Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 197-206
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144127

一个非线性Gross-Pitaevskii方程的行波解

杨滨宾

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2024年2月29日；录用日期：2024年3月19日；发布日期：2024年4月25日

摘 要

本文主要讨论一个非线性Gross-Pitaevskii方程在一维情形下的行波解，我们的目的就是对局部相互作用提供一些条件，从而得到存在这样的一组行波解。我们的结论主要通过证明能量泛函在具有固定的动量时有最小值，该过程中主要运用集中紧性原理和一致先验估计。

关键词

非线性薛定谔方程，行波解，暗孤子，无穷远处非零

Traveling Waves for a Nonlinear Gross-Pitaevskii Equation

Binbin Yang

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 29th, 2024; accepted: Mar. 19th, 2024; published: Apr. 25th, 2024

Abstract

In this paper, we mainly discuss the traveling waves of a nonlinear Gros-Pitaevskii equation in one-dimensional case. Our aim is to provide some conditions for local interactions, so as to obtain the existence of traveling waves. Our conclusion is mainly based on the proof that the energy functional has a minimum value when it has a fixed momentum, which mainly uses the concentrated compactness principle and the uniform prior estimation.

Keywords

Nonlinear Schrodinger Equation, Traveling Waves, Dark Soliton, Nonzero at Infinity

文章引用: 杨滨宾. 一个非线性 Gross-Pitaevskii 方程的行波解[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 197-206.
DOI: 10.12677/pm.2024.144127

1. 问题的背景和主要结论

为了描述动力学中玻色气体的弱相互作用，Gross [1]和 Pitaevskii [2]发现控制凝聚态的波函数在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 满足 Schrodinger 方程

$$-i\partial_t\phi=\partial_{xx}\phi+\phi\left(W*\left(1-|\phi|^2\right)\right)$$

其中 W 是实值调和分布函数，满足 $W*1=1$。这里的 $*$ 表示卷积。我们对它满足无穷远处非零

$$\lim_{|x|\to+\infty}|\phi(x,\cdot)=1|$$

的有限能量行波感兴趣，即所谓的暗孤子，它可以看作是不扩散传播的局部密度缺口[3]。令 $\phi_c(x,t)=u(x+ct)$ 得到下列非线性 Gross-Pitaevskii 方程。

$$icu'+u''-u\left(W*\left(1-|u|^2\right)\right)=0,\ x\in\mathbb{R},\ u\in\mathbb{C}\text{，} \tag{1.1}$$

此方程模拟了一个玻色气体具有粒子间一般非局部相互作用在一个空间维度中在远处具有恒定的密度。为了讨论行波在无穷远处具有不消失条件的存在性问题，我们需要提供关于势 W 的一般条件，使得这些行波在一定的速度范围内是必然恒定的。不失一般性，我们假设 $c\geq 0$，方程(1.1)为哈密顿方程，其能量为 $E(u)=E_1(u)+E_2(u)$，其中

$$E_1(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|u'|^2\text{，}\quad E_2(u)=-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}\left(W*\left(1-|u|^2\right)\right)\left(1-|u|^2\right)\text{。}$$

它的动能为 $P(u)=\int_{\mathbb{R}}\langle iu',u\rangle\left(1-\frac{1}{|u|^2}\right)$。其中 $\inf_{x\in\mathbb{R}}|u|>0$，$\langle z_1,z_2\rangle=\mathrm{Re}(z_1,\bar{z}_2)$，$z_1,z_2\in\mathbb{C}$ (参见[4] [5])。

现有结果的很大一部分涉及非局部 Gross-Pitaevskii 方程的动力学和用 Delta 方程给出了接触相互作用 W 下行波的存在性和稳定性(参见[4] [6] [7] [8] [9])。然而，很少有无穷远处非零条件下的非局部相互作用的数学结果。在[5] [8]中，作者为 W 设定了一些条件，对高维行波的不存在性进行了研究(参见[10] [11])。由于非局部相互作用，这些结论[1] [6]不能应用于(1.1)，因此我们证明行波的存在的方法依赖于先验的能量估计证明行波存在和集中紧性参数，这使得我们能够证明存在函数的方法依赖于在动量固定的情况下能量最小。

为了给方程(1.1)的行波解一个清晰的定义，我们先介绍下面两个空间

首先是能量空间：

$$\varepsilon(\mathbb{R}):=\left\{v\in H^1_{loc}(\mathbb{R}):1-|v|^2\in L^2(\mathbb{R}),v'\in L^2(\mathbb{R})\right\}\text{，}$$

其次是不消失的能量空间：

$$n\varepsilon(\mathbb{R}):=\left\{v\in\varepsilon(\mathbb{R}):\inf_{\mathbb{R}}|v|>0\right\}\text{。}$$

在与薛定谔方程相关的经典最小化问题中，在无穷远处消失的条件下，质量给出了约束，在本文中，动量是我们需要作为约束证明暗孤子存在的一个关键，让我们先来验证一下动量在 $n\varepsilon(\mathbb{R})$ 是有意义的。

事实上，函数 $v\in n\varepsilon(\mathbb{R})$ 是连续的，并且可以设为 $v=\rho e^{i\theta}$，其中 $\rho=|v|$，θ 是 $H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ 上的一个实值函数。因为 $v\in n\varepsilon(\mathbb{R})$，所以我们有 $\inf\limits_{\mathbb{R}}\rho>0$，且用 $|v'|^2=\rho'^2+\rho^2\theta'^2$，我们可以推导出 $|\theta'|\le\dfrac{|v'|}{\inf\limits_{\mathbb{R}}\rho}$，因此 $\theta'\in L^2(\mathbb{R})$。设 $\eta=1-|v|^2\in L^2(\mathbb{R})$，我们得到对于任意的 $v\in n\varepsilon(\mathbb{R})$，当 $\hat{W}$ 下有界时，能量和动量可以写成

$$E(v)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\rho'^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\rho^2\theta'^2-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}(W*\eta)\eta \text{ 和 } P(v)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\eta\theta'\text{。}$$

除此以外，我们还需要经典的傅里叶变换，对于一个可积函数 $f(x)$，其傅里叶变换

$$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}e^{-ix\xi}f(x)\mathrm{d}x,$$

和 Plancherel 恒等式

$$\int_{\mathbb{R}}(W*f)g=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{W}(\xi)\hat{f}(\xi)\bar{\hat{g}}(\xi),\quad f,g\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})\text{。}$$

下面我们对 W 提出一些假设

H_1)：W 是一个偶实值分布，$\operatorname{essinf}\hat{W}\ge-\varpi$，且在原点处连续

$$\hat{W}(0)=-1\text{。}$$

H_2)：存在 $\sigma\in(0,1]$，$\kappa\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 使得对于 $\xi\in\mathbb{R}$，几乎处处有

$$\hat{W}\le-\sigma+\kappa\xi^2\text{。}$$

H_3)：$\hat{W}$ 允许亚纯扩展到上半平面 $H:\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}(z)>0\}$，并且 $\hat{W}$ 在 H 上唯一可能的奇点是一个属于虚轴的简单孤立极点，即它们由 $\{iv_j:j\in J\}$ 给出，其中对于所有 $v_j>0$，有 $0\le\operatorname{Card}J\le\infty$，这里 Card 是集合 J 中的元素个数，它们的残数 $\operatorname{Res}(\hat{W},iv_j)$ 是满足 $i\operatorname{Res}(\hat{W},iv_j)\ge0$ 的纯虚数。

对于 $q>0$，我们考虑极小化曲线

$$E_{\min}(q):=\inf\{E(u):u\in n\varepsilon(\mathbb{R}),P(u)=q\}\text{。}$$

此外，该曲线是非减量曲线(参见[11]中的定理 2)。我们设置

$$q^*=\sup\left\{q>0:\forall u\in\varepsilon(\mathbb{R}),E(u)\le E_{\min}(q)\Rightarrow\inf_{\mathbb{R}}|u|>0\right\},$$

然后我们将基于[10] [12]，证明与 $E_{\min}(q)$ 相关的极小值是能得到的，并且相应的 Euler-Lagrange 方程正是(1.1)，其中 c 表示为 Lagrange 乘子。

定理 1.1：假设 W 满足 H_1)和 H_2) H_3)且几乎处处 $\hat{W}\le0$，那么对于所有 $q\in(0,q^*)$，$c\in(0,\sqrt{2\sigma})$，方程(1.1)存在一个非平凡解 $u\in n\varepsilon(\mathbb{R})$ 满足 $P(u)=q$。

注记 1.1：条件 H_1)确保能量函数非负且在 $\varepsilon(\mathbb{R})$ 中定义良好。事实上，让我们考虑 $u\in\varepsilon(\mathbb{R})$，根据 Plancherel 的恒等式，我们有

$$E(u)\le\frac{1}{2}\|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\frac{\varpi}{4}\left\|1-|u|^2\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})},$$

换句话说 H_1)意味着 $E(u)$ 在能量空间 $\varepsilon(\mathbb{R})$ 中是有限的。

注记 1.2：由 H_2)，我们有

$$0\le E_2(u)=-\frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{W}|\hat{\eta}|^2\le\frac{\varpi}{4}\|\eta\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\text{。}$$

注记 1.3：更具技术性和限制性的条件 H_3)仅用于证明极小化曲线是凹的(参见[11])。

注记 1.4: 在空间维数为 2 或 3 的情况下，接触的相互组用是 $W=\delta_0$ 的行波研究始于[13]的数值模拟，从数值上观察到对于每一个 $c\in\left[0,\sqrt{2}\right)$ 存在有限能量行波，否则不存在。而当相互作用为更一般条件的时候，我们在一维中展开讨论。

2. 主要引理的证明

接下来，我们用能量的形式建立函数在能量空间中的 L^∞ 估计。

引理 2.1：假设 W 满足 H_2)且对于一些 $\kappa>0$ 和 $\sigma\in[0,1)$，在 $\mathbb{R}$ 上几乎处

处有

$$\hat{W}\le\left(-\sigma+\kappa\xi^2\right)^- \tag{2.1}$$

令 $u\in\varepsilon(\mathbb{R})$，设 $\eta:=1-|u|^2$，则我们有

$$\|\eta\|_{L^\infty}^2<8\tilde{\kappa}E(u)\left(1+8\tilde{\kappa}E(u)+2\sqrt{2\tilde{\kappa}E(u)}\right) \tag{2.2}$$

以及

$$\|\eta\|_{L^\infty}^2<8\tilde{\kappa}E(u)\left(1+8\tilde{\kappa}E(u)+2\sqrt{2\tilde{\kappa}E(u)}\right) \tag{2.3}$$

其中 $\tilde{\kappa}=\dfrac{\kappa}{\sigma}+1$。

证明：设 W 满足 H_2)，并考虑 $u\in\varepsilon(\mathbb{R})$。因为 $\rho=|u|$，$\eta=1-\rho^2$，我们得到下式

$$\eta^2(x)=2\int_{-\infty}^{x}\eta\eta'\mathrm{d}x\le\int_{\mathbb{R}}\eta^2(\eta')^2=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^2\right)|\hat{\eta}|^2\,\mathrm{d}\xi \tag{2.4}$$

因为(2.1)，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^2\right)|\hat{\eta}|^2\,\mathrm{d}\xi&\le\frac{1}{2\sigma\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(-\hat{W}(\xi)+\kappa\xi^2\right)|\hat{\eta}|^2\,\mathrm{d}\xi\\&=\frac{4}{\sigma}E_2(u)+\tilde{\kappa}\int_{\mathbb{R}}(\eta')^2\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.5}$$

由 $\eta=1-\rho^2$，我们有 $\eta'=-2\rho\rho'$，$\rho=|u|$，因此容易得到 $(\eta')^2\le\|u\|_{L^\infty}^2(\rho')^2$。

一方面，如果 $\rho>0$，则 $|u'|^2=(\rho')^2+\rho^2(\theta')^2\ge(\rho')^2$；另一方面，如果 $\rho=0$，则 $\rho'=0$，$u'=0$。所以得到在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处有

$$(\eta')^2\le\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2(u')^2 \tag{2.6}$$

结合(2.4) (2.5)和(2.6)，我们得到

$$\begin{aligned}\eta^2(x)&\le\frac{4}{\sigma}E_2(u)+4\tilde{\kappa}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2\le\frac{4}{\sigma}E_2(u)+8\tilde{\kappa}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2E_1(u)\\&\le\max\left\{\frac{4}{\sigma},8\tilde{\kappa}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2\right\}E(u)\end{aligned} \tag{2.7}$$

如果 $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2\le\dfrac{1}{\sigma}$，则 $\max\left\{\dfrac{4}{\sigma},8\tilde{\kappa}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2\right\}=8\tilde{\kappa}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2$，所以就得到了(2.2)。如果 $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2>\dfrac{1}{\sigma}$，由于 $\eta(\pm\infty)=0$，我们假设存在一点 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得 $m:=\min_{\mathbb{R}}\eta=\eta(x_0)=1-\|u\|_{L^\infty}^2$，运用(2.7)得到

$$m^2 \le 8\tilde{\kappa}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 E(u) = 8\tilde{\kappa}(1-m)E(u)$$

所以有 $m \ge \frac{1}{2}\left[-8\tilde{\kappa}E(u) - \sqrt{64\tilde{\kappa}^2 E^2(u) + 32\tilde{\kappa}E(u)}\right] \ge -8\tilde{\kappa}E(u) - 2\sqrt{2\tilde{\kappa}E(u)}$，而我们得到

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \le 1 + 8\tilde{\kappa}E(u) + 2\sqrt{2\tilde{\kappa}E(u)} \tag{2.8}$$

最后由(2.7) (2.8)，我们证明得到了(2.2)。

下面我们证明(2.3)。正如(2.7)，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \eta^2 &\le \frac{1}{2\sigma\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(-\hat{W}(\xi) + \kappa\xi^2\right)|\hat{\eta}|^2 \mathrm{d}\xi \\ &\le \frac{4}{\sigma}E_2(u) + 8\tilde{\kappa}\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 E_1(u)\end{aligned} \tag{2.9}$$

结合(2.8)，我们得证(2.3)。证毕。

为了得到与 $E_{\min}$ 相关的最小序列的紧性，有必要给出下面的引理表明动量可以被能量控制。此外，对于开集 $\Omega \subset \mathbb{R}$ 和 $u = \rho e^{i\theta}$，我们使用局域动量 $P_\Omega(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \eta\theta'$，由 $\eta = 1-\rho^2$，我们有

$$\sqrt{2}|P_\Omega(u)| \le \frac{1}{4}\int_\Omega \eta^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \theta'^2 \le \frac{1}{4}\int_\Omega \eta^2 + \frac{1}{2\int_\Omega \rho^2}\int_\Omega \rho^2\theta'^2 \tag{2.10}$$

由于非局域相互作用，我们提出局域能量

$$E_\Omega(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |u'|^2 - \frac{1}{4}\int_\Omega (W * \eta_\Omega)\eta_\Omega$$

其中 $\eta_\Omega := \eta|_\Omega$。我们还需要引入平滑切割函数如下。设 Ω_0 是紧包含在中的开子集，函数 $\chi_{\Omega,\Omega_0} \in C^\infty(\mathbb{R})$，$0 \le \chi_{\Omega,\Omega_0} \le 1$ 且满足如果 $x \in \Omega_0$，则 $\chi_{\Omega,\Omega_0} = 1$，如果 $x \in \mathbb{R}\setminus\Omega_0$，则 $\chi_{\Omega,\Omega_0} = 0$。

引理 2.2：令 $\Omega, \Omega_0 \in \mathbb{R}$ 是两个光滑开集满足 $\Omega_0 \subset\subset \Omega$，$\chi_{\Omega,\Omega_0}$ 如上定义。假设 $u \in \varepsilon(\mathbb{R})$。且在 Ω 上存在一些 $\delta \in (0,1)$ 使得 $1-\delta \le |u|^2 \le 1+\delta$。那么

$$\sqrt{2}|P_\Omega(u)| < \frac{E_\Omega(u)}{1-\delta} + \delta_\Omega(u) \tag{2.11}$$

且 $\delta_\Omega(u)$ 满足

$$|\delta_\Omega(u)| \le C\left(\|\eta\|_{L^2(\Omega\setminus\Omega_0)} + \left\|\eta\chi'_{\Omega\setminus\Omega_0}\right\|_{L^2(\Omega\setminus\Omega_0)}^2 + \left\|\eta\chi'_{\Omega\setminus\Omega_0}\right\|_{L^2(\Omega\setminus\Omega_0)}^2\right) \tag{2.12}$$

此处 $C = C(E(u), \delta)$ 是一个与 $E(u)$，δ 有关的常数，与 Ω，Ω_0 无关。

证明：我们令 $u = \rho e^{i\theta}$，正如(2.10)，我们有

$$\sqrt{2}|P_\Omega(u)| \le \frac{\lambda}{4}\int_\Omega \eta^2 + \frac{1}{2\lambda(1-\delta)}\int_\Omega \rho^2\theta'^2 \tag{2.13}$$

其中 $\lambda > 0$ 是个定值。现在我们令

$$\frac{\lambda}{4}\int_\Omega \eta^2 + \frac{1}{2\lambda(1-\delta)}\int_\Omega \rho^2\theta'^2 = \frac{\lambda}{4}\int_\Omega\left[\eta_\Omega^2 + (W * \eta_\Omega)\eta_\Omega\right] + R_\Omega(u) \tag{2.14}$$

其中 $R_\Omega(u) = -\frac{\lambda}{4}\int_\Omega (W * \eta_\Omega)\eta_\Omega + \frac{1}{2\lambda(1-\delta)}\int_\Omega \rho^2\theta'^2$。令 $\tilde{\eta}_\Omega := \eta_{\chi_{\Omega,\Omega_0}}$，

$\delta_{\Omega}^{1}(u):=\frac{\lambda}{4}\int_{\mathbb{R}}\left(\eta_{\Omega}^{2}-\tilde{\eta}_{\Omega}^{2}\right)+\left(W*\eta_{\Omega}\right)\eta_{\Omega}-\left(W*\tilde{\eta}_{\Omega}\right)\tilde{\eta}_{\Omega}+\frac{(1-\sigma)\lambda}{4}\int_{\mathbb{R}}\tilde{\eta}_{\Omega}^{2}$。由条件 H$_2$)我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{4}\int_{\Omega}\left[\eta_{\Omega}^{2}+\left(W*\eta_{\Omega}\right)\eta_{\Omega}\right]&=\frac{\lambda}{4}\int_{\Omega}\left[\tilde{\eta}_{\Omega}^{2}+\left(W*\tilde{\eta}_{\Omega}\right)\tilde{\eta}_{\Omega}\right]+\delta_{\Omega}^{1}(u)\\&=\frac{\lambda}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{\tilde{\eta}_{\Omega}}\right|^{2}\left(1+\hat{W}(\xi)\right)+\delta_{\Omega}^{1}(u)\\&\le\frac{\lambda\kappa}{8\pi}\int_{\mathbb{R}}\xi^{2}\left|\widehat{\tilde{\eta}_{\Omega}}\right|^{2}+\delta_{\Omega}^{1}(u)\end{aligned}$$

注意到 $\tilde{\eta}_{\Omega}'^{2}=\left(\eta'\chi_{\Omega,\Omega_0}+\eta\chi_{\Omega,\Omega_0}'\right)^{2}=\eta'^{2}\chi_{\Omega,\Omega_0}^{2}+2\eta\eta'\chi_{\Omega,\Omega_0}\chi_{\Omega,\Omega_0}'+\eta^{2}\chi_{\Omega,\Omega_0}'^{2}$ 和 $0\le\chi_{\Omega,\Omega_0}\le1$，我们推导出对于 $\kappa\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$，

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\left|P_{\Omega}(u)\right|&\le\frac{\kappa\lambda}{4}\int_{\Omega}\left(\eta'\right)^{2}+\delta_{\Omega}^{1}(u)+R_{\Omega}(u)+\delta_{\Omega}^{2}(u)\\&\le\frac{\lambda}{8}\int_{\Omega}\left(\eta'\right)^{2}+\delta_{\Omega}^{1}(u)+R_{\Omega}(u)+\delta_{\Omega}^{2}(u)\end{aligned}$$

其中 $\delta_{\Omega}^{2}(u)=\frac{\kappa\lambda}{4}\int_{\Omega}\left(2\eta\eta'\chi_{\Omega,\Omega_0}\chi_{\Omega,\Omega_0}'+\eta^{2}\chi_{\Omega,\Omega_0}'^{2}\right)$。因此把 $\eta'^{2}\le4(1+\delta)\rho'^{2}$ 代入，取 $\lambda=\frac{1}{\sqrt{1-\delta^{2}}}$，我们得到

$$\sqrt{2}\left|P_{\Omega}(u)\right|\le\frac{\sqrt{1-\delta^{2}}}{1-\delta}\int_{\Omega}\left(\frac{\rho'^{2}}{2}+\frac{\rho^{2}\theta'^{2}}{2}\right)-\frac{1}{4\sqrt{1-\delta^{2}}}\int_{\Omega}\left(W*\eta_{\Omega}\right)\eta_{\Omega}+\delta_{\Omega}(u)$$

此处的 $\delta_{\Omega}(u)=\delta_{\Omega}^{1}(u)+\delta_{\Omega}^{2}(u)$，这样我们就完成了(2.11)的证明。

下面我们还需要证明(2.12)。首先对于第一项 $\delta_{\Omega}^{1}(u)$，我们有

$$\int_{\Omega}\left|\eta_{\Omega}^{2}-\tilde{\eta}_{\Omega}^{2}\right|=\int_{\Omega\setminus\Omega_0}\eta^{2}\left|1_{\Omega}^{2}-\chi_{\Omega\setminus\Omega_0}^{2}\right|\le\left\|\eta\right\|_{L(\Omega\setminus\Omega_0)}^{2}\tag{2.15}$$

对于第二项 $\delta_{\Omega}^{2}(u)$，我们利用等式 $\int_{\mathbb{R}}(W*f)g=\int_{\mathbb{R}}(W*g)f$，　$f,g\in L^{2}(\mathbb{R})$，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}}-\left(W*\eta_{\Omega}\right)\eta_{\Omega}+\left(W*\tilde{\eta}_{\Omega}\right)\tilde{\eta}_{\Omega}\right|&=\left|\int_{\mathbb{R}}\left(W*\left(\eta_{\Omega}+\tilde{\eta}_{\Omega}\right)\right)\left(\eta_{\Omega}-\tilde{\eta}_{\Omega}\right)\right|\\&\le4\varpi\left\|\eta\right\|_{L^{2}(\mathbb{R})}\left\|\eta\right\|_{L^{2}(\Omega\setminus\Omega_0)}\end{aligned}\tag{2.16}$$

代入到 $\delta_{\Omega}^{2}(u)$，我们很容易得到

$$\left|\delta_{\Omega}^{2}(u)\right|\le\frac{\lambda}{8}\left(4\left\|u\right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})}\left\|u'\right\|_{L^{2}(\mathbb{R})}\left\|\eta\chi_{\Omega\setminus\Omega_0}'\right\|_{L^{2}(\Omega\setminus\Omega)}+\left\|\eta\chi_{\Omega\setminus\Omega_0}'\right\|_{L^{2}(\Omega\setminus\Omega)}^{2}\right)\tag{2.17}$$

结合(2.15) (2.16) (2.17)我们得到(2.12)。证毕。

3. 定理证明

为了建立定理 1.1，我们首先给出了曲线 $E_{\min}$ 的一些一般性质。然后我们研究了与 $E_{\min}$ 相关的最小化序列的紧性。

命题 3.1: [11]假设 W 满足 H$_1$) H$_2$)和 H$_3$)，则 $E_{\min}$ 在 $\mathbb{R}^{+}$ 上不递减。对任意 $u\in\varepsilon(\mathbb{R})$ 满足 $E(u)<E_{\min}\left(q^{*}\right)$，我们有 $u\in n\varepsilon(\mathbb{R})$。除此以外，$E_{\min}$ 是偶的，对所有的 $q>0$，我们有 $E_{\min}<\sqrt{2}q$。特别的，$E_{\min}$ 在 $\mathbb{R}^{+}$ 上是严格次加性的。

引理 3.2: 设 $\left(u_n\right)\in n\varepsilon(\mathbb{R})$ 是一组序列满足

$$P\left(u_n\right)\to q,\quad E\left(u_n\right)\to E_{\min}(q)\ \text{当}\ n\to\infty\ \text{时}\tag{2.18}$$

其中 $q\in(0,\tilde{q})$，则存在泛函 $u\in n\varepsilon(\mathbb{R})$ 使得

$$u_n\to u \text{ 在 } L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \tag{2.19}$$

$$u_n'\rightharpoonup u' \text{ 在 } L^2(\mathbb{R}) \tag{2.20}$$

$$\eta_n:=1-|u_n|^2\rightharpoonup\eta:=1-|u|^2 \text{ 在 } L^2(\mathbb{R}) \tag{2.21}$$

除此以外，有 $E(u)\le E_{\min}(q)$。令 $u=\rho e^{i\theta}$ 和 $u_n=\rho_n e^{i\theta_n}$，取常数 $T>0$，则下列不等式也成立：

$$\int_{-T}^{T}|u'|^2\le\liminf_{n\to\infty}\int_{-T}^{T}|u_n'|^2 \tag{2.22}$$

$$\int_{-T}^{T}-(W*\eta)\eta=\lim_{n\to\infty}\int_{-T}^{T}-(W*\eta_n)\eta_n \tag{2.23}$$

$$\int_{-T}^{T}\eta\theta'=\lim_{n\to\infty}\int_{-T}^{T}\eta_n\theta_n' \tag{2.24}$$

证明：根据(2.18)，$E(u_n)$ 是有界的，$\eta_n:=1-|u_n|^2$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 是有界的，因此我们得到 u_n' 在 $L^2(\mathbb{R})$ 也是有界的。因此存在一个泛函 $u\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 使得(2.19)~(2.22)成立，且有

$$\|u'\|_{L^2(\mathbb{R})}\le\liminf_{n\to\infty}\|u_n'\|_{L^2(\mathbb{R})} \tag{2.25}$$

由于几乎处处 $\hat{W}\le 0$，再回顾 $G(F):=-\int_{\mathbb{R}}(W*f)f$ 是连续函数，在 $L^2(\mathbb{R})$ 是凸函数，所以我们得到

$$G(\eta)\le\liminf_{n\to\infty}G(\eta_n) \tag{2.26}$$

结合(2.25)，我们有

$$E(u)\le E_{\min}(q) \tag{2.27}$$

由(2.20)和 essinf $\hat{W}\ge-\varpi$，可以得到 $W*\eta_n\rightharpoonup W*\eta$ 在 $L^2(\mathbb{R})$。由(2.19)和(2.27)，我们证到了(2.23)。

由命题 3.1 和(2.27)，我们可以得到 $E(u)\le E_{\min}(q)\le E_{\min}(\tilde{q})$。此外，我们还得到存在 $u\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$。因为 $E_1(u_n)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|u_n'|^2$ 是有界的，结合(2.19)，我们得到对于 $T>0$，θ_n' 在 $L^2(\mathbb{R})$ 是有界的。事实上

$$\int_{-T}^{T}\theta_n'\le\frac{1}{\inf\limits_{[-T,T]}|u_n|^2}\int_{\mathbb{R}}\rho_n^2\theta_n'^2\le\frac{1}{\inf\limits_{[-T,T]}|u|^2}E_1(u_n)$$

所以得到 $\theta_n'\rightharpoonup\theta'$ 在 $L^2([-T,T])$。由(2.19)，我们证得(2.24)。证毕。

定理 1.1 的证明：设 $(u_n)\in n\varepsilon(\mathbb{R})$ 是一组序列满足(2.18)，不妨设 $E(u)\le 2E_{\min}(q)$。由命题 3.1，我们运用 $E_{\min}(q)<\sqrt{2}q$ 得 $L_q:=1-\frac{E_{\min}(q)}{\sqrt{2}q}\in(0,1)$。由[14]中的引理 2.4 和引理 2.5，取 $L=1+L_q$ 和 $E=2E_{\min}(q)$，$m=\tilde{L}_q:=\frac{L_q}{L}$，我们可以推导出存在 ℓ^n 个点 $x_1^n,x_2^n,x_3^n,\cdots,x_\ell^n$，且 $\ell^n\le\ell_0^n$ 使得

$$\left|1-\left|u_n\left(x_j^n\right)\right|^2\right|\ge\tilde{L}_q,\quad\forall 1\le j\le\ell^n \tag{2.28}$$

和

$$1-|u_n(x)|^2\le\tilde{L}_q,\quad\forall x\in\mathbb{R}\setminus\bigcup_{j=1}^{\ell^n}\left[x_j^n-1,x_j^n+1\right] \tag{2.29}$$

注意到 (ℓ^n) 是有界的，且与 n 无关，所以我们可以假设 $\ell^n=\ell^*$。对点 (x_j^n) 进行子序列和重新标记，存在一个整数 ℓ，$1\le\ell\le\ell^*$ 和一些数字 $R>0$ 使得当 $n\to\infty$ 时有

$$\left|x_j^n - x_K^n\right| \to \infty \text{，} \quad \forall 1 \le K \ne j \le \ell \tag{2.30}$$

和

$$x_j^n \in \bigcup_{K=1}^{\ell} B\left(x_K^n, R\right) \text{，} \quad \forall 1 \le j \le \ell^*$$

因此，由(2.29)，我们推导出

$$1 - \tilde{\ell}_q \le |u|^2 \le 1 + \tilde{\ell}_q \text{，} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{K=1}^{\ell} B\left(x_j^n, R+1\right) \tag{2.31}$$

结合引理 3.2，我们得到存在泛函 $v_j = \rho_j e^{i\theta_j} \in \varepsilon(\mathbb{R})$， $j \in \{1, 2, \cdots, \ell\}$，当 $n \to \infty$ 时满足下列收敛：

$$u_{n,j} \to v_j \text{ 在 } L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \tag{2.32}$$

$u'_{n,j} \rightharpoonup v'_j$ 在 $L^2(\mathbb{R})$

$$\eta_{n,j} := 1 - \left|u_{n,j}\right|^2 \rightharpoonup \eta_j := 1 - \left|v_j\right|^2 \text{ 在 } L^2(\mathbb{R}) \tag{2.33}$$

而且还有

$$E_{\min}\left(q_j\right) \le E\left(v_j\right) \le E_{\min}(q) \tag{2.34}$$

$$\int_{-R}^{R} -\left(W * \eta_j\right)\eta_j = \lim_{n\to\infty} \int_{-R}^{R} -\left(W * \eta_{n,j}\right)\eta_{n,j} \tag{2.35}$$

其中 $u_{n,j} := \rho_{n,j} e^{i\theta_{n,j}}$， $q_j = P\left(v_j\right)$。而且，通过式(2.28)和式(2.32)，我们推断 $\left|1 - \left|v_j(0)\right|^2\right| \ge \tilde{L}_q$。更准确地说，我们说 v_j 不能是模 1 的常数函数，因为 $\tilde{L}_q > 0$。

由[11]我们得到存在常数 $\hat{q} \in \mathbb{R}$ 使得 $E_{\min}(q) \ge \sum_{j=1}^{\ell} E_{\min}\left(q_j\right) + \tilde{E}$ 且 $q = \sum_{j=1}^{\ell} q_j + \hat{q}$。通过在[12]中同样的论证，我们可以看到 $\tilde{E} = \hat{q} = 0$， $\ell = 1$。

取 $v = v_1$，因为 $\ell = 1$，由(2.32)和(2.31)，我们得到(2.19)中的收敛性且存在常数 υ 使得

$$\inf_{\mathbb{R}} \left|u_n\left(\cdot + x_n\right)\right| \ge \upsilon \tag{2.36}$$

我们现在证

$$u'_n\left(\cdot + x_n\right) \to v'(\cdot) \text{ 在 } L^2(\mathbb{R}) \tag{2.37}$$

和

$$1 - \left|u_n\left(\cdot + x_n\right)\right|^2 \to 1 - \left|v(\cdot)\right|^2 \text{ 在 } L^2(\mathbb{R}) \tag{2.38}$$

其中 $v = v_1$。事实上，因为 $\ell = 1$， $\hat{q} = 0$，我们有 $q = q_1$。结合(2.18)和(2.34)，我们得到

$$P\left(u_{n,1}\right) \to q = P(v) \text{，} \quad E\left(u_{n,1}\right) \to E_{\min}(q) = E(v) \tag{2.39}$$

我们先证(2.37)，因为 $u'_{n,1} \rightharpoonup v'$ 在 $L^2(\mathbb{R})$，很容易得到

$$\limsup_{n\to\infty} \left\|u'_{n,1}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \left\|v'\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

假设(2.37)不成立，则我们会取一个子序列我们仍然用 $u'_{n,1}$ 表示，然后假设

$M := \lim_{n\to\infty} \left\|u'_{n,1}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = 2E_1\left(u_{n,1}\right)$，其中 $M > \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = 2E_1(v)$。由(2.39)，我们得到

$$\lim_{n\to\infty} E_2\left(u_{n,1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(E\left(u_{n,1}\right) - E_1\left(u_{n,1}\right)\right) = E(v) - \frac{M}{2} < E(v) - E_1(v) = E_2(v)$$

这与(2.26)矛盾。所以我们有 $u'_{n,1} \to v'$ 在 $L^2(\mathbb{R})$。

下面我们说明(2.38)成立。由于 $E_1(u_{n,1}) \to E_1(v)$ 和(2.39)，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}(W*\eta_{n,1})\eta_{n,1}=\int_{\mathbb{R}}(W*\eta)\eta \tag{2.40}$$

其中 $\eta=1-|v|^2$。由条件 H$_2$)，我们有

$$\begin{aligned}\|\eta_{n,1}-\eta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}-\hat{W}(\xi)|\hat{\eta}_{n,1}-\hat{\eta}|^2+\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\xi^2|\hat{\eta}_{n,1}-\hat{\eta}|^2\\ &=\int_{\mathbb{R}}-W*(\eta_{n,1}-\eta)(\eta_{n,1}-\eta)+\frac{1}{4}\|\eta'_{n,1}-\eta'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\end{aligned} \tag{2.41}$$

把(2.33)和(2.40)代入计算，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}}-W*(\eta_{n,1}-\eta)(\eta_{n,1}-\eta)\to 0 \tag{2.42}$$

我们还得到 $\|\eta'_{n,1}-\eta'\|_{L^2(\mathbb{R})}\to 0$。注意到 $\eta'-\eta'_{n,1}=2(\langle v,v'\rangle-\langle u_{n,1}-u'_{n,1}\rangle)$，所以

$$\|\eta'_{n,1}-\eta'\|_{L^2(\mathbb{R})}\le 2\|(v-u_{n,1})v'_1\|_{L^2(\mathbb{R})}+2\|(v'-u'_{n,1})u_{n,1}\|_{L^2(\mathbb{R})} \tag{2.43}$$

由不等式(2.29)，我们有 $\|u_{n,1}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\le C(q)$，这允许我们使用控制收敛定理来推断(2.41)的右边的第二项也收敛到零。然后由于(2.37)，我们得到

$$\|(v'-u'_{n,1})u_{n,1}\|_{L^2(\mathbb{R})}\le C(q)\|v'-u'_{n,1}\|_{L^2(\mathbb{R})}\to 0\text{。}$$

因此结合(2.41)和(2.42)，我们证到了(2.38)。因此存在 $v\in n\varepsilon(\mathbb{R})$ 满足 $P(v)=q$，$E(v)=E_{\min}(q)$。证毕。

参考文献

[1] Gross, E. (1963) Hydrodynamics of a Superfluid Condensate. *Journal of Mathatical Physics*, **4**, 195-207. https://doi.org/10.1063/1.1703944

[2] Pitaevskii, P. (1961) Vortex lines in an Imperfect Bose Gas. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, **13**, 451-454.

[3] Killip, R., Oh, T., Pocovnicu, O. andVisan, N. (2012) Global Well-Posedness of the Gross-Pitaevskii and Cubic-Quintic Nonlinear Schrödinger Equation with Non-Vanishing Boundary Conditions. *Mathematical Research Letters*, **19**, 969-986. https://doi.org/10.4310/MRL.2012.v19.n5.a1

[4] Bellazzini, J. and Jeanjean, L. (2016) On Dipolar Quantum Gases in the Unstable Regime. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **48**, 2028-2058. https://doi.org/10.1137/15M1015959

[5] de Laire, A. (2010) Global Well-Posedness for a Nonlocal Gross-Pitaevskii Equation with Non-Zero Condition at Infinity. *Communications in Partial Differential Equations*, **35**, 2021-2058. https://doi.org/10.1080/03605302.2010.497200

[6] Béthuel, F., Gravejat, P. and Smets. D. (2015) Asymptotic Stability in the Energy Spave for Darksolitons of the Gross-Pitaevskii Equation. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **48**, 1327-1381. https://doi.org/10.24033/asens.2271

[7] Luo, Y. and Stylianou, A. (2021) Ground States for a Nonlocal Mixed Order Cubic-Quartic Gross-Pitaevskii Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **496**, Article ID: 124802. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124802

[8] Béthuel, F., Orlandi, G. and Smets. D. (2004) Vortex Rings for the Gross-Pitaevskii Equation. *Journal of the European Mathematical Society*, **6**, 17-94. https://doi.org/10.4171/jems/2

[9] Béthuel, F. and Saut. J.-C. (1999) Travelling waves for the Gross-Pitaevskii Equation I. *Annales de l'I.H.P. Physique théorique*, **70**, 147-238.

[10] de Laire, A. (2012) Nonexistence of Traveling Waves for a Nonlocal Gross-Pitaevskii Equation. *Indiana University Mathematics Journal*, **61**, 1451-1484. https://doi.org/10.1512/iumj.2012.61.4707

[11] Pecher, H. (2012) Global Solutions for 3D Nonlocal Gross-Pitaevskii Equations with Rough Data. Electron. *Journal of*

Differential Equations, **170**, 1-34.

[12] de Laire, A. and López-Martnez, S. (2022) Existence and Decay of Traveling Waves for the Nonlocal Gross Pitaevskii Equation. *Communications in Partial Differential Equations*, **47**, 1732-1794. https://doi.org/10.1080/03605302.2022.2070853

[13] Jones, C.A. and Roberts, P.H. (1982) Motions in a Bose Condensate IV. Axisynnetric Solitary Waves. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **15**, 2599-2619. https://doi.org/10.1088/0305-4470/15/8/036

[14] de Laire, A. and Mennuni, P. (2020) Traveling Waves for Some Nonlocal 1D Gross-Pitaevskii Equations with Nonzero Conditions at Infinity. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **40**, 635-682. https://doi.org/10.3934/dcds.2020026