Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(3), 211-222
Published Online March 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.143100

Hans汉斯

全纯曲线族涉及导曲线与分担超平面的正规定则

张　爽

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年2月5日；录用日期：2024年3月22日；发布日期：2024年3月29日

摘　要

本文基于值分布理论和正规族理论以及高等代数相关知识及研究方法，将复射影空间的全纯曲线族与导曲线相结合，对全纯曲线族分担超平面的正规性进行了研究，得到了$N=4$时全纯曲线的正规性。设$\mathcal{F}$是从$D\subset\mathbb{C}$到$\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$的一族全纯映射，$H_\ell=\left\{x\in\mathbb{P}^4(\mathbb{C}):\langle x,\alpha_\ell\rangle=0\right\}\neq H_0=\left\{x_0=0\right\}$是$\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$上处于一般位置的超平面，其中$\alpha_\ell=\left(a_{\ell0},a_{\ell1},a_{\ell2},a_{\ell3},a_{\ell4}\right)^{\mathrm{T}}$，$\ell=1,2,\cdots,11$。假定对任意的$f\in\mathcal{F}$满足条件：$f(z)\in H_\ell$当且仅当$\nabla f\in H_\ell$，$\ell=1,2,\cdots,11$；若$f(z)\in H_\ell$的并集，则有$\left|\langle f(z),H_0\rangle\right|/\|f\|\|H_0\|$大于或等于$\delta$，$0<\delta<1$，$\delta$是常数，则$\mathcal{F}$在$D$上正规。

关键词

超平面，正规族，全纯曲线，分担值

Normal Criteria for Holomorphic Curves Relating to Derived Curves and Shared Hyperplanes

Shuang Zhang

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 5th, 2024; accepted: Mar. 22nd, 2024; published: Mar. 29th, 2024

Abstract

This article is based on value distribution theory, normal family theory, and advanced algebra

文章引用: 张爽. 全纯曲线族涉及导曲线与分担超平面的正规定则[J]. 理论数学, 2024, 14(3): 211-222.
DOI: 10.12677/pm.2024.143100

related knowledge and research methods. It combines the family of holomorphic curves in complex projective spaces with derivative curves to study the normality of holomorphic curve families sharing hyperplanes, and obtain the normality of holomorphic curves at *N* = 4. Let $\mathcal{F}$ be a family of holomorphic maps of a domain $D \subset \mathbb{C}$ into $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$. Let $H_\ell = \{x \in \mathbb{P}^4(\mathbb{C}) : \langle x, \alpha_\ell \rangle = 0\} \neq H_0 = \{x_0 = 0\}$ be hyperplanes in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ located in general position, where $\alpha_\ell = (a_{\ell 0}, a_{\ell 1}, a_{\ell 2}, a_{\ell 3}, a_{\ell 4})^{\mathrm{T}}$, $\ell = 1, 2, \cdots, 11$. Assume the following conditions hold for every $f \in \mathcal{F}$: $f(z)$ belongs to H_ℓ, if and only if ∇f belongs to H_ℓ, $\ell = 1, 2, \cdots, 11$; if $f(z)$ belongs to the union set of H_ℓ, then $|\langle f(z), H_0 \rangle| / \|f\| \|H_0\|$ is equal or greater than δ, $0 < \delta < 1$ where δ is a constant. Then $\mathcal{F}$ is normal on *D*.

Keywords

Hyperplane, Normal Family, Holomorphic Curve, Value Sharing

1. 引言

上世纪 20 年代，芬兰数学家 R. Nevanlinna 建立了该世纪最为重要的数学理论之一，即复平面 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数值分布理论，通常因纪念他而被称为 Nevanlinna 理论，该理论主要有两部分组成，即 Nevanlinna 第一及第二基本定理，前者由 Possion-Jensen 公式得到，而后者显著地推广了 Picard 小定理。该理论同时广泛地应用到其他的复分析领域，如亚纯函数的唯一性理论，正规族理论，复动力系统及复微分方程理论等。与此同时，鉴于 Nevanlinna 理论的美妙结果，很多杰出数学家创立并且不断完善发展了定义在特殊复流型上的全纯映射的高维值分布理论。至今为止，高维值分布理论依然是研究的热难点，已成为一个与分析、微分几何、代数几何和数论相关的重要理论。

正规族理论是复分析中的一个重要研究课题，它主要是对满足一些公共条件的函数族的列紧性进行研究。正规族理论的研究，不但具有重要的理论意义，而且也有重要的应用价值。它在复动力系统，复微分方程，亚纯函数模分布以及整函数唯一性等方向的研究中，都起到了重要的作用。

在 20 世纪 20 年代到 80 年代中，大部分学者研究正规定则采用的是 Miranda 的消去原始值的方法，但该方法需要有深厚的技巧，还导致证明某些正规定则的过程变得复杂。1975 年，以色列数学家 Zalcman 从 Marty 正规定则出发给出了亚纯函数族不正规的充要条件，由此导出一个有趣的正规定则，被称为 Zalcman 引理。此后，我国数学家又将 Zalcman 引理与函数导数联系起来，发表了 Zalcman-Pang 引理[1]，进而去判断亚纯函数族的正规性。这种方法使正规族理论的研究进入一个新阶段，不仅简化了之前正规定则的证明，而且又建立了一系列新的正规定则。

目前，亚纯函数的正规族理论已取得重大进展。国内外许多学者借助于值分布理论的一些成果，对多复变全纯映射的正规族问题进行了研究。

陈智华和颜启明等[2]对 2 个非常值的全纯曲线在强分担超平面的条件下进行分析，得到了全纯曲线的唯一性定理。

定理 1 f 和 g 是从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的 2 个非常数全纯曲线，$1 \le l \le q$，H_l 是 q 个 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上的超平面，且处于一般位置，并使得 $f(\mathbb{C}) \not\subseteq H_l$，$g(\mathbb{C}) \not\subseteq H_l$，$f(z)$ 和 $g(z)$ 分担 H_l，$1 \le l \le q$。如果 $q \ge 2N+3$，则 $f = g$。

杨刘、方彩云和庞学诚[3]利用广义的 Zalcman 引理，考虑了涉及分担超平面的全纯曲线的正规定则，得到了如下定理。

定理 2 设 $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D;\mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ 为从 $D \subset \mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯曲线族，H_l 是 $q \ge 2N+1$ 个在 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上的超平面，且处于一般位置，$1 \le l \le q$。若对于任意的 $f, g \in \mathcal{F}$，$f(z) \in H_l \Leftrightarrow g(z) \in H_l$，$z \in D$，$1 \le l \le q$，则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

随后，叶亚盛、庞学诚与杨刘[4]在此基础上对全纯曲线 f 及其导曲线 ∇f 共同分担超平面的情形进行了分析，得到并证明了如下正规定则。

定理 3 设 $\mathcal{F}$ 为区域 $D \subset \mathbb{C}$ 映到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上的全纯曲线族，$H_1, H_2, \cdots, H_{2N+1}$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上的超平面，且处于一般位置。若对于任意的 $f \in \mathcal{F}$，满足下列条件：

(i) 对所有的 $l = 1, 2, \cdots, 2N+1$，$f(z)$ 与 $\nabla f(z)$ 在 D 上分担 H_l；

(ii) 若 $f(z) \in \bigcup_{l=1}^{2N+1} H_l$，则 $\dfrac{|\langle f(z), H_0 \rangle|}{\|f\| \cdot \|H_0\|} \ge \delta$，这里 δ 为 $0 < \delta < 1$ 的常数，$H_0 = \{x_0 = 0\}$，

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

这里的分担不仅要求 $f^{-1}(H) = \nabla f^{-1}(H)$，而且要求在满足 $f^{-1}(H) = \nabla f^{-1}(H)$ 的那些点上有 $f(z) = \nabla f(z)$。

刘晓俊、庞学诚等[5]受到文献 4 中主要定理的证明过程中的启发，将定理 3 中“强分担”的条件进行减弱，并对超平面的第一系数做一定限制，得到了如下定理。

定理 4 设 $\mathcal{F}$ 为从区域 $D \subset \mathbb{C}$ 映到 $\mathbb{P}^{\mathrm{N}}(\mathbb{C})$ 上的一族全纯映射。

$H_l = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^{\mathrm{N}}(\mathbb{C}) : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}_l \rangle = 0\}$ 是 $\mathbb{P}^{\mathrm{N}}(\mathbb{C})$ 上的超平面，且处于一般位置。其中，$\boldsymbol{\alpha}_l = (a_{l0}, \cdots, a_{lN})^{\mathrm{T}}$ 和 $a_{l0} \ne 0, l = 1, 2, \cdots, 2N+1$。若对于任意的 $f \in \mathcal{F}$，满足下列条件：

(i) 若 $f(z) \in H_l$，则 $\nabla f \in H_l, l = 1, 2, \cdots, 2N+1$；

(ii) 若 $f(z) \in \bigcup_{l=1}^{2N+1} H_l$，则 $\dfrac{|\langle f(z), H_0 \rangle|}{\|f\| \cdot \|H_0\|} \ge \delta$，其中 δ 是满足 $0 < \delta < 1$ 的常数，$H_0 = \{x_0 = 0\}$。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

问题 若去掉“超平面首项系数非零”这个限制条件，结论是否仍旧成立？

刘晓俊、庞学诚[6]去除了上述定理在 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 中“超平面第一系数非零个数的限制”的条件，证明了定理 5。

定理 5 设 $\mathcal{F}$ 为从区域 $D \subset \mathbb{C}$ 映到 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 的一族全纯映射。

$H_l = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}_l \rangle = 0\} \ne H_0 = \{x_0 = 0\}$ 是 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 上的超平面，且处于一般位置。其中 $\boldsymbol{\alpha}_l = (a_{l0}, a_{l1}, a_{l2})^{\mathrm{T}}, l = 1, 2, 3, 4, 5$。若对任意的 $f \in \mathcal{F}$，满足下列条件：

(i) 若 $f(z) \in H_l$ 当且仅当 $\nabla f \in H_l, l = 1, 2, 3, 4, 5$；

(ii) 若 $f(z) \in \bigcup_{l=1}^{5} H_l$，则 $\dfrac{|\langle f(z), H_0 \rangle|}{\|f\| \cdot \|H_0\|} \ge \delta$，其中 δ 是满足 $0 < \delta < 1$ 的常数。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

遗憾的是，定理 5 的证明方法不能推广至 $N\geq 3$ 的情况。随后，郑晓杰等[7]得到了 $N=3$ 时的定理 6，并利用高等代数和值分布的理论证明了此定理。

定理 6 设 $\mathcal{F}$ 是一族从区域 $D\subset\mathbb{C}$ 映到 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 的全纯映射。

$H_l=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{P}^3(\mathbb{C}):\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}_l\rangle=0\right\}\neq H_0=\{x_0=0\}$ 是 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 上的超平面，且处于一般位置，

其中 $\boldsymbol{\alpha}_l=(a_{l0},a_{l1},a_{l2},a_{l3})^{\mathrm{T}},l=1,2,3,4,5,6,7,8$。若对任意的 $f\in\mathcal{F}$，满足下列条件：

(i) 若 $f(z)\in H_l$ 当且仅当 $\nabla f\in H_l,l=1,2,3,4,5,6,7,8$；

(ii) 若 $f(z)\in\bigcup_{l=1}^{8}H_l$，则 $\dfrac{|\langle f(z),H_0\rangle|}{\|f\|\cdot\|H_0\|}\geq\delta$，其中 δ 是满足 $0<\delta<1$ 的常数。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

上述定理研究的是 $N=3$ 时超平面处于一般位置的情形，随后范楚君等[8]在此基础上对 $N=3$ 时，超平面处于 t 次一般位置时全纯函数族的正规性进行了研究。本文继续研究 $N=4$ 时定理 6 所描述的问题，由定理 4 可知，此时需要 $2N+1=9$ 个首系非零的超平面，所需分担的超平面 $2N+1$ 个是不够的，因此应适当增加分担超平面的个数，研究分担 $2N+3=11$ 个超平面且 7 个首系非零的超平面，发现结论仍然成立，即定理 7，此定理是对 4 维复射影空间全纯映射及其导曲线在分担 11 个超平面时的正规性进行了研究。

定理 7 设 $\mathcal{F}$ 为从 $D\subset\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ 的一族全纯映射，$H_l=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{P}^4(\mathbb{C}):\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}_l\rangle=0\right\}\neq H_0=\{x_0=0\}$ 是 $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ 上的超平面，且处于一般位置，其中 $\boldsymbol{\alpha}_l=(a_{l0},a_{l1},a_{l2},a_{l3},a_{l4})^{\mathrm{T}}$，$l=1,2,\cdots,11$。假定对于任意的 $f\in\mathcal{F}$ 满足下列条件：

(i) 若 $f(z)\in H_l$ 当且仅当 $\nabla f\in H_l,l=1,2,\cdots,11$；

(ii) 若 $f(z)\in\bigcup_{l=1}^{11}H_l$，则 $\dfrac{|\langle f(z),H_0\rangle|}{\|f\|\cdot\|H_0\|}\geq\delta$，其中 δ 是满足 $0<\delta<1$ 的常数。

则 $\mathcal{F}$ 在 D 上正规。

2. 重要概念

首先介绍 N 维复射影空间相关的一些定义和概念。

$\mathbb{P}^N(\mathbb{C})=\mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\}/\sim$ 为 N 维复射影空间，对 $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1,\cdots,x_N),\boldsymbol{y}=(y_0,y_1,\cdots,y_N)$，

$\mathbb{P}^N(\mathbb{C})=\mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\}$，$\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$ 当且仅当存在 $\lambda\in\mathbb{C}$，使得 $(x_0,x_1,\cdots,x_N)=\lambda(y_0,y_1,\cdots,y_N)$。$(x_0,x_1,\cdots,x_N)$ 的等价类定义为 $[x_0:x_1:\cdots:x_N]$，$\mathbb{P}^N(\mathbb{C})=\left\{\boldsymbol{x}=[x_0:x_1:\cdots:x_N]:\boldsymbol{x}=(x_0,x_1,\cdots,x_N)\in\mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\}\right\}$。

$H_1,H_2,\cdots,H_q$ 为 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上的超平面，它们定义 $H_l=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{P}^N(\mathbb{C}):\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}_l\rangle=a_{l0}x_0+a_{l1}x_1+\cdots+a_{lN}x_N=0\right\}$，其中，非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_l=(a_{l0},a_{l1},\cdots,a_{lN})^{\mathrm{T}},l=1,2,\cdots,q$。

在 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中可引入一个自然度量，即对于点 $[\omega]$ 和 $[\omega']$ 之间的距离，采用 $\mathbb{C}^{N+1}$ 中 2 个圆 γ 和 γ' 之间的欧式距离来表示，其中，γ 和 γ' 分别代表在球面 S^{2N+1} 上的这 2 个点(这里取 $|\omega|=|\omega'|=1$)。简单计算可得

$$\rho^2([\omega],[\omega'])=\min_{\theta,\theta'}\left|\omega e^{i\theta}-\omega' e^{i\theta'}\right|^2=\min_{\theta,\theta'}2\left\{1-\mathrm{Re}\left[(\omega,\omega')e^{i(\theta-\theta')}\right]\right\}=2\left(1-|(\omega,\omega')|\right).$$

对于一般的 ω,ω'，$\rho^2([\omega],[\omega'])=2\left(1-\dfrac{|(\omega,\omega')|}{|\omega||\omega'|}\right)$，再假设 $\omega'=\omega+\mathrm{d}\omega$，并舍去 $|\mathrm{d}\omega|$ 的二阶以上的小

量，得到相应的度量形式：

$$\mathrm{d}s^2=\frac{(\omega,\omega)(\mathrm{d}\omega,\mathrm{d}\omega)-(\omega,\mathrm{d}\omega)(\mathrm{d}\omega,\omega)}{(\omega,\omega)^2}$$

称这个度量为富比尼－施图迪(Fubini-Study)度量，它是 $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上的球面度量在高维复射影空间中的推广。特别的，当 $N=1$ 时，引进局部坐标 $z=\frac{\omega_1}{\omega_0}$，此时 $\mathrm{d}s^2=\frac{|\mathrm{d}z|^2}{\left(1+|z|^2\right)^2}$。

定义 1 设 $H_1,H_2,\cdots,H_q\,(q\ge N+1)$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 中的 q 个超平面，定义 $D(H_1,\cdots,H_q)=\prod_{1\le l_1<l_2<\cdots<l_{N+1}\le q}\left|\det\left(\boldsymbol{\alpha}_{l1}^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{lN+1}^{\mathrm{T}}\right)\right|$，我们称超平面 $H_1,H_2,\cdots,H_q$ 在 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 处于一般位置，若 $D(H_1,\cdots,H_q)>0$。

其次，令 $f:D\to\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 为全纯映射，$U\subset D$ 是开集，对于任何全纯映射

$f:U\to\mathbb{C}^{N+1}$，使得 $\mathbb{P}(f(z))\equiv f(z),z\in U$，称 f 为在 U 上的一个代表，其中，

$\mathbb{P}:\mathbb{C}^{N+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 为标准商映射。

定义 2 设 $U\subset D$ 是开集，若 $f_0,f_1,\cdots,f_N$ 在 U 内全纯且无公共零点，则称 $\tilde f=(f_0,f_1,\cdots,f_N)$ 为 f 在 U 上的一个既约表示。

设 $H_l=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{P}^N(\mathbb{C}):\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}_l\rangle=0\right\}$ 是一个超平面，定义 $\|H\|=\|\boldsymbol{\alpha}\|=\max_{0\le i\le N}|a_i|$。本文只考虑满足 $\|H\|=1$ 的标准化超平面。

对于全纯映射 f 的既约表示 $\tilde f$，定义全纯函数

$$\langle f(z),H\rangle=\langle\tilde f(z),\boldsymbol{\alpha}\rangle=\sum_{i=0}^{N}a_i f_i(z)$$

再取

$$\|f\|=\|\tilde f(z)\|=\left\{\sum_{i=0}^{N}|f_i(z)|^2\right\}^{1/2}.$$

根据文献[4]中定义的导曲线，可得如下定义。

定义 3 设 f 是从 D 到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯映射，$\tilde f=(f_0,f_1,\cdots,f_N)$ 是 f 在 D 上的任意既约表示，其中 $f_{\mu(z)}\ne0$，$\mu\in\{1,2,\cdots,N\}$，则有

$\nabla_\mu(f(z))=\left[W(f_\mu,f_0)/d:\cdots:W(f_\mu,f_{\mu-1})/d:f_\mu^2/d:W(f_\mu,f_{\mu+1})/d:\cdots:W(f_\mu,f_N)/d\right]$ 被称作 f 关于第 μ 个分量的全纯导曲线，其中 $d(z)$ 为全纯函数，使得 f_μ^2/d 和 $W(f_\mu,f_i)/d$ 无公共零点，$i=0,1,\cdots,N,i\ne\mu$。

简单起见，将 $\nabla_\mu f$ 记作 ∇f，显然，$\nabla_\mu f$ 的定义与 f 的既约表示的选择无关。当 $N=1$ 时，$\nabla_0 f$ 代表亚纯函数 $\frac{f_1}{f_0}$ 的导数，即 f 的导函数 f'，而 $\nabla_1 f$ 代表亚纯函数 $\frac{f_0}{f_1}$ 的导数，即 $\frac{1}{f}$ 的导函数 $\left(\frac{1}{f}\right)'$。

导曲线是亚纯函数导数的推广，上述定义是推广至全纯函数导曲线的情形。借助于此将 Schwick 的一个涉及导数的正规定则推广至 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯曲线，且回到 $N=1$ 的特殊情形也是对 Schwick 先前结果的改进。本文中定理 7 全纯曲线及其导曲线共同分担超平面这一条件对后续证明过程中起着重要作用，可用来证明全纯曲线的导数不恒为 0，从而利用引理 1 证明定理。

在证明定理 7 之前，先说明一些概念。

一般地，D 是 $\mathbb{C}$ 上一个区域，$H_0=\{x_0=0\}$ 总是表示第一坐标超平面。$f_n(z)\Rightarrow f(z), z\in D$ 表示 $\{f_n\}$ 在 D 的紧致集上关于 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上的 Fubini-Study 度量一致收敛于 f。对于在 D 上的全纯曲线 $f(z)$，$f(z)$ 在点 z 处的球面导数定义为 $f=\dfrac{|f\wedge f'|}{\|f\|^2}$。

3. 主要引理

众所周知，Zalcman 正规原理和 Pang-Zalcman 引理在正规族理论中起着核心作用。在我们给出主要定理证明之前，需要由 Aladro 等[9]对 Zalcman 引理进行推广得到的全纯映射族的 Zalcman 引理，这为证明正规定则提供了有利的条件。

引理 1 [9]设 $\mathcal{F}$ 是一族从 $\mathbb{C}^m$ 中的双曲区域 Ω 映到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的全纯映射，若 $\mathcal{F}$ 在 Ω 上不正规 $\Leftrightarrow$ 存在子列 $\{f_n\}\subset\mathcal{F}$，点列 $\{z_n\}\subset\Omega$ 且 $z_n\to z_0\in\Omega$ 和正数列 $\{\rho_n\}$ 满足 $\rho_n\to 0$，使得

$$g_n(\zeta):=f_n(z_n+\rho_n\zeta)$$

在 $\mathbb{C}^m$ 上内闭一致收敛于从 $\mathbb{C}^m$ 映射到 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的非常数全纯映射 g。

为了本文定理 7 的证明，还需引入如下的 Hurwitz 引理。

引理 2 (Hurwitz 引理) [4]设域 $D\subset\mathbb{C}$ 中的全纯函数序列 $\{f_n(z)\}$ 在 D 的任意一个紧子集上内闭一致收敛于非常值的函数 $f(z)\in H(D)$。若 $a\in\mathbb{C}$ 是任意一个复数，$\exists$ 点 $z_0\in D$，使得 $f(z_0)=a$，则对于每一个充分大的 n，方程 $f_n(z)=a$ 在 D 内有根。此外，存在 z_0 的某邻域 U，使得 $f(z)-a$ 与 $f_n(z)-a$ 在 U 内零点的总数相同(计重数)。

引理 3 [5]设 $g=[g_0:\cdots:g_N]:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是一条全纯曲线且是有穷级的，$g_0(\zeta)\not\equiv 0$，其中 $N\ge 2$ 是一个整数。$H_l=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{P}^N(\mathbb{C}):\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}_l\rangle=0\}$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上的超平面且处于一般位置，其第一系数 $a_{l0}\ne 0$，$l=1,2,\cdots,2N+1$。设 $\tilde{g}(\zeta)=(g_0,g_1,\cdots,g_N)(\zeta)$ 是 g 的任意既约表示，令

$$G_l=a_{l0}+\sum_{i=1}^{N}a_{li}\frac{g_i(\zeta)}{g_0(\zeta)}, l=1,2,\cdots,N+1$$

若 $G_l(\zeta)\ne 0$ 且 $G_l'(\zeta)\ne 0, \zeta\in\mathbb{C}$，则 g 是线性退化的。

为了后续定理的证明，本文将 Picard 型定理推广至如下的引理 4。

引理 4 [10]设 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 是一个全纯映射，$H_1,\cdots,H_q\,(q\ge 2N+1)$ 是 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 上的超平面且处于一般位置。若对于每个 $j\in\{1,2,\cdots,q\}$，$f(\mathbb{C})\not\subseteq H_j$，或者 $f(\mathbb{C})$ 恒落在 H_j 中，则 f 是常数。

引理 5 [10]设 $f_0,f_1,\cdots,f_{n+1}$ 是整函数，且 $f_0,f_1,\cdots,f_n\not\equiv 0$ 及

$$f_0+f_1+\cdots+f_{n+1}=0$$

考虑划分

$$\{0,1,\cdots,n+1\}=I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_k$$

使得 i 和 j 属于同一个类 $I_l\Leftrightarrow f_i=c_{ij}f_j$，$c_{ij}$ 为某个非零常数，则有对于任意的 I_l，

$$\sum_{i\in I_l}f_i=0.$$

引理 6 [11]若 $f(z)$ 和 $\varphi_v(z)(v=1,2,3)$ 是有穷平面上的亚纯函数，使得

$$T(r,\varphi_v)=o\{T(r,f)\}, v=1,2,3$$

则有

$$\{1-o(1)\}T(r,f)<\sum_{v=1}^{3}N\left(r,\frac{1}{f-\varphi_v}\right)+S(r,f)$$

其中，$S(r,f)=o\{T(r,f)\},r\to\infty$。

引理 7 [12]设 $f(z)$ 为球面导数 $f^{\#}(z)$ 有界的整函数，则 $f(z)$ 的级至多为 1。

4. 定理 7 的证明

假设 $\mathcal{F}$ 在 D 上不正规，则由引理 1 可知，$\exists z_n\to z_0\in D$，正点列 $\rho_n\to 0$ 和全纯映射 $f_n\in\mathcal{F}$，使得 $g_n(\zeta)=f_n(z_n+\rho_n\zeta)\Rightarrow g(\zeta),\zeta\in\mathbb{C}$，其中 g 是 $\mathbb{C}$ 上有穷级的非常值的全纯映射。

设 $\tilde{g}(\zeta)=(g_0,g_1,g_2,g_3,g_4)(\zeta)$ 是 g 的既约表示，由于 H_l 处于一般位置，$1\le l\le 11$。故不失一般性，我们假设 $H_1,H_2,H_3,H_4,H_5,H_6,H_7$ 的第一系数不为 0。

情形 1： g 是非线性退化的。

由于 g 不取 $H_1,H_2,H_3,H_4,H_5,H_6,H_7$，我们有 $g_0\ne 0$，

因此 $G_l(\zeta)=a_{l0}+a_{l1}\dfrac{g_1(\zeta)}{g_0(\zeta)}+a_{l2}\dfrac{g_2(\zeta)}{g_0(\zeta)}+a_{l3}\dfrac{g_3(\zeta)}{g_0(\zeta)}+a_{l4}\dfrac{g_4(\zeta)}{g_0(\zeta)}\ne 0,l=1,2,3,4,5,6,7$。

断言 a： $G_l'(\zeta)\ne 0,\zeta\in\mathbb{C}$。

断言 a 的证明：

① 若 $G_l'(\zeta)\equiv 0$，则 $G_l(\zeta)\equiv C_0$，其中 C_0 是一个常数。

则 $(a_{l0}-C_0)g_0(\zeta)+a_{l1}g_1(\zeta)+a_{l2}g_2(\zeta)+a_{l3}g_3(\zeta)+a_{l4}g_4(\zeta)\equiv 0$，由于 $a_{l0}-C_0,a_{l1},a_{l2},a_{l3},a_{l4}$ 不恒为0，则 g 为线性退化的，矛盾，故假设不成立，即 $G_l'(\zeta)\not\equiv 0$。

② $G_l'(\zeta)\not\equiv 0$，但存在 $\zeta_0\in\mathbb{C}$ 使得 $G_l'(\zeta_0)=0$。

(i) $g_0(\zeta_0)\ne 0$。

设 $\tilde{g}_n(\zeta)=(g_{n0},g_{n1},g_{n2},g_{n3},g_{n4})(\zeta)$ 是 $g_n(\zeta)$ 在 $U(\zeta_0)$ 的既约表示，则我们有

$a_{l1}\left(\dfrac{g_{n1}(\zeta)}{g_{n0}(\zeta)}\right)'+a_{l2}\left(\dfrac{g_{n2}(\zeta)}{g_{n0}(\zeta)}\right)'+a_{l3}\left(\dfrac{g_{n3}(\zeta)}{g_{n0}(\zeta)}\right)'+a_{l4}\left(\dfrac{g_{n4}(\zeta)}{g_{n0}(\zeta)}\right)'+\rho_n a_{l0}$ 在 $U(\zeta_0)$ 上收敛于 $a_{l1}\left(\dfrac{g_1(\zeta)}{g_0(\zeta)}\right)'+a_{l2}\left(\dfrac{g_2(\zeta)}{g_0(\zeta)}\right)'+a_{l3}\left(\dfrac{g_3(\zeta)}{g_0(\zeta)}\right)'+a_{l4}\left(\dfrac{g_4(\zeta)}{g_0(\zeta)}\right)'$。

由 Hurwitz 引理可知：存在 $\zeta_n\to\zeta_0$ 使得

$a_{l1}\left(\dfrac{g_{n1}(\zeta)}{g_{n0}(\zeta)}\right)'+a_{l2}\left(\dfrac{g_{n2}(\zeta)}{g_{n0}(\zeta)}\right)'+a_{l3}\left(\dfrac{g_{n3}(\zeta)}{g_{n0}(\zeta)}\right)'+a_{l4}\left(\dfrac{g_{n4}(\zeta)}{g_{n0}(\zeta)}\right)'+\rho_n a_{l0}\Big|_{\zeta=\zeta_n}=0$，即

$a_{l1}\left(\dfrac{f_{n1}(z)}{f_{n0}(z)}\right)'+a_{l2}\left(\dfrac{f_{n2}(z)}{f_{n0}(z)}\right)'+a_{l3}\left(\dfrac{f_{n3}(z)}{f_{n0}(z)}\right)'+a_{l4}\left(\dfrac{f_{n4}(z)}{f_{n0}(z)}\right)'+a_{l0}\Big|_{z=z_n+\rho\zeta_n}=0$，那么就有 $\nabla f_n\big|_{z_n+\rho_n\zeta_n}\in H_l$，由定理的条件(i)可知：$f_n\big|_{z=z_n+\rho_n\zeta_n}\in H_l$，即 $g_n(\zeta_n)\in H_l$，令 $n\to\infty$，我们有 $g(\zeta_0)\in H_l,l=1,2,3,4,5,6,7$，矛盾。

(ii) $g_0(\zeta_0)=0$

由 g 不取 $H_l,l=1,2,3,4,5,6,7$，我们有 $(a_{l1}g_1+a_{l2}g_2+a_{l3}g_3+a_{l4}g_4)(\zeta_0)\ne 0$，则 ζ_0 为 $G_l(\zeta)$ 的极点，这意味着 $G_l'(\zeta_0)\ne 0$，断言 a 得证。

故 $G_l(\zeta)\neq 0$ 和 $G_l'(\zeta)\neq 0, l=1,2,3,4,5,6,7, \zeta\in\mathbb{C}$，则由引理 3 可得：$g$ 是线性退化的矛盾。

情形 2： g 是线性退化的。

情形 2.1： g_0,g_1,g_2,g_3 是线性非退化的。

由于 $G_l\equiv 0$ 或者 $G_l\neq 0, l=1,2,3,4,5,6,7$，故由引理 3 可知，有 $g_0\neq 0$ 和 g 是全纯的，则 G_l 在 $\mathbb{C}$ 上为全纯映射。

因为 $\rho(G_l)\leq 1, 1\leq l\leq 7$，所以 $G_l=a_{l0}+a_{l1}\dfrac{g_1}{g_0}+a_{l2}\dfrac{g_2}{g_0}+a_{l3}\dfrac{g_3}{g_0}+a_{l4}\dfrac{g_4}{g_0}=B_l\mathrm{e}^{A_l\zeta}, 1\leq l\leq 7$，特别地，当 $G_l\equiv 0$ 时，$B_l\equiv 0$。$\forall j_1,j_2,j_3,j_4,j_5\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$，不失一般性，设 $j_1=1,\ j_2=2,\ j_3=3,\ j_4=4,\ j_5=5$。

令 $k_1B_1\mathrm{e}^{A_1\zeta}+k_2B_2\mathrm{e}^{A_2\zeta}+k_3B_3\mathrm{e}^{A_3\zeta}+k_4B_4\mathrm{e}^{A_4\zeta}+k_5B_5\mathrm{e}^{A_5\zeta}=0$，其中 k_1,k_2,k_3,k_4,k_5 为常数。

由于 g_0,g_1,g_2,g_3,g_4 线性退化，故 $1,\dfrac{g_1}{g_0},\dfrac{g_2}{g_0},\dfrac{g_3}{g_0},\dfrac{g_4}{g_0}$ 线性退化，故存在一个非零向量 $(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)^{\mathrm{T}}$ 使得 $\left(1,\dfrac{g_1}{g_0},\dfrac{g_2}{g_0},\dfrac{g_3}{g_0},\dfrac{g_4}{g_0}\right)(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)^{\mathrm{T}}=0$。

令 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)=\begin{pmatrix} a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{40} & a_{50}\\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53}\\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54}\end{pmatrix}$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关，所以 $|A|\neq 0$，即 A 可逆。

令 $(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5)^{\mathrm{T}}=A^{-1}(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)^{\mathrm{T}}$，

则 $\left(B_1\mathrm{e}^{A_1\zeta},B_2\mathrm{e}^{A_2\zeta},B_3\mathrm{e}^{A_3\zeta},B_4\mathrm{e}^{A_4\zeta},B_5\mathrm{e}^{A_5\zeta}\right)A^{-1}(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)^{\mathrm{T}}=0$，

则 $B_1\mathrm{e}^{A_1\zeta},B_2\mathrm{e}^{A_2\zeta},B_3\mathrm{e}^{A_3\zeta},B_4\mathrm{e}^{A_4\zeta},B_5\mathrm{e}^{A_5\zeta}$ 线性退化。

断言 b： 存在单射 $\sigma:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4,5\}$ 使得 $B_{\sigma(1)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(1)}\zeta},B_{\sigma(2)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(2)}\zeta},B_{\sigma(3)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(3)}\zeta},B_{\sigma(4)}\mathrm{e}^{A_{\sigma(4)}\zeta}$ 线性非退化。

因为 $B_1\mathrm{e}^{A_1\zeta},B_2\mathrm{e}^{A_2\zeta},B_3\mathrm{e}^{A_3\zeta},B_4\mathrm{e}^{A_4\zeta},B_5\mathrm{e}^{A_5\zeta}$ 线性退化，故不失一般性，可假设存在常数 l_1,l_2,l_3,l_4 使得 $B_5\mathrm{e}^{A_5\zeta}=l_1B_1\mathrm{e}^{A_1\zeta}+l_2B_2\mathrm{e}^{A_2\zeta}+l_3B_3\mathrm{e}^{A_3\zeta}+l_4B_4\mathrm{e}^{A_4\zeta}$，此时假设 $\sigma(1)=1,\sigma(2)=2,\sigma(3)=3,\sigma(4)=4$，则有 $\left(B_1\mathrm{e}^{A_1\zeta},B_2\mathrm{e}^{A_2\zeta},B_3\mathrm{e}^{A_3\zeta},B_4\mathrm{e}^{A_4\zeta},B_5\mathrm{e}^{A_5\zeta}\right)=\left(1,\dfrac{g_1}{g_0},\dfrac{g_2}{g_0},\dfrac{g_3}{g_0},\dfrac{g_4}{g_0}\right)A$，

故 $\left(1,\dfrac{g_1}{g_0},\dfrac{g_2}{g_0},\dfrac{g_3}{g_0},\dfrac{g_4}{g_0}\right)=\left(B_1\mathrm{e}^{A_1\zeta},B_2\mathrm{e}^{A_2\zeta},B_3\mathrm{e}^{A_3\zeta},B_4\mathrm{e}^{A_4\zeta},B_5\mathrm{e}^{A_5\zeta}\right)A^{-1}$，

令 $\dfrac{g_j}{g_0}=\sum\limits_{i=1}^{4}c_{ij}B_i\mathrm{e}^{A_i\zeta}, j=0,1,2,3$，其中 $C=\begin{pmatrix} c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{30} & c_{31} & c_{32} & c_{33}\\ c_{40} & c_{41} & c_{42} & c_{43}\end{pmatrix}$。

下证 C 可逆：

若 $r(C)\leq 3$，则意味着方程组 $C\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$ 有非零解，则存在不全为零的数 x_0,x_1,x_2,x_3 使得

$\left(B_1\mathrm{e}^{A_1\zeta},B_2\mathrm{e}^{A_2\zeta},B_3\mathrm{e}^{A_3\zeta},B_4\mathrm{e}^{A_4\zeta}\right)C\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，即 $\left(1,\frac{g_1}{g_0},\frac{g_2}{g_0},\frac{g_3}{g_0}\right)\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$，则 $1,\frac{g_1}{g_0},\frac{g_2}{g_0},\frac{g_3}{g_0}$ 线性退化矛盾，故 C 可逆。

断言 b 的证明：

若 $B_1\mathrm{e}^{A_1\zeta},B_2\mathrm{e}^{A_2\zeta},B_3\mathrm{e}^{A_3\zeta},B_4\mathrm{e}^{A_4\zeta}$ 线性退化，则存在不全为 0 的数 c_0,c_1,c_2,c_3 使得 $\left(B_1\mathrm{e}^{A_1\zeta},B_2\mathrm{e}^{A_2\zeta},B_3\mathrm{e}^{A_3\zeta},B_4\mathrm{e}^{A_4\zeta}\right)\begin{pmatrix}c_0\\c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=0$，即 $\left(1,\frac{g_1}{g_0},\frac{g_2}{g_0},\frac{g_3}{g_0}\right)C^{-1}\begin{pmatrix}c_0\\c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=0$，则 $1,\frac{g_1}{g_0},\frac{g_2}{g_0},\frac{g_3}{g_0}$ 线性退化矛盾，故假设不成立，即 $B_1\mathrm{e}^{A_1\zeta},B_2\mathrm{e}^{A_2\zeta},B_3\mathrm{e}^{A_3\zeta},B_4\mathrm{e}^{A_4\zeta}$ 线性非退化，这意味着 A_1,A_2,A_3,A_4 互不相同。

因为 $H_l,1\le l\le 7$ 处于一般位置，所以 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7$ 中任意 5 个存在 4 个不同。

若存在 $l\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 使得 $B_l=0$，不失一般性，令 $B_7=0,B_i\ne 0,i=1,2,3,4,5,6$。

由于 $B_1\mathrm{e}^{A_1\zeta},B_2\mathrm{e}^{A_2\zeta},B_3\mathrm{e}^{A_3\zeta},B_4\mathrm{e}^{A_4\zeta},B_5\mathrm{e}^{A_5\zeta}$ 线性退化，故不失一般性，令 $A_5=A_1$，则在 $B_1\mathrm{e}^{A_1\zeta},B_2\mathrm{e}^{A_2\zeta},B_3\mathrm{e}^{A_3\zeta},B_5\mathrm{e}^{A_5\zeta},B_7\mathrm{e}^{A_7\zeta}$ 中不存在 4 个线性非退化矛盾，故假设不成立，即 $B_l\ne 0,l=1,2,3,4,5,6,7$。

因为 $\forall j_1,j_2,j_3,j_4,j_5\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$B_{j_1}\mathrm{e}^{A_{j_1}\zeta},B_{j_2}\mathrm{e}^{A_{j_2}\zeta},B_{j_3}\mathrm{e}^{A_{j_3}\zeta},B_{j_4}\mathrm{e}^{A_{j_4}\zeta},B_{j_5}\mathrm{e}^{A_{j_5}\zeta}$ 线性退化，这意味着在 $A_{j_1},A_{j_2},A_{j_3},A_{j_4},A_{j_5}$ 中存在两个相同，即 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7$ 中任意 5 个存在 2 个相同。若 A_1,A_2,A_3,A_4 互不相同，则 A_5 等于 A_1,A_2,A_3,A_4 中一个，不妨设 $A_5=A_1$。类似的，A_6 等于 A_1,A_2,A_3,A_4 中一个，不妨设 $A_6=A_2$；A_7 等于 A_1,A_2,A_3,A_4 中一个，不妨设 $A_7=A_3$，因此在 A_1,A_2,A_3,A_5,A_6 中不可能存在 4 个不同，矛盾。故假设不成立，即 g_0,g_1,g_2,g_3 线性退化。

情形 2.2： g_0,g_1,g_2 线性非退化。

由情形 2.1 可知：$\forall j_1,j_2,j_3,j_4,j_5\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$，都有 $B_{j_1}\mathrm{e}^{A_{j_1}\zeta},B_{j_2}\mathrm{e}^{A_{j_2}\zeta},B_{j_3}\mathrm{e}^{A_{j_3}\zeta},B_{j_4}\mathrm{e}^{A_{j_4}\zeta},B_{j_5}\mathrm{e}^{A_{j_5}\zeta}$ 线性退化，不妨设 $j_1=1,j_2=2,j_3=3,j_4=4,j_5=5$。

断言 c： $\forall i_1,i_2,i_3,i_4\in\{1,2,3,4,5\}$ 使得 $B_{i_1}\mathrm{e}^{A_{i_1}\zeta},B_{i_2}\mathrm{e}^{A_{i_2}\zeta},B_{i_3}\mathrm{e}^{A_{i_3}\zeta},B_{i_4}\mathrm{e}^{A_{i_4}\zeta}$ 线性退化。

断言 c 的证明： 不失一般性，不妨设 $i_1=1,i_2=2,i_3=3,i_4=4$，即 $B_1\mathrm{e}^{A_1\zeta},B_2\mathrm{e}^{A_2\zeta},B_3\mathrm{e}^{A_3\zeta},B_4\mathrm{e}^{A_4\zeta}$ 线性退化。

由 $G_l=a_{l0}+a_{l1}\frac{g_1}{g_0}+a_{l2}\frac{g_2}{g_0}+a_{l3}\frac{g_3}{g_0}+a_{l4}\frac{g_4}{g_0}=B_l\mathrm{e}^{A_l\zeta},1\le l\le 7$ 知：

$$\left(B_1\mathrm{e}^{A_1\zeta},B_2\mathrm{e}^{A_2\zeta},B_3\mathrm{e}^{A_3\zeta},B_4\mathrm{e}^{A_4\zeta}\right)=\left(1,\frac{g_1}{g_0},\frac{g_2}{g_0},\frac{g_3}{g_0},\frac{g_4}{g_0}\right)\begin{pmatrix}a_{10}&a_{20}&a_{30}&a_{40}\\a_{11}&a_{21}&a_{31}&a_{41}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}&a_{42}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}&a_{43}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}&a_{44}\end{pmatrix}$$

由于 g_0,g_1,g_2,g_3 线性退化，g_0,g_1,g_2 线性非退化，故 $rank\left\{\left(1,\frac{g_1}{g_0},\frac{g_2}{g_0},\frac{g_3}{g_0},\frac{g_4}{g_0}\right)\right\}=3$，

因此有 $rank\left\{\left(B_1\mathrm{e}^{A_1\zeta},B_2\mathrm{e}^{A_2\zeta},B_3\mathrm{e}^{A_3\zeta},B_4\mathrm{e}^{A_4\zeta}\right)\right\}\le rank\left\{\left(1,\frac{g_1}{g_0},\frac{g_2}{g_0},\frac{g_3}{g_0},\frac{g_4}{g_0}\right)\right\}=3<4$，

所以 $B_1e^{A_1\zeta},B_2e^{A_2\zeta},B_3e^{A_3\zeta},B_4e^{A_4\zeta}$ 线性退化。

断言 d： 存在单射 $\varphi:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4,5\}$ 使得 $B_{\varphi(1)}e^{A_{\varphi(1)}\zeta},B_{\varphi(2)}e^{A_{\varphi(2)}\zeta},B_{\varphi(3)}e^{A_{\varphi(3)}\zeta}$ 线性非退化。

断言 d 的证明： 由于 $B_1e^{A_1\zeta},B_2e^{A_2\zeta},B_3e^{A_3\zeta},B_4e^{A_4\zeta},B_5e^{A_5\zeta}$ 线性退化，故不失一般性，可假设存在常数 l_1,l_2,l_3,l_4 使得 $B_5e^{A_5\zeta}=l_1B_1e^{A_1\zeta}+l_2B_2e^{A_2\zeta}+l_3B_3e^{A_3\zeta}+l_4B_4e^{A_4\zeta}$ 。

由于 $B_1e^{A_1\zeta},B_2e^{A_2\zeta},B_3e^{A_3\zeta},B_4e^{A_4\zeta}$ 线性退化，同理不失一般性，可假设存在常数 r_1,r_2,r_3 使得 $B_4e^{A_4\zeta}=r_1B_1e^{A_1\zeta}+r_2B_2e^{A_2\zeta}+r_3B_3e^{A_3\zeta}$ 。

不失一般性，不妨设 $\varphi(1)=1,\varphi(2)=2,\varphi(3)=3$，

由情形 2.1 可知： $\left(1,\dfrac{g_1}{g_0},\dfrac{g_2}{g_0},\dfrac{g_3}{g_0},\dfrac{g_4}{g_0}\right)=\left(B_1e^{A_1\zeta},B_2e^{A_2\zeta},B_3e^{A_3\zeta},B_4e^{A_4\zeta},B_5e^{A_5\zeta}\right)A^{-1}$，

故令 $\dfrac{g_j}{g_0}=\sum_{i=1}^{3}m_{ij}B_ie^{A_i\zeta}$, $j=0,1,2$ 。

则 $\left(1,\dfrac{g_1}{g_0},\dfrac{g_2}{g_0}\right)=\left(B_1e^{A_1\zeta},B_2e^{A_2\zeta},B_3e^{A_3\zeta}\right)\begin{pmatrix}m_{10}&m_{11}&m_{12}\\m_{20}&m_{21}&m_{22}\\m_{30}&m_{31}&m_{32}\end{pmatrix}=\left(B_1e^{A_1\zeta},B_2e^{A_2\zeta},B_3e^{A_3\zeta}\right)M$ 。

下证 M 可逆，即 $r(M)=3$：

若不然， $r(M)\le 2$，则方程组 $MY=0$ 有非零解 $\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\end{pmatrix}$， 即 $M\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\end{pmatrix}=0$，

故 $\left(1,\dfrac{g_1}{g_0},\dfrac{g_2}{g_0}\right)\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\end{pmatrix}=\left(B_1e^{A_1\zeta},B_2e^{A_2\zeta},B_3e^{A_3\zeta}\right)M\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\end{pmatrix}=0$，故 $1,\dfrac{g_1}{g_0},\dfrac{g_2}{g_0}$ 线性退化矛盾，故假设不成立，即 $r(M)=3$，M 可逆。故 $\left(B_1e^{A_1\zeta},B_2e^{A_2\zeta},B_3e^{A_3\zeta}\right)=\left(1,\dfrac{g_1}{g_0},\dfrac{g_2}{g_0}\right)M^{-1}$， 故 $B_1e^{A_1\zeta},B_2e^{A_2\zeta},B_3e^{A_3\zeta}$ 线性退化，断言 d 得证，这意味着 A_1,A_2,A_3 互不相同。

与情形 2.1 类似可得： $B_l\ne 0, l=1,2,3,4,5,6,7$ 。

由于 $\forall\{j_1,j_2,j_3,j_4,j_5\}\to\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 有 $B_{j_1}e^{A_{j_1}\zeta},B_{j_2}e^{A_{j_2}\zeta},B_{j_3}e^{A_{j_3}\zeta},B_{j_4}e^{A_{j_4}\zeta},B_{j_5}e^{A_{j_5}\zeta}$ 线性退化， $\forall\{i_1,i_2,i_3,i_4\}\to\{1,2,3,4,5\}$， $B_{i_1}e^{A_{i_1}\zeta},B_{i_2}e^{A_{i_2}\zeta},B_{i_3}e^{A_{i_3}\zeta},B_{i_4}e^{A_{i_4}\zeta}$ 线性退化，这意味着在 $A_{j_1},A_{j_2},A_{j_3},A_{j_4},A_{j_5}$ 中存在两个相同， $A_{i_1},A_{i_2},A_{i_3},A_{i_4}$ 中存在两个相同，即 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7$ 中任意 5 个存在 2 个相同，任意 4 个存在 2 个相同。

若 A_1,A_2,A_3 互不相同，则 A_4 等于 A_1,A_2,A_3 中的一个，不妨设 $A_4=A_1$，则 A_5 只能等于 A_2 或 A_3，假设 $A_5=A_2$， 则 $A_6=A_3$， 而 A_7 也等于 A_1,A_2,A_3 中的一个，若 $A_7=A_1$， 则在 A_1,A_2,A_4,A_5,A_7 中不可能存在 3 个不同矛盾；若 $A_7=A_2$，则在 A_1,A_2,A_4,A_5,A_7 中不可能存在 3 个不同矛盾；若 $A_7=A_3$，则在 A_1,A_2,A_3,A_6,A_7 中不可能存在 3 个不同矛盾。

故假设不成立，即 g_0,g_1,g_2 线性退化，因此存在不全为 0 的数 p_0,p_1,p_2 使得 $p_0g_0+p_1g_1+p_2g_2=0$。

① $p_2\ne 0$，则 $g_2=-\dfrac{p_0}{p_2}g_0-\dfrac{p_1}{p_2}g_1$，并且 g_2,g_3,g_4 可被 g_0,g_1 线性表出，因此存在常数 $q_1,q_2;s_1,s_2;t_1,t_2$ 使得 $g_2=q_1g_0+q_2g_1, g_3=s_1g_0+s_2g_1, g_4=t_1g_0+t_2g_1$， 即

$$\frac{g_2}{g_0}=q_1+q_2\frac{g_1}{g_0},\ \frac{g_3}{g_0}=s_1+s_2\frac{g_1}{g_0},\ \frac{g_4}{g_0}=t_1+t_2\frac{g_1}{g_0}，\ 则$$

$$
\begin{aligned}
G_l &= a_{l0}+a_{l1}\frac{g_1}{g_0}+a_{l2}\frac{g_2}{g_0}+a_{l3}\frac{g_3}{g_0}+a_{l4}\frac{g_4}{g_0} \\
&= a_{l0}+a_{l1}\frac{g_1}{g_0}+a_{l2}\left(q_1+q_2\frac{g_1}{g_0}\right)+a_{l3}\left(s_1+s_2\frac{g_1}{g_0}\right)+a_{l4}\left(t_1+t_2\frac{g_1}{g_0}\right) \\
&= \left(a_{l0}+a_{l2}q_1+a_{l3}s_1+a_{l4}t_1\right)+\left(a_{l1}+a_{l2}q_2+a_{l3}s_2+a_{l4}t_2\right)\frac{g_1}{g_0}
\end{aligned}
$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$线性无关，故$|A|\neq 0$，则方程组$a_{l1}x_1+a_{l2}x_2+a_{l3}x_3+a_{l4}x_4=0,1\le l\le 5$。

只有零解，故存在$l\in\{1,2,3,4,5\}$使得$a_{l1}+a_{l2}q_2+a_{l3}s_2+a_{l4}t_2\neq 0$。

若对于这样的 l，$G_l'\equiv 0$，即$\left(\frac{g_1}{g_0}\right)'\equiv 0$，它意味着$\frac{g_1}{g_0}\equiv c$矛盾，故$G_l'\not\equiv 0$和$\left(\frac{g_1}{g_0}\right)'\not\equiv 0$。

若$a_{j0}\neq 0,\ j=8,\cdots,11$，则 g 不取H_j，或$g(\mathbb{C})\subset H_j,\ j=8,\cdots,11$，由引理 4 可得，$g$ 是常值曲线矛盾，故存在$a_{j0}=0,\ j=8,\cdots,11$，故不失一般性，假设H_8的首项系数为 0，即$a_{80}=0$。

若H_9的首项系数仍不为 0，即$a_{90}\neq 0$，则有 g 不取H_9或者$g(\mathbb{C})$恒落在H_9上。

若对于任意的$\zeta\in\mathbb{C}$，$\langle\tilde{g},\boldsymbol{\alpha}_8\rangle\neq 0$或$\equiv 0$，则由引理 4 可知，$g$ 为常数曲线矛盾，则存在$\zeta_0\in\mathbb{C}$，使得$\langle\tilde{g},\boldsymbol{\alpha}_8(\zeta_0)\rangle\neq 0$且$\langle\tilde{g},\boldsymbol{\alpha}_8(\zeta)\rangle\not\equiv 0$。

断言 e：$\langle\tilde{g},\boldsymbol{\alpha}_8\rangle$的所有零点是重级的，且$G_8$的所有零点也是重级的。

断言 e 的证明：设ζ_0为$\langle\tilde{g},\boldsymbol{\alpha}_8\rangle$的所有零点，由于$\boldsymbol{\alpha}_8=(0,a_{81},a_{82},a_{83},a_{84})^{\mathrm{T}}$，所以

$$\langle\tilde{g},\boldsymbol{\alpha}_8\rangle(\zeta_0)=a_{81}g_1(\zeta_0)+a_{82}g_2(\zeta_0)+a_{83}g_3(\zeta_0)+a_{84}g_4(\zeta_0)=0,$$

$$\text{即 } a_{81}\frac{g_1(\zeta_0)}{g_0(\zeta_0)}+a_{82}\frac{g_2(\zeta_0)}{g_0(\zeta_0)}+a_{83}\frac{g_3(\zeta_0)}{g_0(\zeta_0)}+a_{84}\frac{g_4(\zeta_0)}{g_0(\zeta_0)}=0,$$

即$(a_{82}q_1+a_{83}s_1+a_{84}t_1)+(a_{81}+a_{82}q_2+a_{83}s_2+a_{84}t_2)\frac{g_1(\zeta_0)}{g_0(\zeta_0)}=0$，因此$G_8(\zeta_0)=0$，故$\zeta_0$也为$G_8$的零点，则存在序列$\{\zeta_n\}\to\zeta_0$使得，$\langle\tilde{g}_n,\boldsymbol{\alpha}_8\rangle(\zeta_n)=0$，即$\langle\tilde{f}_n,\boldsymbol{\alpha}_8\rangle(z_n+\rho_n\zeta_n)=0$，由定理条件(i)可知，$\langle\nabla\tilde{f}_n',\boldsymbol{\alpha}_8\rangle(z_n+\rho_n\zeta_n)=0$，所以$a_{81}\left(\frac{f_{n1}}{f_{n0}}\right)'+a_{82}\left(\frac{f_{n2}}{f_{n0}}\right)'+a_{83}\left(\frac{f_{n3}}{f_{n0}}\right)'+a_{84}\left(\frac{f_{n4}}{f_{n0}}\right)'\Bigg|_{z_n+\rho_n\zeta_n}=0$，

即$a_{81}\left(\frac{g_{n1}}{g_{n0}}\right)'+a_{82}\left(\frac{g_{n2}}{g_{n0}}\right)'+a_{83}\left(\frac{g_{n3}}{g_{n0}}\right)'+a_{84}\left(\frac{g_{n4}}{g_{n0}}\right)'\Bigg|_{\zeta_n}=0$，令$n\to\infty$得：

$a_{81}\left(\frac{g_1}{g_0}\right)'+a_{82}\left(\frac{g_2}{g_0}\right)'+a_{83}\left(\frac{g_3}{g_0}\right)'+a_{84}\left(\frac{g_4}{g_0}\right)'\Bigg|_{\zeta_0}=0$，即$G_8'(\zeta_0)=0$，所以$\langle\tilde{g},\boldsymbol{\alpha}_8\rangle$的所有零点是重级的，且$G_8$的所有零点也是重级的，断言 e 得证。

所以$(a_{81}+a_{82}q_2+a_{83}s_2+a_{84}t_2)\left(\frac{g_1}{g_0}\right)'\Bigg|_{\zeta_0}=0$，即$\left(\frac{g_1}{g_0}\right)'(\zeta_0)=0$，故假设不成立，即$a_{90}=0$，同理可得：$a_{10,0}=a_{11,0}=0$。

若对于任意的$\zeta\in\mathbb{C}$，$\langle\tilde{g},\boldsymbol{\alpha}_l\rangle\neq 0$或$\equiv 0$，$8\le l\le 11$，则由引理 4 可知，$g$ 为常数曲线矛盾，则存在

$\zeta_0 \in \mathbb{C}$，$8 \le l \le 11$，使得$\left\langle \tilde{g}, \boldsymbol{\alpha}_l(\zeta_0) \right\rangle = 0$和$\left\langle \tilde{g}, \boldsymbol{\alpha}_l(\zeta) \right\rangle \not\equiv 0$，所以$\left(a_{l1} + a_{l2}q_2 + a_{l3}s_2 + a_{l4}t_2\right)\left(\dfrac{g_1}{g_0}\right)'\Bigg|_{\zeta_0} = 0$矛盾。

② $p_2 = 0$，则p_0, p_1不全为0，那么$p_0g_0 + p_1g_1 + p_2g_2 = 0$可化为$p_0g_0 + p_1g_1 = 0$。

(i) 若$p_0 \ne 0$，则$g_0 = \dfrac{-p_1}{p_0}g_1$，故$\dfrac{g_1}{g_0} = -\dfrac{p_0}{p_1}$为常数矛盾；

(ii) 若$p_0 = 0$，则$p_1g_1 = 0$，而$p_1 \ne 0$，故$g_1 \equiv 0$，则$\dfrac{g_1}{g_0} \equiv 0$矛盾。

因此$\mathcal{F}$在D上正规。

5. 结论与展望

本文主要是对$N = 4$时全纯映射及其导曲线分担超平面情况下的正规定则进行研究，得到在共同分担11个处于一般位置的超平面且限制7个超平面首系非零的情况下的正规定则。正规定则在讨论一些代数微分方程亚纯解的增长性方面具有十分重要的作用，同时可用来证明全纯函数的唯一性定理。

尽管本文已证明了渴望的正规定则，但在其它方面的应用还未呈现。因此，后续将继续在此定理的基础上，研究$N = 4$时超平面处于t次一般位置时全纯曲线的正规性。此外，还需继续寻找各个结论在实际中的应用。

参考文献

[1] Zalcman, L. (1975) A Heuristic Principle in Complex Function Theory. *The American Mathematical Monthly*, **82**, 813-817. https://doi.org/10.1080/00029890.1975.11993942

[2] Chen, Z.H. and Yan, Q.M. (2009) Uniquess Theorem of Meromorphic Mappings into $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ Sharing 2*N* + 3 Hyperplanes Regardless of Multiplicities. *International Journal of Mathematics*, **20**, 717-726. https://doi.org/10.1142/S0129167X09005492

[3] Yang, L., Fang, C.Y. and Pang, X.C. (2014) Normal Families of Holomorphic Mappings into Complex Projective Space Concerning Shared Hyperplanes. *Pacific Journal of Mathematics*, **272**, 245-256. https://doi.org/10.2140/pjm.2014.272.245

[4] Ye, Y.S., Pang, X.C. and Yang, L. (2015) An Extension of Schwick's Theorem for Normal Families. *Annales Polonici Mathematici*, **115**, 23-31. https://doi.org/10.4064/ap115-1-2

[5] 刘晓俊, 庞学诚, 杨锦华. 涉及分担超平面的正规定则[J]. 数学年刊A辑, 2021, 42(2): 171-178.

[6] Liu, X.J. and Pang, X.C. (2020) Shared Hyperplanes and Normal Families of Holomorphic Curves. *International Journal of Mathematics*, **31,** Article 2050037. https://doi.org/10.1142/S0129167X20500378

[7] 郑晓杰, 刘晓俊. 全纯曲线正规族分担超平面[J]. 上海理工大学学报, 2021, 43(6): 523-527.

[8] 范楚君, 刘晓俊. 涉及导曲线与分担超平面的正规定则[J]. 上海理工大学学报, 2022, 44(5): 491-496.

[9] Aladro, G. and Krantz, S.G. (1991) A Criterion for Normality in $\mathbb{C}^n$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **161**, 1-8. https://doi.org/10.1016/0022-247X(91)90356-5

[10] Ru, M. (2001) Nevanlinna Theory and Its Relation to Diophantine Approximation. World Scientific Publishing, Atlanta, GA, USA. https://doi.org/10.1142/9789812810519

[11] Yang, L. (1993) Value Distribution Theory. Springer-Verlag, Berlin.

[12] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.