Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 207-212
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144128

Hans汉斯

关于蕴含格的一些注记

尹丽云

河北地质大学数理教学部，河北 石家庄

收稿日期：2024年3月4日；录用日期：2024年3月24日；发布日期：2024年4月25日

摘 要

本文证明了当蕴含格作为L-代数时，其L-理想格和L-同余格是同构的以及L-同余格与它作为蕴含格的同余格也是同构的。进一步给出了Heyting代数中同余关系更一般的简化。

关键词

蕴含格，L-代数，同余

Notes on the Implicative Lattices

Liyun Yin

School of Mathematics and Science, Hebei GEO University, Shijiazhuang Hebei

Received: Mar. 4th, 2024; accepted: Mar. 24th, 2024; published: Apr. 25th, 2024

Abstract

In this paper, we prove that L-ideals lattice and L-congruences lattice are isomorphic when the implicative lattice is an L-algebra, and L-congruences lattice is isomorphic to its congruences lattice when L is an implicative lattice. Furthermore, a more general simplification of congruence relations in Heyting algebras is given.

Keywords

Implicative Lattice, L-Algebra, Congruence

文章引用: 尹丽云. 关于蕴含格的一些注记[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 207-212. DOI: 10.12677/pm.2024.144128

1. 引言

随着模糊逻辑基础理论的研究发展，出现了许多具有重要意义的模糊逻辑形式演绎系统，相关的逻辑代数结构得到了广泛的研究[1] [2]。Birkhoff 在文献[3]中给出了蕴含格的基本概念和性质，为后续研究奠定了基础。在非经典逻辑中，Heyting 代数是一种非常重要的代数结构，它是作为直觉主义命题逻辑的代数模型而引进的，是 Heyting 用数学的观点格式化微积分的命题而抽象出来，其后用他名字命名的一种格。Heyting 代数是格论和逻辑学中重要的代数模型[4]，它可以看做是 Boole 代数[4] [5]一般化的偏序集，同时与格蕴涵代数、*MV*-代数等都有一定的联系[6]，许多学者都对 Heyting 代数进行了深入的研究[7] [8] [9]。Heyting 代数又称为相对伪补格、蕴含格或剩余格，因此，研究蕴含格的相关代数性质是非常有意义的。

受文献[10]的启发，在本文中我们主要围绕代数逻辑理论中的核心问题之一“理想格与同余格是否是同构的”进行研究。主要研究了当蕴含格作为 *L*-代数时，其 *L*-理想格与 *L*-同余格是否同构以及 *L*-同余格与它作为蕴含格的同余格是否同构的问题，最终得到了肯定的结果。此外，通过证明当 *L* 是蕴含格时，有 $Con_L(L)=Con_B(L)$ 成立，从而对 Heyting 代数中的同余关系进行了更一般的简化(即 Heyting 代数中的同余关系由原来的保 $\wedge,\vee,\rightarrow$ 运算，简化为保 $\rightarrow$ 运算)，大大减少了我们在验证一个等价关系是否是 Heyting 代数中的同余关系时的计算量，丰富了相关的理论知识。

本文主要所用的记号如下：

$I(L)$：*L*-代数中 *L*-理想的集合。

$F(L)$：蕴含格 *L* 中滤子的集合。

$Con_L(L)$：*L*-代数中 *L*-同余的集合。

$Con_B(L)$：蕴含格 *L* 中同余的集合。

2. 预备知识

定义 2.1 [10]一个 *L*-代数 $(L,\rightarrow)$ 是一个 $(2,0)$ 型代数并且对 $\forall x,y,z\in L$ 满足以下条件：

$$x\rightarrow x=x\rightarrow 1=1, 1\rightarrow x=x. \tag{1}$$

$$(x\rightarrow y)\rightarrow(x\rightarrow z)=(y\rightarrow x)\rightarrow(y\rightarrow z). \tag{2}$$

$$x\rightarrow y=y\rightarrow x=1\Rightarrow x=y. \tag{3}$$

其中由条件(1)易证 1 是一个逻辑单位，并且逻辑单位是唯一的。

定义 2.2 [10]设 $(L,\rightarrow)$ 是一个 *L*-代数，我们称 $I\subseteq L$ 是一个理想，如果对 $\forall x,y\in L$ 满足以下条件：

$$1\in I, \tag{4}$$

$$x, x\rightarrow y\in I\Rightarrow y\in I, \tag{5}$$

$$x\in I\Rightarrow(x\rightarrow y)\rightarrow y\in I, \tag{6}$$

$$x\in I\Rightarrow y\rightarrow x\in I, y\rightarrow(x\rightarrow y)\in I. \tag{7}$$

如果 *L* 满足

$$x\rightarrow(y\rightarrow x)=1. \tag{8}$$

则条件(7)可以被去掉。在本文中，我们称 *L*-代数中的理想为 *L*-理想。

命题 2.3 [10]设 $(L,\rightarrow)$ 是一个 *L*-代数，每个 *L*-理想 *I* 都可以定义一个 *L*-同余(*L*-同余是指 *L* 的同余~使得 $(\forall x,y,z\in L)(x,y)\in\sim\Rightarrow(x\rightarrow z,y\rightarrow z)\in\sim$ 且 $(z\rightarrow x,z\rightarrow y)\in\sim$。)

$$x \sim y :\Leftrightarrow x \to y, y \to x \in I.$$

反过来，每个 L-同余~定义一个 L-理想 $I := \{x \in L \mid x \sim 1\}$。

推论 2.4 [10]对于一个 L-代数 L，当 $L/\sim$是一个 L-代数时，理想和同余~之间存在一个一一对应。

注记 2.5 设 L 是一个 L-代数，由文献[4]中的推论 1 的证明可知，$L/\sim$是一个 L-代数当且仅当它满足以下条件：

$$x \sim y \Leftrightarrow (x \to y) \sim (y \to x) \sim 1. \tag{9}$$

定义 2.6 [3]设 $(L;\wedge,\vee)$ 是一个格，若 L 的非空子集 F 满足以下条件：

$$a \in F, x \in L, a \le x \Rightarrow x \in F,$$

$$a \in F, b \in F \Rightarrow a \wedge b \in F.$$

则称 F 是 L 的滤子。

定义 2.7 [11]设 L 是一个格，$a,b \in L$。如果存在 L 的一个最大元 x 使得 $a \wedge x \le b$，则称 x 是 a 关于 b 的相对伪补元。我们将记这样的元为 $a \to b$，即 $a \to b = \max\{x \in L \mid a \wedge x \le b\}$。等价地，$a \to b$ 是 a 关于 b 的相对伪补元，如果对任意 $x \in L$，$a \wedge x \le b$ 当且仅当 $x \le a \to b$。

定义 2.8 [11]一个 Heyting 代数，是指一个有 0 元的格 L 使得对任意 $a,b \in L$，$a \to b$ 在 L 中存在。换句话说，一个 Heyting 代数是代数 $(L;\wedge,\vee,\to,0)$。其中，$(L;\wedge,\vee,0)$ 是有 0 元的格，$\to$ 是 L 上的一个二元运算使得对任意 $a,b \in L$，有 $a \to b = \max\{x \in L \mid a \wedge x \le b\}$。我们称这样的一个运算 $\to$ 为剩余运算。

容易验证，每一个 Heyting 代数都是一个具有最大元 1 的分配格。

引理 2.9 [6]设 L 是一个 Heyting 代数，则对 $\forall x,y,z \in L$，有以下性质：

$$x \to y = 1 \Leftrightarrow x \le y,$$

$$((x \to y) \to y) \to y = x \to y,$$

$$x \wedge (x \to y) = x \wedge y,$$

$$x \to (y \to z) = (x \wedge y) \to z,$$

$$(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z),$$

$$x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z).$$

定义 2.10 [3]一个格 L 称为蕴含格，或 Brouwer 格，如果对任意 L 中的元素 a,b，集合 $\{x \in L \mid a \wedge x \le b\}$ 包含最大元。这个最大元称为 a 在 b 中的余、相对伪补或实质蕴含，记作 $a \to b$。如果 Brouwer 格有最小元 0，元素 $a \to 0$ 称为 a 的伪补。

注记 2.11 一个蕴含格一定包含最大元 1，未必包含最小元 0。

引理 2.12 [3]设 L 是一个蕴含格。则对 $\forall a,b,c \in L$，有以下性质：

$$b \le a \to b, \tag{10}$$

$$a \to (b \to c) = (a \wedge b) \to c = b \to (a \to c), \tag{11}$$

$$a \to (b \to c) = (a \to b) \to (a \to c), \tag{12}$$

$$a \to (a \wedge b) = a \to b, \tag{13}$$

$$a \wedge b \le c \Leftrightarrow a \le b \to c, \tag{14}$$

$$a \wedge (a \to b) = a \wedge b, \tag{15}$$

$$L \text{ 是分配格。} \tag{16}$$

如果 1 是 L 的最大元，则

$$a = 1 \to a, \tag{17}$$

$$a \le b \text{ 当且仅当 } 1 = a \to b. \tag{18}$$

注记 2.13 由引理 2.8 易知，蕴含格 $(L,\to)$ 是一个 L-代数。

定义 2.14 [11]设 L 是一个格，θ 是 L 的一个格同余，若商格 L/θ 有最大元，则称这个最大元为 θ 的余核，记为 $Coker\,\theta$，当 L 中有最大元 1 的时候，$Coker\,\theta = [1]_\theta$。

命题 2.15 [11]设 L 是一个分配格，F 是 L 的滤子，则

$$(x,y) \in \theta(F) \Leftrightarrow (\exists j \in F)\, x \wedge j = y \wedge j,$$

而且 $Coker\,\theta(F) = F$。其中 $\theta(F)$ 是包含 F 的最小格同余。

定义 2.16 [11]设 L 是一个蕴含格，L 的一个(蕴含格)同余，是指 L 的一个格同余 θ 使得

$$(\forall a,b,c,d \in L)(a,b) \in \theta \text{ 和 } (c,d) \in \theta \Rightarrow (a \to c, b \to d) \in \theta.$$

通过上述定义可知，蕴含格同余是保 $\wedge, \vee, \to$ 运算的。

设 F 是蕴含格 L 的一个滤子，我们将分别用 $\theta(F)$ 和 $\theta_{lat}(F)$ 表示具有余核 F 的最小同余和最小格同余。

引理 2.17 [11]设 L 是一个蕴含格，F 是 L 的一个滤子，则 $\theta_{lat}(F)$ 是一个(蕴含格)同余，因而 $\theta_{lat}(F) = \theta(F)$。

3. 主要结果

命题 3.1 设 L 是一个蕴含格，则有以下等式成立

$$(x \to y) \to ((y \to x) \to x) = (y \to x) \to ((x \to y) \to y).$$

证明由性质(14)和(15)可知，

$$(x \to y) \to ((y \to x) \to x) \le (y \to x) \to ((x \to y) \to y)$$

$$\Leftrightarrow (y \to x) \wedge \left[(x \to y) \to ((y \to x) \to x)\right] \le (x \to y) \to y$$

$$\Leftrightarrow (y \to x) \wedge (x \to y) \wedge ((y \to x) \to x) \le y$$

$$\Leftrightarrow x \wedge y \wedge (y \to x) \le y$$

$$\Leftrightarrow x \wedge y \le y$$

同理可得 $(y \to x) \to ((x \to y) \to y) \le (x \to y) \to ((y \to x) \to x)$。所以 $(x \to y) \to ((y \to x) \to x) = (y \to x) \to ((x \to y) \to y)$ 成立。

命题 3.2 设 L 是一个蕴含格，当 L 作为 L-代数时，L 满足条件(9)。

证明设~是一个 L-同余，$x \sim y$，则有 $x \to y \sim y \to y = 1$，$1 = x \to x \sim y \to x$，所以 $y \to x \sim x \to y \sim 1$。反过来，设 $x \to y \sim 1 \sim y \to x$，则 $(x \to y) \to y \sim y$，$(x \to y) \to x \sim x$，$(y \to x) \to x \sim x$，$(y \to x) \to y \sim y$。所以 $(x \to y) \to ((y \to x) \to x) \sim (x \to y) \to x \sim x$，$(y \to x) \to ((x \to y) \to y) \sim (y \to x) \to y \sim y$。再由命题 3.1 可知 $x \sim y$，因此 L 满足条件(9)。

定理 3.3 设 L 是一个蕴含格，当 L 作为 L-代数时，则有 $I(L) \cong Con_L(L)$。

证明由命题 3.2 可知，蕴含格的 L-理想与 L-同余是一一对应的。其中对应关系由以下映射给出，设 $\alpha : I \mapsto \theta_I$ 是 $I(L)$ 到 $Con_L(L)$ 上的一个映射，$\beta : \theta \mapsto [1]_\theta$ 是 $Con_L(L)$ 到 $I(L)$ 上的一个映射，其中

$a\,\theta_I b \Leftrightarrow a\to b$，$b\to a\in I$，$[1]_\theta=\{x\in L\mid x\,\theta\,1\}$，$\alpha\circ\beta=1_{Con_L(L)}$，$\beta\circ\alpha=1_{I(L)}$。下证 α 和 β 均为保序映射。设 $I,J\in I(L)$，$I\subseteq J$，因为 $a\,\theta_I b\Leftrightarrow a\to b$，$b\to a\in I$，从而推出 $a\to b,b\to a\in J\Leftrightarrow a\,\theta_J b$，$\theta_I\subseteq\theta_J$，所以 α 是保序的。设 $\theta_1,\theta_2\in Con_L(L)$，$\theta_1\subseteq\theta_2$，因为 $\forall a\in[1]_{\theta_1}\Leftrightarrow(a,1)\in\theta_1$，又因为 $\theta_1\subseteq\theta_2$，所以 $(a,1)\in\theta_2$，进而有 $[1]_{\theta_1}\subseteq[1]_{\theta_2}$，所以 β 是保序的。因此，L 的 L-理想与 L-同余是保序同构的。

定理 3.4 设 L 是一个蕴含格，~是 L 作为 L-代数时的一个 L-同余，设 $F:=[1]_\sim=\{x\in L\mid x\sim1\}$，则 F 是 L 上的滤子并且 $\sim=\theta(F)$。

证明设 $F:=[1]_\sim$，根据命题 2.3 可知，F 是 L 的一个 L-理想，所以 F 也是 L 上的一个滤子。事实上，设 $\forall x\in F,y\in L$，且 $x\le y$，由公式(18)可知 $x\to y=1$，又因为 $1\in F$，由条件(5)可知 $y\in F$。设 $\forall x,y\in F$，因为 F 是 L 的一个 L-理想，所以由条件(7)可知 $x\to y\in F$，再由公式(13)和条件(5)可知 $x\wedge y\in F$，因此，F 是 L 上的一个滤子。下证 $\sim=\theta(F)$。

设 $(x,y)\in\sim$，根据命题 3.2 可知 $(x,y)\in\sim\Leftrightarrow x\to y,y\to x\in[1]_\sim=F$，因为 F 是滤子，所以 $(x\to y)\wedge(y\to x)\in F$，由公式(15)可知 $x\wedge(x\to y)\wedge(y\to x)=x\wedge y$，$y\wedge(x\to y)\wedge(y\to x)=x\wedge y$，所以 $x\wedge(x\to y)\wedge(y\to x)=y\wedge(x\to y)\wedge(y\to x)$。再由命题 2.15 可知，$(x,y)\in\theta(F)$，即 $\sim\subseteq\theta(F)$。

反过来，设 $(x,y)\in\theta(F)$，由上述证明可知，F 是 L 的一个滤子，则由引理 2.17 可知 $\theta(F)$ 是 L 上的蕴含格同余，因此 $(x\to y)\,\theta(F)\,1\,\theta(F)\,(y\to x)$，从而由命题 2.15 可得，有 $x\to y,y\to x\in[1]_{\theta(F)}=Coker\,\theta(F)=F$，所以 $x\to y\sim1\sim y\to x$，由命题 3.2 可知 $x\sim y$，因此 $\theta(F)\subseteq\sim$，综上可得 $\sim=\theta(F)$。

文献[9]给出了 Heyting 代数 L 中同余关系的一种简单定义：一种只依赖于交运算 $\wedge$ 和 $\to$ 蕴含算子的同余关系，然后通过滤子作为中间桥梁，证明了这种同余关系和 L 作为泛代数的同余关系等价(即同余关系是保 $\wedge,\vee,\to$ 运算的)。下面我们给出更一般的简化。

定理 3.5 设 L 是一个蕴含格，则有 $Con_L(L)=Con_B(L)$。

证明设 $\sim\in Con_L(L)$，则由定理 3.4 可知 $[1]_\sim=F\in F(L)$，由引理 2.17 可知 $\theta(F)\in Con_B(L)$。再根据定理 3.4 可得 $\sim\in Con_B(L)$，即 $Con_L(L)\subseteq Con_B(L)$。反过来，设 $\varphi\in Con_B(L)$，则 φ 保 $\wedge,\vee,\to$，所以 $\varphi\in Con_L(L)$，即 $Con_B(L)\subseteq Con_L(L)$，因此 $Con_L(L)=Con_B(L)$。

下面我们给出具体的例子来展示以上结果。

例 3.6 设 L 是一个含有四个元素的链，见图 1 所示：

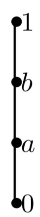

Figure 1. Hasse diagram of L
图 1. L 的哈斯图

容易证明 L 是一个 Heyting 代数。设 $\theta\in Con_L(L)$，我们将分以下五种情况来判断 L-同余的个数: 若 $(0,a)\in\theta$，则由 θ 保 $\to$ 运算可知，$(0\to0,a\to0)=(1,0)\in\theta$，所以 $0,a,1$ 在一个 L-同余类里，又因为 $(0\to b,1\to b)=(1,b)\in\theta$，所以 $0,a,b,1$ 在一个 L-同余类里，此时 θ 是最大的 L-同余；若 $(0,b)\in\theta$，则 $(0\to0,b\to0)=(1,0)\in\theta$，所以 $0,b,1$ 在一个 L-同余类里，又因为 $(0\to a,1\to a)=(1,a)\in\theta$，所以 $0,a,b,1$ 在一个 L-同余类里，此时 θ 是最大的 L-同余；若 $(a,b)\in\theta$，则 $(a\to a,b\to a)=(1,a)\in\theta$，所以 $a,b,1$ 在

一个 L-同余类里；若 $(b,1)\in\theta$，则满足保 $\to$ 运算，所以 $b,1$ 在一个 L-同余类里；若 $(a,1)\in\theta$，则 $(a\to b,1\to b)=(1,b)\in\theta$，所以 $a,b,1$ 在一个 L-同余类里。

因此，当 L 作为 L-代数时有四个 L-同余，分别为 $\theta_1=\{(0,0),(a,a),(b,b),(1,1)\}$；$\theta_2=\{(0,0),(a,a),(b,b),(1,1),(b,1),(1,b)\}$；$\theta_3=\{(0,0),(a,a),(b,b),(1,1),(a,b),(b,a),(a,1),(1,a),(b,1),(1,b)\}$；$\theta_4=L\times L$。根据定义 2.2 可知 L 有四个 L-理想，分别为 $I_1=\{1\}$，$I_2=\{b,1\}$，$I_3=\{a,b,1\}$，$I_4=L$，设 α 是 $I(L)$ 到 $Con_L(L)$ 上的一个映射，使得 $\alpha_1:I_1\mapsto\theta_1$，$\alpha_2:I_2\mapsto\theta_2$，$\alpha_3:I_3\mapsto\theta_3$，$\alpha_4:I_4\mapsto\theta_4$，所以 $I(L)$ 和 $Con_L(L)$ 是保序同构的，即 $I(L)\cong Con_L(L)$ 成立。同理我们可以得到 L 的蕴含格同余的个数，这与上面 L-同余的个数是一样的，而且每个同余类里的元素都是相同的，故有 $Con_L(L)=Con_B(L)$ 成立。

若利用定理 3.5，我们可以直接用保 $\to$ 运算来计算 L 的蕴含格同余的个数，这将简化原来按照保 $\wedge,\vee,\to$ 运算时的计算量。

参考文献

[1] Wang, G.J. (1999) On the Logic Foundation of Fuzzy Reasoning. *Information Sciences*, **117**, 47-88. https://doi.org/10.1016/S0020-0255(98)10103-2

[2] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

[3] Birkhoff, G. (1967) Lattice Theory. 3rd Edition, American Mathematical Society, New York.

[4] 郑崇友, 樊磊, 崔宏斌. Frame 与连续格[M]. 北京: 首都师范大学出版社, 2000.

[5] He, W. (1998) Spectrums of Heyting Algebras. *Advances in Mathematics*, **27**, 139-142.

[6] 苏忍锁, 张馨文. Heyting 代数与剩余格[J]. 陕西理工学院学报(自然科学版), 2009, 25(4): 63-69.

[7] 黄文平. Heyting 代数的若干性质[J]. 陕西师大学报(自然科学版), 1995, 23(4): 109-110.

[8] 刘春辉. Heyting 代数的扩张模糊滤子[J]. 山东大学学报(理学版), 2019, 54(2): 57-65.

[9] 杨静梅, 冯爽, 姚卫. Heyting 代数中同余关系的简化[J]. 河北科技大学学报, 2012, 33(6): 479-481.

[10] Rump, W. (2008) *L*-Algebras, Self-Similarity, and *l*-Groups. *Journal of Algebra*, **320**, 2328-2348. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.05.033

[11] 方捷. 格论导引[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.