(2) ISS 的充分条件.

定理 2: 在定理 1 的条件下, 如果存在函数 $\chi_i \in K_\infty$ 和常数 $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}$, $a_k, d_k, u, v \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ 使得

(iii) $\alpha_1^{(i)} |x_i|^p \leq V_i(x_i) \leq \alpha_2^{(i)} |x_i|^p, x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$

(iv) $V_i(g_k(x_i, \omega_{i2})) \leq e^{-d_k} V_i(x_i) + \chi_i(\|\omega_{i2}\|), x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$

(v) 对于任意给定整数 $m \geq 2$, 触发参数 a_k, b_k 和脉冲强度 d_k 满足

$$uq + \sum_{k=1}^q (a_{m-k} - d_{m-k}) + b_{m-k} \leq v, \forall q \in \{1, \dots, m-1\}$$

则系统(2)在 ETM(3)下是 ISS 的。

证明: 设 $x(t) \triangleq x(t, t_0, x_0)$ 表示系统(2)通过初值 (t_0, x_0) 的解, $V(x) = \sum_{i=1}^l c_i V_i(x_i(t))$ 。由条件(iii)可得

$$V(x) \leq \sum_{i=1}^l c_i \alpha_2^{(i)} |x_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^l c_i \alpha_2^{(i)} \right) |x|^p = \alpha_2 |x|^p,$$

其中 $\alpha_2 = \sum_{i=1}^l c_i \alpha_2^{(i)}$ 。同理可得,

$$\begin{aligned} V(x) &\geq \sum_{i=1}^l c_i \alpha_1^{(i)} |x_i|^p \\ &\geq \sum_{i=1}^l c_i \alpha_1^{(i)} \sum_{i=1}^l \left[\frac{c_i \alpha_1^{(i)}}{\sum_{j=1}^l c_j \alpha_1^{(j)}} \left(|x_i|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right] \\ &\geq \sum_{i=1}^l c_i \alpha_1^{(i)} \left[\frac{\sum_{i=1}^l c_i \alpha_1^{(i)}}{\sum_{j=1}^l c_j \alpha_1^{(j)}} \left(|x_i|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right] \\ &\geq \left(\min_{i \in L} \{c_i \alpha_1^{(i)}\} \right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{i=1}^l c_i \alpha_1^{(i)} \right)^{1-\frac{p}{2}} |x|^p \\ &= \alpha_1 |x|^p, \end{aligned}$$

其中 $\alpha_1 = \left(\min_{i \in L} \{c_i \alpha_1^{(i)}\} \right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{i=1}^l c_i \alpha_1^{(i)} \right)^{1-\frac{p}{2}}$ 。因此,

$$\alpha_1 |x|^p \leq V(t) \leq \alpha_2 |x|^p \tag{11}$$

由 ETM(3)可得,

$$V(x(t)) \leq e^{a_k} V(x(t_{k-1})) + e^{b_k} \sum_{i=1}^l c_i \psi_i \left(\|\omega_{i1}\|_{[t_{k-1}, t)} \right), t \in [t_{k-1}, t_k), k \in \mathbb{N}$$

于是

$$V(x(t)) \leq e^{a_1} V(x(t_0)) + e^{b_1} \sum_{i=1}^l c_i \psi_i \left(\|\omega_{i1}\|_{[t_0, t)} \right), t \in [t_0, t_1)$$

由(iv)可得,

$$V(x(t_k)) \leq e^{-d_k} V(x(t_k^-)) + \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{X}_i \left(\|\omega_{i2}(t_k^-)\| \right)$$

于是

$$\begin{aligned} V(x(t_1)) &\leq e^{-d_1} V(x(t_1^-)) + \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{X}_i \left(\|\omega_{i2}(t_1^-)\| \right) \\ &\leq e^{a_1-d_1} V(x(t_0)) + e^{b_1-d_1} \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{Y}_i \left(\|\omega_{i1}\|_{[t_0, t_1]} \right) + \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{X}_i \left(\|\omega_{i2}(t_1^-)\| \right) \end{aligned}$$

同理可得,

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq e^{a_2} V(x(t_1)) + e^{b_2} \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{Y}_i \left(\|\omega_{i1}\|_{[t_1, t]} \right) \\ &\leq e^{a_2+a_1-d_1} V(x(t_0)) + e^{a_2-d_1+b_1} \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{Y}_i \left(\|\omega_{i1}\|_{[t_0, t_1]} \right) + e^{b_2} \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{Y}_i \left(\|\omega_{i1}\|_{[t_0, t]} \right) \\ &\quad + e^{a_2} \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{X}_i \left(\|\omega_{i2}(t_1^-)\| \right), t \in [t_1, t_2) \end{aligned}$$

重复上述步骤可得, $\forall t \in [t_{k-1}, t_k)$

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq e^{a_k} V(x(t_{k-1})) + e^{b_k} \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{Y}_i \left(\|\omega_{i1}\|_{[t_{k-1}, t]} \right) \\ &\leq \exp \left(a_k + \sum_{j=1}^{k-1} (a_j - d_j) \right) V(x_0) \\ &\quad + \exp \left(a_k + \sum_{j=2}^{k-1} (a_j - d_j) - d_1 + b_1 \right) \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{Y}_i \left(\|\omega_{i1}\|_{[t_0, t_1]} \right) \\ &\quad + \exp \left(a_k + \sum_{j=2}^{k-1} (a_j - d_j) \right) \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{X}_i \left(\|\omega_{i2}(t_1^-)\| \right) \\ &\quad + \exp \left(a_k + \sum_{j=3}^{k-1} (a_j - d_j) - d_2 + b_2 \right) \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{Y}_i \left(\|\omega_{i1}\|_{[t_1, t_2]} \right) \\ &\quad + \exp \left(a_k + \sum_{j=3}^{k-1} (a_j - d_j) \right) \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{X}_i \left(\|\omega_{i2}(t_2^-)\| \right) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \exp(a_k - d_{k-1} + b_{k-1}) \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{Y}_i \left(\|\omega_{i1}\|_{[t_{k-2}, t_{k-1}]} \right) \\ &\quad + \exp(a_k) \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{X}_i \left(\|\omega_{i2}(t_{k-1}^-)\| \right) \\ &\quad + \exp(b_k) \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{Y}_i \left(\|\omega_{i1}\|_{[t_{k-1}, t]} \right) \end{aligned}$$

由(v)和(11)可得,

$$\begin{aligned} \alpha_1 |x(t)|^p &\leq e^{v+a^*} \alpha_2 |x(t_0)|^p e^{-u(k-1)} + e^{(v+a^*)v b^*} \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{Y}_i \left(\|\omega_{i1}\|_{[t_0, t]} \right) + \frac{e^{v+a^*}}{1-e^{-u}} \sum_{i=1}^l c_i \mathcal{X}_i \left(\max_{t_0 < t_k \leq t} |\omega_{i2}| \right) \\ &\leq e^{v+a^*} \alpha_2 |x(t_0)|^p e^{-u(k-1)} + e^{(v+a^*)v b^*} \tilde{\psi} \left(\|\omega_{i1}\|_{[t_0, t]} \right) + \frac{e^{v+a^*}}{1-e^{-u}} \tilde{\chi} \left(\max_{t_0 < t_k \leq t} |\omega_{i2}| \right) \end{aligned}$$

其中 $a^* = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{a_k\}$, $b^* = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{b_k\}$, $\tilde{\psi}(\|\omega_1\|_{[t_0, t]}) = \sum_{i=1}^l c_i \psi_i(\|\omega_1\|_{[t_0, t]})$, $\tilde{\chi}(\max_{t_0 < t_k \leq t} |\omega_2|) = \sum_{i=1}^l c_i \chi_i(\max_{t_0 < t_k \leq t} |\omega_2|)$ 。

于是, 系统(2)在 ETM(3)下是 ISS 的。

备注 3: 条件(iv)表示在 ETM(3)被激活时 Lyapunov 函数的脉冲跳跃, 其中函数 $H(t) = 0$ 被视为脉冲面。当 $d_k > 0$ 时, 条件(iv)表明系统(2)涉及脉冲效应的离散动力学是稳定的(见[12])。条件(i)量化了两个触发时刻期间 Lyapunov 函数的连续动力学演化, 这表明系统(1)的连续动力学有可能是非 ISS 的。条件(v)建立了外生扰动和事件触发脉冲控制策略之间的关系, 这对保证系统(2)的 ISS 至关重要。

4. 实例分析

在本节中, 给出一个实例, 以证明我们提出的事件触发脉冲控制策略的有效性。

例题: 考虑一个网络上脉冲耦合系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \alpha_i x_i(t) + f_i(x_i(t)) - f_i(y_i(t)) + q_i \omega_{i1}(t) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} (x_i(t) - x_j(t)), t \neq t_k \\ \dot{y}_i(t) = \alpha_i y_i(t) + f_i(y_i(t)) - f_i(x_i(t)) + q_i \omega_{i1}(t) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} (y_i(t) - y_j(t)), t \neq t_k \\ x_i(t) = E x_i(t^-) + G \omega_{i2}(t^-), t = t_k, k \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{L} \\ y_i(t) = E y_i(t^-) + G \omega_{i2}(t^-), t = t_k, k \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{L} \end{cases} \quad (12)$$

其中 $x_i(t), y_i(t)$ 是 n 维列向量, 函数 $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续的并且满足 $\|f_i(x_i) - f_i(y_i)\| \leq L_i \|x_i - y_i\|, \forall x_i = y_i$ 。 $\beta_{ii} \leq 0$, $\omega_{i1} \in \mathbb{R}^n$, $\omega_{i2} \in \mathbb{R}^m$ 为输入函数。 E 是 $n \times n$ 矩阵, G 是 $n \times q$ 矩阵。

设 \mathcal{G} 是一个有向图, 有 n 个顶点。则(10)可视为 \mathcal{G} 上网络的耦合系统, 即每个顶点 i 被赋给(10)的第 i 个顶点系统。设 $m_{ij} = |\beta_{ij}|, i, j = 1, 2, \dots, l$, $M = (m_{ij})_{l \times l}$ 。假设下列条件成立:

(A1) (\mathcal{G}, M) 是强联通且平衡的;

(A2) $\alpha_i + 0.5|q_i| - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} + 2L_i > 0$

(A3) 存在常数 $a, b, d \in \mathbb{R}^+$, $a < d$, 满足 $2\lambda_{\max}(E^T E) < e^{-d}$ 。

则系统(12)在事件触发机制

$$\begin{aligned} t_k &= \min\{t_k^*, \tau_k\}, k \in \mathbb{N} \\ t_k^* &= \inf\{t > t_{k-1} : S(t) \geq 0\} \end{aligned} \quad (13)$$

下是 ISS 的, 其中,

$$\begin{aligned} S(t) &= \sum_{i=1}^l \frac{1}{2} c_i (x_i^T(t) x_i(t) + y_i^T(t) y_i(t)) \\ &\quad - e^a \sum_{i=1}^l \frac{1}{2} c_i (x_i^T(t_{k-1}) x_i(t_{k-1}) + y_i^T(t_{k-1}) y_i(t_{k-1})) \\ &\quad - |q_i| e^b \sum_{i=1}^l c_i \|\omega_{i1}(t)\|_{[t_{k-1}, t]}^2 \end{aligned}$$

证明: 设 $X_i(t) = (x_i(t), y_i(t)), i = 1, 2, \dots, l$, $V_i(X_i(t)) = \frac{1}{2}(x_i^T(t) x_i(t) + y_i^T(t) y_i(t))$ 。

$$\begin{aligned}
 D^+V_i(X_i(t)) &= \left[\alpha_i x_i(t) + f_i(x_i(t)) - f_i(y_i(t)) + q_i \omega_{i1}(t) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} (x_i(t) - x_j(t)) \right]^T x_i(t) \\
 &\quad + \left[\alpha_i y_i(t) + f_i(y_i(t)) - f_i(x_i(t)) + q_i \omega_{i1}(t) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} (y_i(t) - y_j(t)) \right]^T y_i(t) \\
 &\leq \left(\alpha_i + 0.5|q_i| - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \right) x_i^T(t) x_i(t) + (f_i(x_i(t)) - f_i(y_i(t)))^T x_i(t) \\
 &\quad + 0.5|q_i| \omega_{i1}^T(t) \omega_{i1}(t) + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_i^T(t) x_j(t) \\
 &\quad + \left(\alpha_i + 0.5|q_i| - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \right) y_i^T(t) y_i(t) + (f_i(y_i(t)) - f_i(x_i(t)))^T y_i(t) \\
 &\quad + 0.5|q_i| \omega_{i1}^T(t) \omega_{i1}(t) + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} y_i^T(t) y_j(t) \\
 &\leq \left(\alpha_i + 0.5|q_i| - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \right) (x_i^T(t) x_i(t) + y_i^T(t) y_i(t)) + L_i (\|x_i(t)\| + \|y_i(t)\|)^2 \\
 &\quad + |q_i| \omega_{i1}^T(t) \omega_{i1}(t) + \sum_{j=1}^q \beta_{ij} (x_i^T(t) x_j(t) + y_i^T(t) y_j(t)) \\
 &\leq \left(\alpha_i + 0.5|q_i| - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \right) (x_i^T(t) x_i(t) + y_i^T(t) y_i(t)) + 2L_i (\|x_i(t)\|^2 + \|y_i(t)\|^2) \\
 &\quad + |q_i| \omega_{i1}^T(t) \omega_{i1}(t) + \sum_{j=1}^q \beta_{ij} (x_i^T(t) x_j(t) + y_i^T(t) y_j(t)) \\
 &= \lambda_i V_i(X_i(t)) + \psi_i(|\omega_{i1}(t)|) + \sum_{j=1}^l m_{ij} T_{ij}(X_i(t), X_j(t))
 \end{aligned}$$

其中 $\lambda_i = 2 \left(\alpha_i + 0.5|q_i| - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} + 2L_i \right) > 0$, $\psi_i(|r_i|) = |q_i| r_i^2$,

$$\begin{aligned}
 T_{ij}(X_i(t), X_j(t)) &= \text{sgn}(\beta_{ij}) (x_i^T(t) x_j(t) + y_i^T(t) y_j(t)), \\
 T_{ji}(X_j(t), X_i(t)) &= \text{sgn}(\beta_{ji}) (x_j^T(t) x_i(t) + y_j^T(t) y_i(t)) \\
 \forall i \neq j, \quad &= -\text{sgn}(\beta_{ij}) (x_i^T(t) x_i(t) + y_i^T(t) y_i(t)) \\
 &= -T_{ij}(X_i(t), X_j(t))
 \end{aligned}$$

沿着加权有向图 $(\mathcal{G}, \mathbf{M})$ 的每个有向循环 F_Q 有,

$$\sum_{(i,j) \in E(F_D)} [T_{ij}(X_i, X_j) + T_{ji}(X_j, X_i)] = 0.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
 V_i(X_i(t_k)) &= \frac{1}{2} [Ex_i(t_k^-) + G\omega_{i2}(t_k^-)]^T [Ex_i(t_k^-) + G\omega_{i2}(t_k^-)] \\
 &\quad + \frac{1}{2} [Ey_i(t_k^-) + G\omega_{i2}(t_k^-)]^T [Ey_i(t_k^-) + G\omega_{i2}(t_k^-)] \\
 &\leq \lambda_{\max}(E^T E) (x_i^T(t_k^-) x_i(t_k^-) + y_i^T(t_k^-) y_i(t_k^-)) + 2\lambda_{\max}(G^T G) \omega_{i2}^T(t_k^-) \omega_{i2}(t_k^-) \\
 &\leq e^{-d} V_i(X_i(t_k^-)) + \chi_i(|\omega_{2i}(t_k^-)|)
 \end{aligned}$$

其中 $\chi_i(|s_i|) = 2\lambda_{\max}(G^T G)|s_i|^2$ 。由定理 2 可知系统(12)在事件触发机制(13)上是 ISS 的。

现在给出一个数值模拟来说明所得结果的有效性。令

$$X(0) = (x_1(0), y_1(0), x_2(0), y_2(0)) = (1.6, 0.2, 1.4, 0.3), \quad f_i(u) = \sin(iu), \quad \alpha_i = i, \quad (\beta_{ij})_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\omega_{i1}(t) = \omega_{i2}(t) = 5e^{-0.1t}, \quad i = 1, 2; \quad E = \frac{1}{4}, \quad G = \frac{1}{3}, \quad a = 0.48, \quad b = 0.8, \quad d = 2, \quad \text{事件触发机制}$$

$$t_k = \min\{t_k^*, 5k\}, k \in \mathbb{N}$$

$$t_k^* = \inf \left\{ t > t_{k-1} : \frac{1}{2} \left(x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + y_1(t)^2 + y_2(t)^2 \right) - e^{0.48} \frac{1}{2} \left(x_1(t_{k-1})^2 + x_2(t_{k-1})^2 + y_1(t_{k-1})^2 + y_2(t_{k-1})^2 \right) - 50e^{-0.16t} \geq 0 \right\},$$

可得系统是 ISS 的, 如图 1。

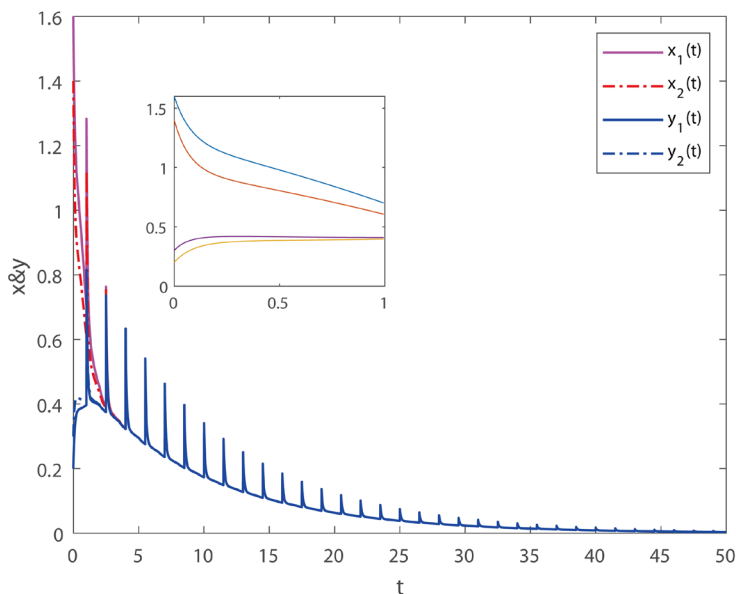


Figure 1. Time-series of two-dimension system
图 1. 二维系统的时间序列

5. 结论

本文利用 ETIC 策略得到网络上非线性脉冲耦合系统 ISS 充分条件, 其中脉冲序列由一些与状态相关的事件组成。所设计的 ETM, 既有效地避免了无限快速的触发行为, 也保证了脉冲系统的 ISS。在 ETIC 策略的框架下, 利用图论的方法提出了非线性脉冲耦合系统 ISS 的 Lyapunov 准则, 其中 ETM 包含强制脉冲。设计的 ETM, 建立了触发参数、脉冲强度和外生扰动之间的关系, 保证了脉冲耦合系统的 ISS。最后将所提出的 ETIC 策略应用于网络上非线性脉冲耦合系统的实例。

参考文献

[1] Strogatz, S.H. (2001) Exploring Complex Networks. *Nature*, **410**, 268-276. <https://doi.org/10.1038/35065725>
 [2] Grillner, S. (2006) Biological Pattern Generation: The Cellular and Computational Logic of Networks in Motion. *Neu-*

- ron, **52**, 751-766. <https://doi.org/10.1016/j.neuron.2006.11.008>
- [3] Chandrasekar, A., Rakkiyappan, R. and Cao, J.D. (2015) Impulsive Synchronization of Markovian Jumping Randomly Coupled Neural Networks with Partly Unknown Transition Probabilities via Multiple Integral Approach. *Neural Networks*, **70**, 27-38. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2015.07.002>
- [4] Li, W.X., et al. (2012) Global Stability for Discrete Cohen-Grossberg Neural Networks, with Finite and Infinite Delays. *Applied Mathematics Letters*, **25**, 2246-2251. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.06.011>
- [5] Wayman, J.A. and Varner, J.D. (2013) Biological Systems Modeling of Metabolic and Signaling Networks. *Current Opinion in Chemical Engineering*, **2**, 365-372. <https://doi.org/10.1016/j.coche.2013.09.001>
- [6] Sun, R. (2010) Global Stability of the Endemic Equilibrium of Multigroup SIR Models with Nonlinear Incidence. *Computers & Mathematics with Applications*, **60**, 2286-2291. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.08.020>
- [7] Kuniya, T. (2011) Global Stability Analysis with a Discretization Approach for an Age-Structured Multigroup SIR Epidemic Model. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **12**, 2640-2655. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.03.011>
- [8] Guo, H., Li, M. and Shuai, Z. (2008) A Graph-Theoretic Approach to the Method of Global Lyapunov Functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **136**, 2793-2802. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-08-09341-6>
- [9] Li, M.Y. and Shuai, Z. (2010) Global-Stability Problem for Coupled Systems of Differential Equations on Networks. *Journal of Differential Equations*, **248**, 1-20. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.09.003>
- [10] Su, H., Li, W. and Wang, K. (2012) Global Stability Analysis of Discrete-Time Coupled Systems on Networks and Its Applications. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **22**, Article ID: 033135. <https://doi.org/10.1063/1.4748851>
- [11] Suo, J., Sun, J. and Zhang, Y. (2013) Stability Analysis for Impulsive Coupled Systems on Networks. *Neurocomputing*, **99**, 172-177. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2012.06.002>
- [12] Chen, H. and Sun, J. (2012) Stability Analysis for Coupled Systems with Time Delay on Networks. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **391**, 528-534. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2011.08.037>
- [13] Guo, Y., Li, Y. and Ding, X. (2017) Razumikhin Method Conjoined with Graph Theory to Input-to-State Stability of Coupled Retarded Systems on Networks. *Neurocomputing*, **267**, 232-240. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2017.06.003>
- [14] Cao, J., Li, P. and Wang, W. (2006) Global Synchronization in Arrays of Delayed Neural Networks, with Constant and Delayed Coupling. *Physics Letters A*, **353**, 318-325. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2005.12.092>
- [15] Goebel, R., Sanfelice, R.G. and Teel, A.R. (2009) Hybrid Dynamical Systems: Robust Stability and Control for Systems That Combine Continuoustime and Discrete-Time Dynamics. *IEEE Control Systems Magazine*, **29**, 28-83. <https://doi.org/10.1109/MCS.2008.931718>
- [16] Borgers, D.P. and Heemels, W.P.M.H. (2014) Event-Separation Properties of Event-Triggered Control Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **59**, 2644-2656. <https://doi.org/10.1109/TAC.2014.2325272>
- [17] Du, W., Leung, S.Y.S., Tang, Y., et al. (2016) Differential Evolution with Event-Triggered Impulsive Control. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **47**, 244-257. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2015.2512942>
- [18] Tan, X., Cao, J. and Li, X. (2018) Consensus of Leader-Following Multiagent Systems: A Distributed Event-Triggered Impulsive Control Strategy. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **49**, 792-801. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2017.2786474>
- [19] Zhu, W., Wang, D., Liu, L., et al. (2017) Event-Based Impulsive Control of Continuous-Time Dynamic Systems and Its Application to Synchronization of Memristive Neural Networks. *IEEE Transactions on Neural Networks, and Learning Systems*, **29**, 3599-3609. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2017.2731865>
- [20] Li, X., Peng, D. and Cao, J. (2020) Lyapunov Stability for Impulsive Systems via Event-Triggered Impulsive Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **65**, 4908-4913. <https://doi.org/10.1109/TAC.2020.2964558>
- [21] Liu, B., Hill, D.J. and Sun, Z. (2018) Stabilisation to Input-to-State Stability for Continuous-Time Dynamical Systems via Event-Triggered Impulsive Control with Three Levels of Events. *IET Control Theory & Applications*, **12**, 1167-1179. <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2017.0820>
- [22] Li, X., Zhang, T. and Wu, J. (2021) Input-to-State Stability of Impulsive Systems via Event-Triggered Impulsive Control. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **52**, 7187-7195. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2020.3044003>
- [23] Dashkovskiy, S. and Mironchenko, A. (2013) Input-to-State Stability of Nonlinear Impulsive Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **51**, 1962-1987. <https://doi.org/10.1137/120881993>
- [24] Dashkovskiy, S. and Kosmykov, M. (2013) Input-to-State Stability of Interconnected Hybrid Systems. *Automatica*, **49**, 1068-1074. <https://doi.org/10.1016/j.automata.2013.01.045>
- [25] Liu, T.F., Jiang, Z.-P. and Hill, D.J. (2012) Lyapunov Formulation of the ISS Cyclic-Small-Gain Theorem for Hybrid

-
- Dynamical Networks. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **6**, 988-1001. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2012.07.002>
- [26] Dashkovskiy, S., *et al.* (2012) Stability of Interconnected Impulsive Systems with and without Time Delays, Using Lyapunov Methods. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **6**, 899-915. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2012.02.001>
- [27] Hespanha, J.P., Liberzon, D. and Teel, A.R. (2008) Lyapunov Conditions for Input-to-State Stability of Impulsive Systems. *Automatica*, **44**, 2735-2744. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2008.03.021>