Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 45-52
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144109

Hans汉斯

Hardy空间单连通域上的Carleson测度

王贤兴，刘 梅

贵州师范大学数学科学学院，贵州 贵阳

收稿日期：2024年2月22日；录用日期：2024年3月15日；发布日期：2024年4月16日

摘 要

Carleson测度在经典的解析函数空间之中已经有了许多漂亮的结果，那么一个很自然的问题就是：Carleson测度在一般单连通域上的解析空间中具有哪些刻画？本文继María之后，我们应用拟共形映射的相关性质将经典的Hardy空间延拓到一般单连通域上，并继续研究与在一般单连通域上定义的Hardy空间相关的Carleson测度的等价刻画。我们还研究了小Carleson测度的类比陈述。

关键词

Carleson测度，Hardy空间，小Carleson测度

Carleson Measure on Simply Connected Domains for Hardy Space

Xianxing Wang, Mei Liu

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Feb. 22nd, 2024; accepted: Mar. 15th, 2024; published: Apr. 16th, 2024

Abstract

Carleson measures have had many beautiful results in classical analytic function spaces, so a natural question is: what are the characteristics of Carleson measures in analytic spaces on general single connected domains? Following María, we apply the correlation properties of quasi-conformal mapping to extend the classical Hardy space to the general single-connected domain, and continue to study the equivalence characterization of the Carleson measure related to the Hardy space defined on the general single-connected domain. We also looked at the analogical statements of the vanish Carleson measure.

Keywords

Carleson Measures, Hardy Spaces, Vanishing Carleson Measures

文章引用: 王贤兴, 刘梅. Hardy 空间单连通域上的 Carleson 测度[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 45-52.
DOI: 10.12677/pm.2024.144109

1. 引言

在调和分析中，我们考虑的是调和函数和调和级数的性质。一个典型的例子是单位圆盘上的调和函数，即满足拉普拉斯方程的实部和虚部都是调和函数的函数。Carleson 测度的概念涉及到对于给定的函数类，我们可以定义一种测度来衡量这个函数类中函数的性质。一个经典的 Carleson 测度的例子是考虑 Hardy 空间 H^p，其中 p 是大于 1 的实数。对于这个函数空间，我们可以定义 Carleson 测度来衡量其中函数的性质。具体来说，我们可以构造一个测度，使得这个测度下的积分可以衡量 H^p 中函数的性质，比如函数的振荡性和收敛性等。另一个例子是考虑多重 Fourier 级数的收敛性。Carleson 测度的理论可以用来研究多重 Fourier 级数的收敛性，即对于给定的函数，我们可以通过 Carleson 测度来刻画其在多重 Fourier 级数意义下的收敛性。所以，Carleson 测度的例子涉及到对函数空间中函数性质的衡量，以及在调和分析和函数空间理论中的应用。这个概念在数学分析中有着重要的意义，对于研究函数的性质和函数空间的结构具有重要的应用价值。

María 在[1]中给出了通过对[2] [3] [4]中经典结果的回顾得到了一个关于单连通域上定义的 Hardy 空间的 Carleson 测度的定理的替代证明。在文献[1]的基础上，我们对一般单连通域上 Hardy 空间的 Carleson 测度进行了相应分析，我们还研究了小 Carleson 测度的类比陈述，并得到了定理 1。

2. 准备及主要结果

本文的目的是给出卡尔森测度关于 Hardy 空间一些新的分析和几何刻画，我们从一些记号和定义开始。

令 Δ 表示单位圆盘 $\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$ 且 $T=\partial\Delta$。如果 $I\subset T$ 是一个区间，卡尔森方块 $S(I)\subset\Delta$ 是集合

$$S(I)=\left\{re^{i\theta}:e^{i\theta}\in I,1-\frac{|I|}{2\pi}\le r<1\right\},$$

其中 $|I|$ 表示区间 I 的长度。

我们将考虑 Δ 中解析函数的经典空间：Hardy 空间，一个 Δ 中的解析函数 f

当 $0<p<\infty$，如果

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p \mathrm{d}\theta=\|f\|_{H^p}^p<\infty$$

则 $f\in H^p$。

众所周知，函数 $f\in H^p$ 几乎在任何地方都有非切向边界极限 $f\left(e^{i\theta}\right)\subset L^p(T)$ 并且 $\|f\|_{H^p}^p=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|^p \mathrm{d}\theta$。

由 Carleson [1]提出的一个值得注意的定理指出，在 Δ 中定义的正测度 μ 满足对于所有 $0<p<\infty$，和所有的 $f\in H^p$ 有

$$\int_\Delta |f(z)|^p \mathrm{d}\mu(z)\le C_p\|f\|_{H^p}^p<\infty,$$

当且仅当存在一个 $c>0$ 使得对所有的区间 $I\subset T$ 有 $\mu(S(I))<c|I|$。

在 Hardy 空间的背景下，Duren [3]将 Carleson 的结果扩展到指数 $q>p>0$ 的范围，获得了与 Carleson 在 $q=p$ 情况下给出的相似测度条件。

定理 A. [3]设 $0<p\le q<\infty$ 并且 μ 是 Δ 上的一个正测度。则存在一个常数 $C>0$ 使得

$$\int_{\Delta}\left|f(z)\right|^{p}\mathrm{d}\mu(z)\le C_{p}\left\|f\right\|_{H^{p}}^{p},$$

当且仅当存在常数 $c>0$，和所有的区间 $I\subset T$ 有 $\mu\left(S(I)\right)\le c|I|^{q/p}$。

当指数 $\beta>1$ 时，条件“所有的区间 $I\subset T$ 有 $\mu\left(S(I)\right)\le c|I|^{q/p}$”与条件“$\mu\left(B(z,r)\right)<Cr^{\beta}$ 对任意的 $z\in\Delta, r=\frac{1}{2}dist(z,\partial\Delta)$”等价(见[1])。

Carleson 测度：给定一个在域 $\Omega\subset C$ 上，且具有 $\|.\|$ 范数的解析函数的巴拿赫空间 X。我们说一个正测度 μ 是 Ω 上对 X 的一个 q-Carleson 测度，如果存在一个常数 $C<0$，使得

$$\left(\int_{\Omega}\left|f(z)\right|^{q}\mathrm{d}\mu(z)\right)^{1/q}\le C\left\|f\right\|_{X}.$$

我们有兴趣的是描述在有界简单连接域 $\Omega\subset C$ 上定义的解析函数空间的 Carleson 测度。

定义：用 ds 表示弧长度量，并假设 $\partial\Delta$ 是局部可求长的，f 是 Ω 中的解析函数，$0<p<\infty$，

$$H^{p}(\Omega)=\left\{\int_{\partial\Omega}\left|f(z)\right|^{p}\mathrm{d}s<\infty\right\}.$$

设 Ω 为单连通区域，$\varphi:\Delta\to\Omega$ 是一个共形映射。μ 是 Ω 上的一个正测度。简单的变换得到 μ 是 $H^{p}(\Omega)$ 的 q-Carleson 测度，即

$$\left(\int_{\Omega}|f|^{q}\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}\le C\left(\int_{\partial\Omega}|f|^{p}\mathrm{d}s\right)^{1/p}$$

等价于

$$\left(\int_{\Delta}|f\circ\varphi|^{q}\mathrm{d}\varphi^{*}\mu\right)^{1/q}\le C\left(\int_{\partial\Delta}|f|^{p}|\varphi'|\mathrm{d}s\right)^{1/p}$$

此处的 $\varphi^{*}(\mu)$ 表示 μ 的拉回，对任意的集合 $E\subset\Delta$，$\varphi^{*}(\mu)(E)=\mu\left(\varphi(E)\right)$。

因此，如在[4]中，如果我们将 Δ 中的测度 ν 定义 $\nu=\frac{1}{|\varphi'|^{q/p}}\varphi^{*}(\mu)$ 时，将获得以下结果，作为进一步参考的引理。

引理：测度 μ 是 $H^{p}(\Omega)$ 的 q-Carleson 测度当且仅当 ν 是 $H^{p}(\Delta)$ 的 q-Carleson 测度。

这个结果的优点在于我们在研究是 $H^{p}(\Omega)$ 的 Carleson 测度时不需要假设其边界是局部可求长的。

定理 B. [4]设 Ω 为单连通区域，$\varphi:\Delta\to\Omega$ 是一个共形映射。假设 $\log\varphi'\in BMOA(\Delta)$。对于 $0<p<\infty$，μ 是 Ω 中的一个正测度。如果存在常数 $C>0$，使得对任意的 $\xi\in\partial\Omega$，$R>0$，有 $\mu\left(B(\xi,R)\cap\Omega\le CR\right)$，则 μ 是 $H^{p}(\Omega)$ 的一个 q-Carleson 测度。

小 Carleson 测度：在本文中，我们还研究了 $H^{p}(\Omega)$ 的小 Carleson 测度；对于 Ω 上的一个 q-Carleson 测度 μ，如果恒等映射 $i:H^{p}(\Omega)\to L^{q}\mathrm{d}\mu$ 是一个紧算子，则 μ 是小 Carleson 测度，见[5]。

定理 C. [5]设 $0<p<\infty$，$\overline{\Delta}$ 上的测度 μ 是一个 (p,p)-Carleson 测度当且仅当存在 $F\in L^{\infty}(m)$ 使得 $\mu_{T}=Fdm$ 并且对所有的 $0\ne z\in\Delta$，存在常数 $C>0$ 使得 $\mu_{\Delta}\left(S(z)\right)\le C\left|I(z)\right|$。

在以上定理的基础上，我们得到了 $H(\Omega)$ 中类似的结果。

定理 1. 设 Ω 为单连通区域，$\varphi:\Delta\to\Omega$ 是一个共形映射。假设 $\log\varphi'\in BMOA(\Delta)$，并且对任意的

$\xi\in\partial\Omega$，$R>0$，存在常数 $C>0$ 使得 $\mu\left(B(\xi,R)\cap\Omega\right)\le CR$。则当 $i:H^p(\Omega)\to L^q\mathrm{d}\mu$ 是一个紧算子时，有以下结果成立：

1) μ 是 $H^p(\Omega)$ 的一个小 p-Carleson 测度；

2) $\lim\limits_{R\to 0}\dfrac{\mu\left(B(\xi,R)\cap\Omega\right)}{R}=0$。

3. 基本知识和定义

在论文中，字母 C 表示一个在不同的情况下可能发生变化的常数。符号 $A\simeq B$ 表示有一个常数 C，即 $1/C\cdot A\le B\le C\cdot A$。符号 $A\lesssim B$ $(A\gtrsim B)$ 意味着有一个常数 C，使得 $A\le C\cdot B$ $(A\ge C\cdot B)$。

和往常一样，我们用 T 表示单位圆盘的边界，用 $B(z_0,R)$ 表示半径为 R 的以点 $z_0\in\mathbb{C}$ 为中心的球。如果 B 是一个球，则 $2B$ 是与 B 具有相同中心且半径为 B 的两倍的球，对于正方形也是如此。给定一个域 $\Omega\in\mathbb{C}$，对于任何 $z\in\Omega$，我们设置 $\delta_\Omega(z)=dist(z,\partial\Omega)$。如果上下文很清楚，我们将略写下标 Ω，并简单地编写 $\delta(z)$。

给定一个区间 $I\in T$，以及相应的卡尔森方块 $S(I)$，我们将方块顶部的点的集合定义为 $T(S)$：

$$T(S)=\left\{re^{i\theta}:e^{i\theta}\in I,1-\frac{|I|}{2\pi}\le r<1-\frac{|I|}{4\pi}\right\}$$

一个局部可积的函数 f 属于空间 $BMO(T)$，如果

$$\|f\|_*=\sup_I\frac{1}{|I|}\int_I\left|f(x)-a_I\right|\mathrm{d}x<\infty$$

此处是对所有弧 $I\in T$，$a_I=\dfrac{1}{|I|}\int_I f(y)\mathrm{d}y$ 取上确界。

一个众所周知的结果，见和文献[6]中 Ch.vi 定理 1.2，如果 $f\in BMO(T)$，那么

$$\sup_{z\in\Delta}\int_T\left|f(\xi)-f(z)\right|\left|P_z(\xi)\right|\mathrm{d}\xi=A<\infty$$

其中，$f(z)=\int_T P_z(\xi)f(\xi)|\mathrm{d}\xi|$ 是 f 的泊松积分，此外，$A\simeq\|f\|_*$。

特别地，对于任何区间 $I\in T$，如果 z_I 表示点 $z_I=\left(1-|I|/2\right)\xi_I$，即 ξ_I 为区间 I 的中点，

对于一些 $c=c\left(\|f\|_*\right)$ 我们有

$$\frac{1}{|I|}\int_I\left|f(\xi)-f(z)\right|\mathrm{d}\xi\le c\|f\|_*. \tag{1}$$

空间 $BMOA(\Delta)$ 是由在哈代空间 $H^1(\Delta)$ 且边界值函数在 $BMO(T)$ 的函数组成的。我们根据[6]和[7]得到了 $BMOA(\Delta)$ 函数的主要性质。

对一个在 Δ 中的调和函数并且对于任意的 $\xi\in\partial\Delta$，其非切极大函数 f^* 表示为 $f^*(\xi)=\sup\left\{\left|f(z)\right|:z\in\Gamma_\xi\right\}$，此处 Γ_ξ 表示为锥 $\Gamma_\xi=\left\{z\in\Delta:|z-\xi|<\alpha\left(1-|z|\right)\right\}$，对于固定的 $\alpha>0$。

给定一个函数 $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$，Hardy-Littlewood 极大函数 f 为

$$Mf(x)=\sup_{x\in I}\frac{1}{I}\int_I\left|f(t)\right|\mathrm{d}t$$

众所周知，算子 Mf 以 $L^p,(1<p<\infty)$ 为界；它是 1-1 弱类型的，也就是说

$$\left|t\in\mathbb{R}:Mf(t)>\lambda\right|\le\frac{2}{\lambda}\|f\|_1,\lambda>0.$$

极大函数 Mf 的重要性在于它优化了许多与 f 相关的其他函数，如 f 的泊松积分的非切向极大函数。因此，如果 $u(z)=P_z*f$ ，它的非切向极大函数 $u^*(x)=\sup_{\Gamma_x}|u(z)|$ 满足：

$$\left|x\in I;u^*(x)>\lambda\right|\le\frac{c}{\lambda}\int_I\left|f(x)\right|\mathrm{d}x \tag{2}$$

对于某些常数 $c>0$，它只取决于圆锥体 Γ_x 的孔径(许多其他相关结果参见[6]的第 4 章)。

接下来我们将提到一些关于保角映射的著名结果，我们请读者参考文献[7]。

平面上单连通的适当子域通过黎曼映射从单位磁盘继承了一个双曲度量。如果 $\varphi:\Omega\to\Delta$ 是拱形的而 $w=\varphi(z)$，那么 $\rho_\Omega(w_1,w_2)=\rho_\Delta(z_1,z_2)$ 定义了 Ω 上的双曲度量，并且与 φ 的特定选择无关。用 Ω 上的几何拟双曲度量来估计 ρ_Ω，其定义为

$$\rho_{\tilde{\Omega}}(w_1,w_2)=\inf\int_{w_1}^{w_2}\frac{|\mathrm{d}w|}{\delta_\Omega(w)}$$

其中，下确界值取遍了 Ω 中连接 w_1 到 w_2 的所有弧。根据 Koebe 1/4 定理得出，这两个度量与独立于域的界具有可比性。域 Ω 的惠特尼分解是 Ω 由内部不相交的平方 Q_k 覆盖，以及直径 $Q_k\simeq\delta_\Omega(Q_k)$ 的性质。根据我们上面的介绍，惠特尼分解中的每个正方形都有均匀有界的双曲直径(并且包含一个具有从下面均匀有界的双曲半径的球)。因此，边界路径的双曲长度通常简化为简单地估计它命中的惠特尼平方的数量。

类似地，我们会说，如果 $c\delta_\Omega(z)\le r\le 1/2\,\delta_\Omega(z)$，一个球 $B(z,r)\in\Omega$ 是一个惠特尼球，对于某些固定常数 $c>0$。

让我们回想一下函数 $\log\varphi'\in\mathcal{B}$，其中 $\mathcal{B}$ 表示 Δ 中的 Bloch 空间。因此，对于任何卡尔森方块 $S\in D$，如果 z_1,z_2 是平方 $T(S)$ 顶部的任意两个点，那么：

$$\left|\varphi'(z_I)\right|\simeq\left|\varphi'(z_2)\right|;z_1,z_2\in T(S) \tag{3}$$

这是因为方块的顶部的双曲直径是均匀有界的。

我们通过提到一些关于紧算子的著名结果来结束这一节。

设 X 和 Y 是拟巴拿赫空间，X 具有分离对偶(例如， $X=H^p,0<p\le\infty$)。如果极限 $\lim_n\|ux_n\|_Y=0$ 对于 X 中的每个弱零空序列 (x_n) 都成立，则一个算子 $u:X\to Y$ 被称为完全连续的。

紧算子是完全连续的，而具有域的完全连续算子，例如自反巴拿赫空间是紧的。另一方面，存在无限维的巴拿赫空间，其恒等式是完全连续的，最突出的例子是序列空间 l^1；参见[8]第 6 页。

4. 定理 1 的证明

在本节中，我们将给出本文定理的证明。

定理 1 的证明：为了证明第一部分，通过假设我们只需要证明 μ 是 $H^p(\Omega)$ 的一个 p-Carleson 测度。我们运用类似于定理 B 的证明方法。因此，通过假设 $\log\varphi'\in BMOA(\Delta)$ 我们想通过条件：如果 $\mu(B(\xi,R)\cap\Omega)\le CR$，$\xi\in\partial\Omega$ 推出 μ 是 $H^p(\Omega)$ 的一个 p-Carleson 测度；或是通过前面导言中提到的备注该条件等价于 $\nu(B(\xi,r)\cap\Delta)\le Cr;\xi\in\partial\Delta,r>0$。

为了简化记号我们将运用上半平面的基于一些区间 $I\subset\mathbb{R}$ 的卡尔森方块表示球 $B(\xi,R);\xi\in\partial\Omega$。因此，设 $Q=\{(x,y);x\in I,0\le y\le|I|\}$。对于任何这样的方块，我们用 $T(Q)=\{(x,y);x\in I,1/2\le y\le|I|\}$ 表示方块的顶点，用 $z_I=x_I+i\,3/2|I|$ 表示 $T(Q)$ 的中心，此处 x_I 表示区间 I 的中点。

设 I 是 $[0,1]$ 的任意区间，定义函数 $f_I(z)=\log\varphi'(z)-\log\varphi'(z_I)$，$u_I(z)=\operatorname{Re}f(z)=\log|\varphi'(z)|-|\log\varphi'(z_I)|$。因此 $f_I\in H^1$，调和函数 u_I 是边界值的泊松积分，即 $u_I(z)=P_z*\left(\log|\varphi'(z)|-|\log\varphi'(z_I)|\right)$，见[6]。另一方面通过式子(1)我们得到

$$\frac{1}{|I|}=\int_I u_I(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{|I|}\int_I\left|\log|\varphi'(z)|-|\log\varphi'(z_I)|\right|\mathrm{d}x\lesssim\|\log\varphi'\|_*$$

因此，通过(2)，对任意的区间 I

$$\frac{1}{|I|}\left|x\in I;u_I^*(x)>\lambda\right|\lesssim\frac{\|\log\varphi'(z)\|_*}{\lambda}\tag{4}$$

现在固定区间 I 并令 Q 是相关的卡尔森方块。我们需要得到 $v(Q)\le c|I|$。

其思想是将 Q 划分为可数个互不相交联合区域，以这样的方式使 $|\varphi'|$ 在这些区域中的取值类似于一个常数。为此，我们将使用一个静止时间参数。

对于每个 $k=1,2,\cdots$ 对区间 I 不断的划分得到 2^k 个区间，并将这些区间中的每个区域内的相应卡尔森方块关联到每个区间。我们用这种方法得到了 2^k 个长度为 $2^{-k}|I|$ 的方块。用 $\{Q_j\}$ 表示这些正方形的集合。请注意，对于每个 $k=1,2,\cdots$ 其每个 Q_j 与一些其他方块都包含在与 $k-1$ 相关联的另一个方块 Q_l 中，我们称之为(如果 $k=1$，父就是 Q)。同父的方块叫兄弟。

让 $M>0$ 成为一个足够大的数，这个常数将在以后修正。回想一下 z_I 是 $T(Q)$ 的中心。将那些 $Q_j\subset Q$ 的子集定义为第一代 $G_1(Q)$，使得

$$\sup_{z\in T(Q_j)}\left|\log|\varphi'(z)|-|\log\varphi'(z_I)|\right|>\log M\tag{5}$$

并且 Q_j 是最大的那个区域。

如果区间 I_j 是基于方块 $Q_j\in G_1(Q)$ 中的，则我们说 $I_j\in G_1(I)$。请注意，$\{I_j;I_j\in G_1(I)\}$ 具有两两不相交的内部，并且在区域 $\mathcal{R}_I(Q)=Q\setminus\bigcup_{G_1(Q)}Q_j$ 中有

$$\frac{1}{M}|\varphi'(z_I)|\le|\varphi'(z)|\le M|\varphi'(z_I)|;z\in\mathcal{R}_I\tag{6}$$

另一方面，如果 $x\in I_j$ 对于一些 $I_j\in G_1(I)$，其锥 Γ_x 包含的点属于 $T(Q_j)$。所以，通过选择第一代的方块和(3)，我们得到对于一些常数 $c>0$，使得 $u_I^*(x)>\log cM$，对于某个通用常因此，根据(4)，如果 $M>M_0$ 则

$$\sum_{I_j\in G_1(I)}|I_j|\le\left|x\in I;u_I^*(x)>cM\right|\le\frac{1}{10}|I|\tag{7}$$

此处 M_0 为一个仅取决于 $\|\log\varphi'(z)\|_*$ 的普通常数。

接下来对每一个第一代 $Q_j\in G_1(Q)$ 的方块我们应用与(5)相同的规则，也就是我们开始分区 Q_j，然后选择那些最大方块 $Q_k\subset Q_j$ 有

$$\sup_{z\in T(Q_k)}\left|\log|\varphi'(z)|-|\log\varphi'(z_{I_j})|\right|>\log M$$

此处 z_{I_j} 为 $T(Q_j)$ 的中心。这样我们得到了新一代方块 $G_2(Q)$ 即

$G_2(Q)=\bigcup\{G_1(Q_j^1);Q_j^1\subset G_1\}=\{Q_1^2,Q_2^2,\cdots\}$

继续这样我们得到 $G_n(Q)=\{Q_1^n,Q_2^n,\cdots\}$，且 $G_n(I)=\{I_1^n,I_2^n,\cdots\},n\in\mathbb{N}$。因此，通过(7)，得到

$$\sum_{I_j\in G_n(I)}|I_j|\le\frac{1}{10}\sum_{I_j\in G_{n-1}(I)}|I_j|\le\cdots\le\frac{1}{10^n}|I|\tag{8}$$

现在我们来证明这个定理。设 Q 是一个有限的卡尔森方块通过定义的测度 υ

$$\nu(Q)=\int_Q \frac{1}{|\varphi'(z)|}\mathrm{d}\varphi^*(\mu(z))=\sum_{n=1}\sum_{l;\mathcal{R}_l\in G_n}\int_{\mathcal{R}_l}\frac{1}{|\varphi'(z)|}\mathrm{d}\varphi^*\mu(z) \tag{9}$$

通过构造，区域 $\mathcal{R}_l\in G_n$ 包含在上一代的某个方块中，我们将用 Q_l 来表示。正如在(6)中所发现的，如果 $z\in\mathcal{R}_l$ 那么 $|\varphi'(z)|\simeq|\varphi'(z_l)|$，其中 z_l 为 $T(Q_l)$ 的中心。

因此，对于任意的 $z,w\in\mathcal{R}_l$，都有 $|\varphi(z)-\varphi(w)|\simeq|\varphi'(z_l)||z-w|$。由于 $\mathcal{R}_l$ 的直径与 $\operatorname{Im} z_l$ 是可以比较的。Koebe's 定理暗示着 $\varphi(\mathcal{R}_l)\subset B(\varphi(z_l),\delta_\Omega(z_l))\cap\Omega$。根据假设测度 μ

$$\mu(\varphi(\mathcal{R}_l))\le\mu(B(\varphi(z_l),\delta_\Omega(z_l))\cap\Omega)\lesssim\delta_\Omega(z_l)\simeq|\varphi'(z_l)|\operatorname{Im} z_l \tag{10}$$

由(8)和(9)推导出

$$\begin{aligned}\nu(Q)&\simeq\sum_{n=1}\sum_{l;\mathcal{R}_l\in G_n}1/|\varphi'(z_l)|\mu(\varphi(\mathcal{R}_l))\lesssim\sum_{n=1}\sum_{l;\mathcal{R}_l\in G_n}\operatorname{Im}(z_l)\\&\lesssim\sum_{n=1}\sum_{j}|I_j^{n-1}|\lesssim\sum_{n=1}\frac{1}{10^n}|I|\lesssim c|I|\end{aligned} \tag{11}$$

比较常数 $c=c(\|\mu\|,\|\log\varphi'\|_*)$。因此，$\mu$ 是 $H^p(\Omega)$ 的一个 p-Carleson 测度通过假设 $i:H^p(\Omega)\to L^q\mathrm{d}\mu$ 是一个紧算子则 μ 是 $H^p(\Omega)$ 的一个小 p-Carleson 测度。第一部分得证。

下面我们证明第二部分：如果 $i:H^p(\Omega)\to L^q\mathrm{d}\mu$ 是一个紧算子则 i 是完全连续的。对于任意 $z_0\in\Omega$，选择 $z_0^*\in\Omega$ 使得 $|z_0-z_0^*|\le 1$。数列 $|z_0-z_0^*|^n$ 是 $H^p(\Omega)$ 中的一个弱紧序列，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\bar{\Omega}}\mathrm{d}\mu=0$。但对于所有的 n 都有 $\mu(\partial\Omega)=\int_{\partial\Omega}\left|\left((z_0-z_0^*)^n\right)^p\right|\mathrm{d}\mu$，因此 $\mu(\partial\Omega)=0$。又因为

$$\mu(\partial\Omega)\simeq C\lim_{R\to 0}\sum_i\frac{1}{R}\int_{B((\xi_i,R)\cap\Omega)}\mathrm{d}\mu=C\sum_i\lim_{R\to 0}\frac{\mu(B(\xi_i,R)\cap\Omega)}{R}$$

和 Ω 有界，我们有

$$\lim_{R\to 0}\frac{\mu(B(\xi,R)\cap\Omega)}{R}=0; \tag{12}$$

第二部分得证。

5. 总结

本文通过运用引理中的等价条件，巧妙地将 Carleson 测度的研究从经典的单位圆盘借助共形映射推广到一般的单连通区域，并得到了定理 1，即对 $H^p(\Omega)$ 空间中的 Carleson 测度进行了一个刻画和分析。借助这个结果我们还将会探讨这个刻画是否是等价的，并且希望得到一个 $H^p(\Omega)$ 空间中的小 Carleson 测度的等价刻画。

参考文献

[1] González, M.J. (2020) Carleson Measures on Simply Connected Domains. *Journal of Functional Analysis*, **278**, Article ID: 108307. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2019.108307

[2] Carleson, L. (1962) Interpolations by Bounded Analytic Functions and the Corona Problem. *Annals of Mathematics*, **76**, 547-559. https://doi.org/10.2307/1970375

[3] Duren, P.L. (1970) Theory of Hp Spaces. Academic Press, Cambridge.

[4] Zinsmeister, M. (1989) Les domaines de Carleson. *Michigan Mathematical Journal*, **36**, 213-220. https://doi.org/10.1307/mmj/1029003944

[5] Blasco, O. and Jarchow, H. (2005) A Note on Carleson Measures for Hardy Spaces. *Acta Universitatis Szegediensis Acta Scientiarum Mathematicarum*, **71**, 371-389.

[6] Garnett, J. (2007) Bounded Analytic Functions. Springer Science Business Media, Berlin.

[7] Marafino, J. (1992) Boundary Behavior of a Conformal Mapping. https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.pjm/1102635976

[8] Diestel, J., Jarchow, H. and Tonge, A. (1995) Absolutely Summing Operator. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511526138